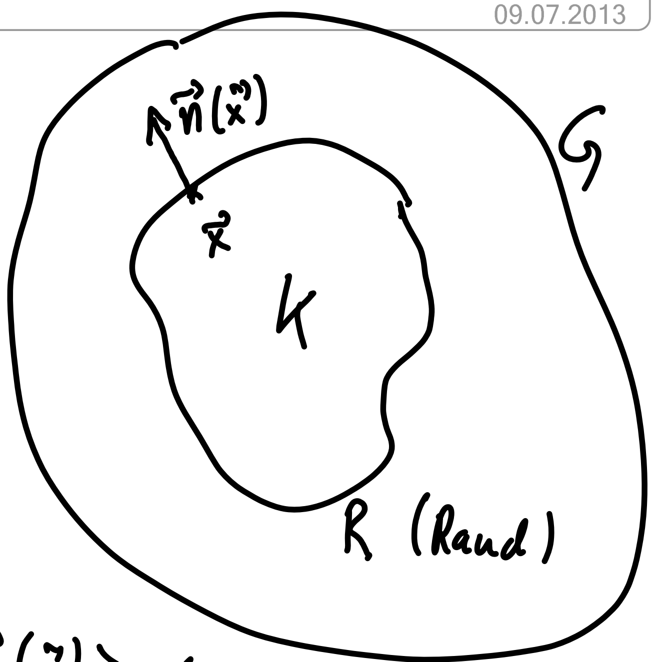


Gauß'scher Integralsatz:

für $f: G \to \mathbb{R}^3$

$$\int_K \operatorname{div} f(\vec x)\, d\vec x = \int_R \underbrace{\langle f(\vec x), \vec n(\vec x)\rangle}_{}\, d\sigma(\vec x).$$

4.14 geometrische Interpretation

- Oberflächenintegral:

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, die R beschreibt, so gilt

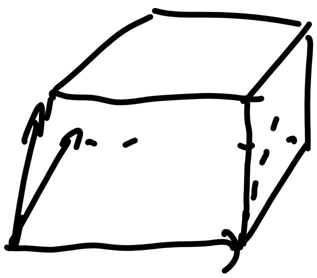
$$\vec n(\vec x) = \frac{\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)}{\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|} \quad \text{für } \vec x = \Phi(u,v),$$

also $$\int_R \overbrace{\langle f(\vec x), \vec n(\vec x)\rangle}^{}\, d\sigma(\vec x)$$

$$= \int_D \langle f(\Phi(u,v)), \vec{n}(\Phi(u,v)) \rangle \, \| \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) \| \, d(u,v)$$

$$= \int_D \underbrace{\langle f(\Phi(u,v)), \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) \rangle} \, d(u,v)$$

Spatprodukt = Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepiped

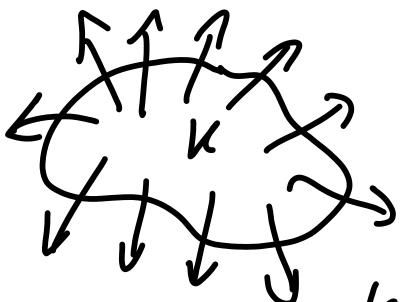


≙ Volumen der Flüssigkeit, die durch R durchströmt.

Interpretation des Gauß'schen Satzes:

Gesamtfluss rein/raus übern Rand

= gesamter im Inneren generierter/versenkter Fluss.



positiver Gesamtfluss über Rand

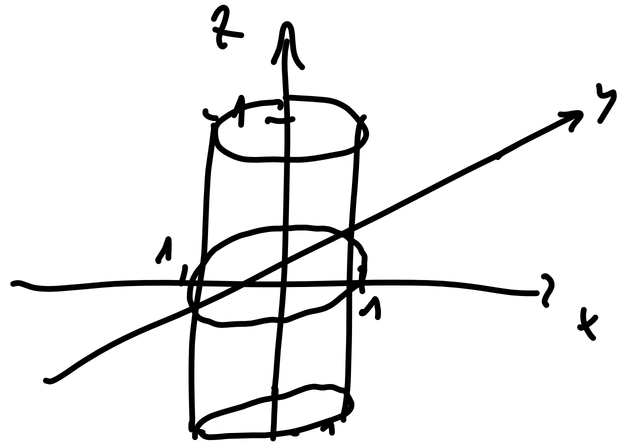
Gesamtfluss über Rand Null bei $\operatorname{div} f = 0$.

