z.B. Bernoulli Balke

Axiom

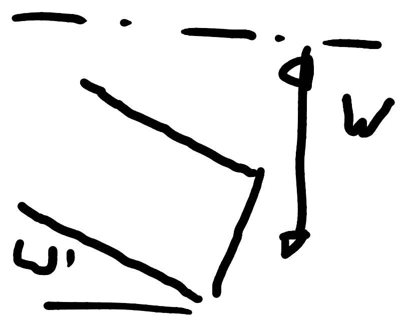
Impulssatz

$\sigma = \sum F_i$

Materialgesetz

$\tau = G \gamma$

Kinematische Bez.




$\gamma = fn(w)$

# 1. Axiom Kontinuitätsgleichung

Die Masse $m = \int dm = \int_{V(t)} \rho \, dV$ eines materiellen Körpers von Volumen $V(t)$ ist zeitlich unveränderlich!

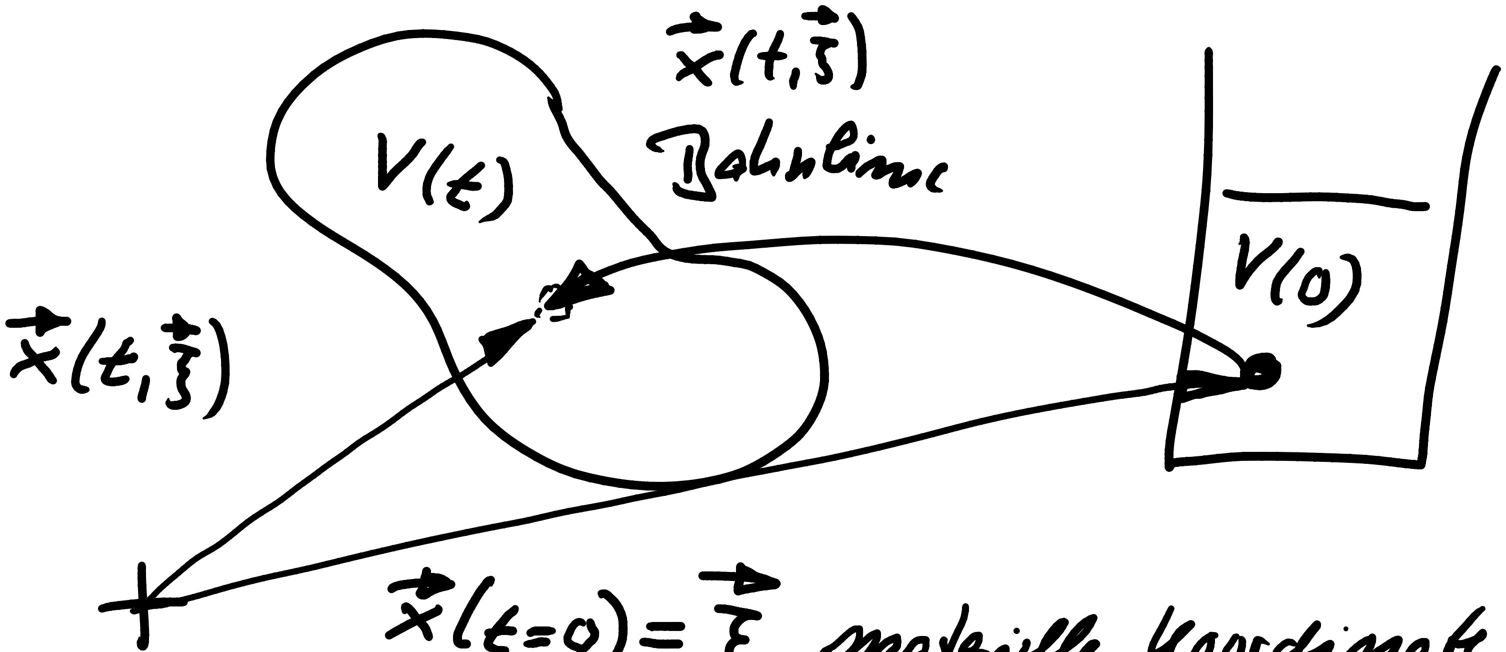
$$\frac{Dm}{Dt} = 0 .$$

$\frac{D}{Dt} \hat{=}$ materielle zeitliche Änderung

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0.$$

→ Leibnitzsche Regel.

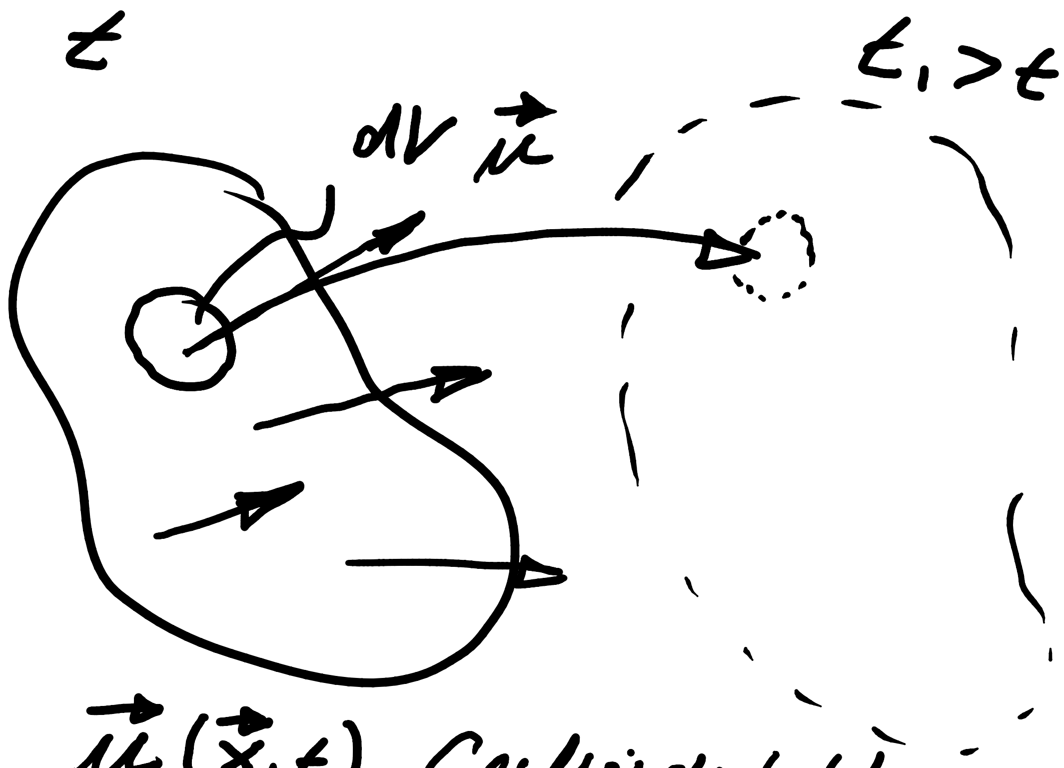
$\nabla \quad \xi \quad \zeta \quad \Delta$




$\vec{x}(t=0) = \vec{\xi}$ materielle Koordinate od. Lagrange Koordinate.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = \int_{V} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt}\,\rho \right) dV$$




$$\frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt} = \text{Volumenänderungsrate des Flüssigkeitsteilchens.}$$

$$= \operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}(\vec{x}, t)$ Geschwindigkeitsfeld.

Differentialgleichung der Bahnlinie.

$$\left\{ \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \text{ mit } \vec{x}(0) = \vec{\xi} \right.$$

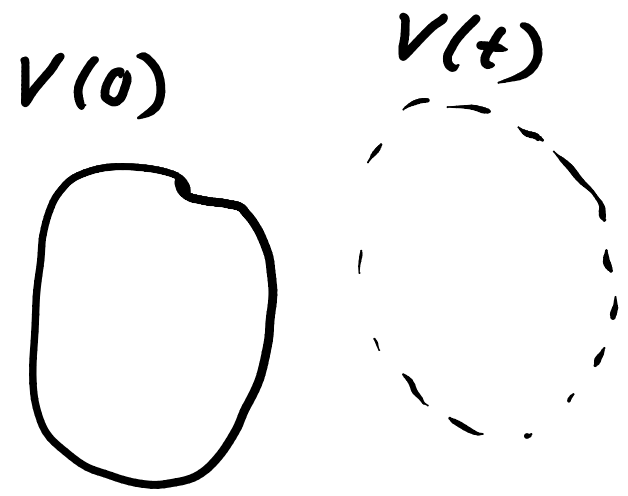
$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

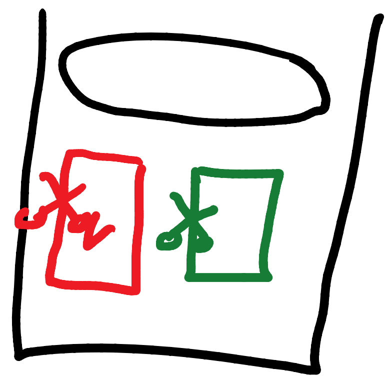
$$\Leftrightarrow \int_V \underbrace{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u}}_{\equiv 0} \, dV = 0$$

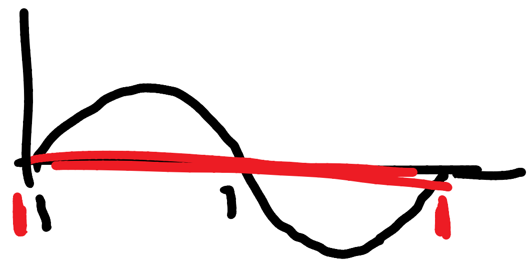
gilt für jeden Zeitpunkt!

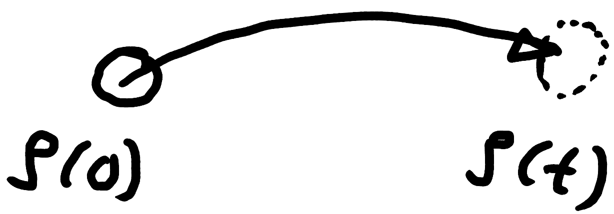
gilt für jedes beliebige Volumen!

$$\Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$







Für eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit (inkompressible Strömung) ist die Volumenänderungsrate

$$\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} = \nabla \cdot \vec{u}$$

identisch Null.