4.15 Beispiel: Gesucht: $\int_R \langle f(\vec{x}), \vec{n}(x) \rangle \, d\sigma(\vec{x})$

für $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{bmatrix}$ und

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \leq 1, \; -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

(R Rand von K)



Gauß'scher Satz liefert:

$$\int_R \langle f(x), \vec{n}(x) \rangle \, d\sigma(\vec{x})$$

$$= \int_K \operatorname{div} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \right) d\vec{x}.$$

$f(x,y,z) = [xy^2, x^2y, y]^T$, also

$\operatorname{div} f(x,y,z) = y^2 + x^2$. Damit

$$\int_R \langle f(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle \, d\sigma(\vec{x}) = \int_K \underbrace{(x^2+y^2)} \, d(x,y,z) =$$

(Zylinderkoord.)

$$K = \{ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -1 \le z \le 1 \}$$

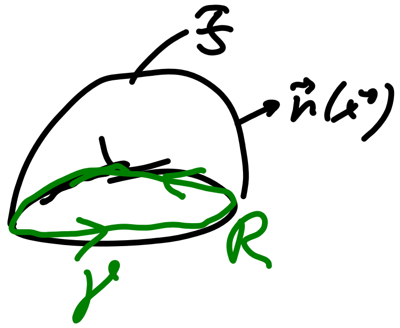
$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 r^3 \, dr$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$$

4.16 Stokes'scher Integralsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $G \supseteq D$ offen und $\vec{\Phi}: G \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diff'bar und auf D reguläre Fläche. Sei $\mathcal{F}$ das durch Φ gegebene reguläre Flächenstück und R sein Rand.

Weiter sei γ eine Kurve, die einmal gegen den Uhrzeigersinn entlang R läuft



Schließlich sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} f, \vec{n}(\vec{x}) \rangle \, d\sigma(\vec{x}) = \int_{\gamma} f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Oberflächenintegral Kurvenintegral.

4.17 Beispiel: Sei wieder auf $G = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < R^2 \right\}$

die Fläche $\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}$ gegeben, die

die obere Halbkugelschale beschreibt.

Wir verifizieren dort den Stokes'schen Satz für

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stokes: $\displaystyle\int_F \langle \operatorname{rot} f, \vec{n}(\vec{x}) \rangle \, d\sigma(\vec{x}) = \int_\gamma f(\vec{x}) \, d\vec{x}$

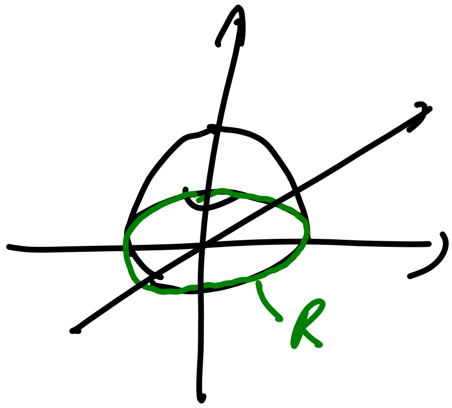
$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \vec{\nabla} \times f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\int_G \langle \operatorname{rot} f(\Phi(u,v)), \vec{n}(\Phi(u,v)) \rangle \cdot \| \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) \| \, d(u,v)$$

$$= \int_G \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)}{\| \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) \|} \right\rangle \cdot \text{——}\,''\,\text{——}$$

$$= \int_G \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u/\sqrt{R^2-u^2-v^2} \\ v/\sqrt{R^2-u^2-v^2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle d(u,v)$$

$$= \int_G 2 \, d(u,v) = 2 \cdot \text{Fläche}(G) = 2\pi R^2 .$$



Andererseits ist Rand R von F gegeben durch: Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

und damit
$$\int_\gamma f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$\left(f(x,y,z) = [-y, x, 1]^T \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t) \right) dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2$$

Mo. 15.7.13: 11^{40} - 13^{20} S101/A03