Die Kontinuitätsgleichung in sog. differentieller Form $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$ sagt dann, daß die materielle Änderung der Dichte $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ verschwindet, d.h. $\rho = const$ längs der Teilchenbahn

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Technische Fluidsysteme

$$\frac{D\phi}{Dt} = ?$$

$\phi$ sei stellvertretend für

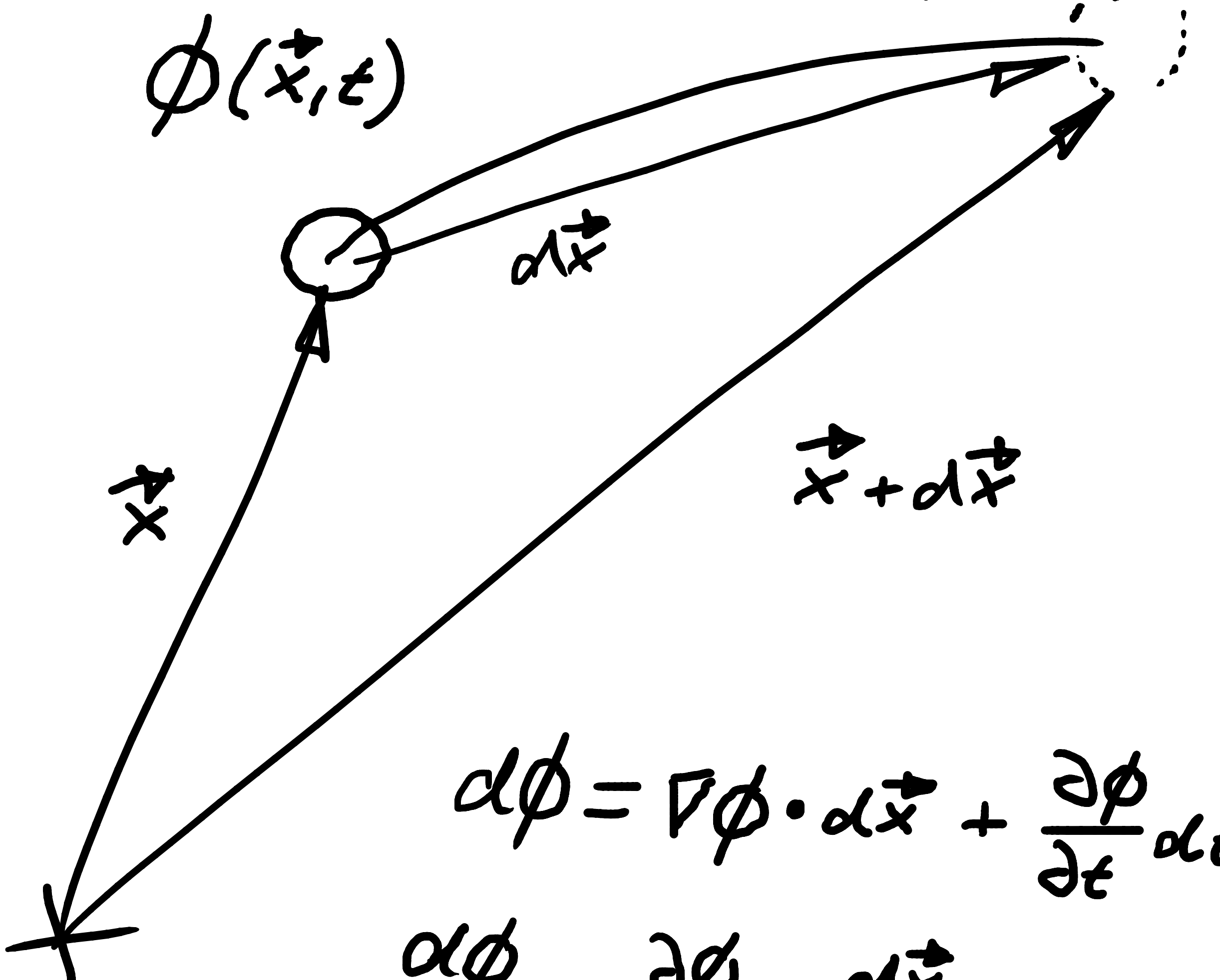
Temperatur $T$, Konzentration $c$, Dichte $\rho$, Druck $p$ } Tensor 0. Stufe, Skalar

Geschwindigkeit $\vec{v}$, Impulsstromdichte $\rho\vec{v}$, Drall $\vec{x} \times \rho\vec{c}$ } Tensoren 1. Stufe, Vektoren

Spannungstensor $\underset{\sim}{T}$ } Tensor 2. Stufe, Dyaden

$$\frac{D\phi}{Dt} = ?$$

$$\phi(\vec{x}+d\vec{x}, t+dt) = \phi(\vec{x},t) + d\phi$$




$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{x} + \frac{\partial\phi}{\partial t}dt \quad \Big| \ \frac{1}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla\phi$$

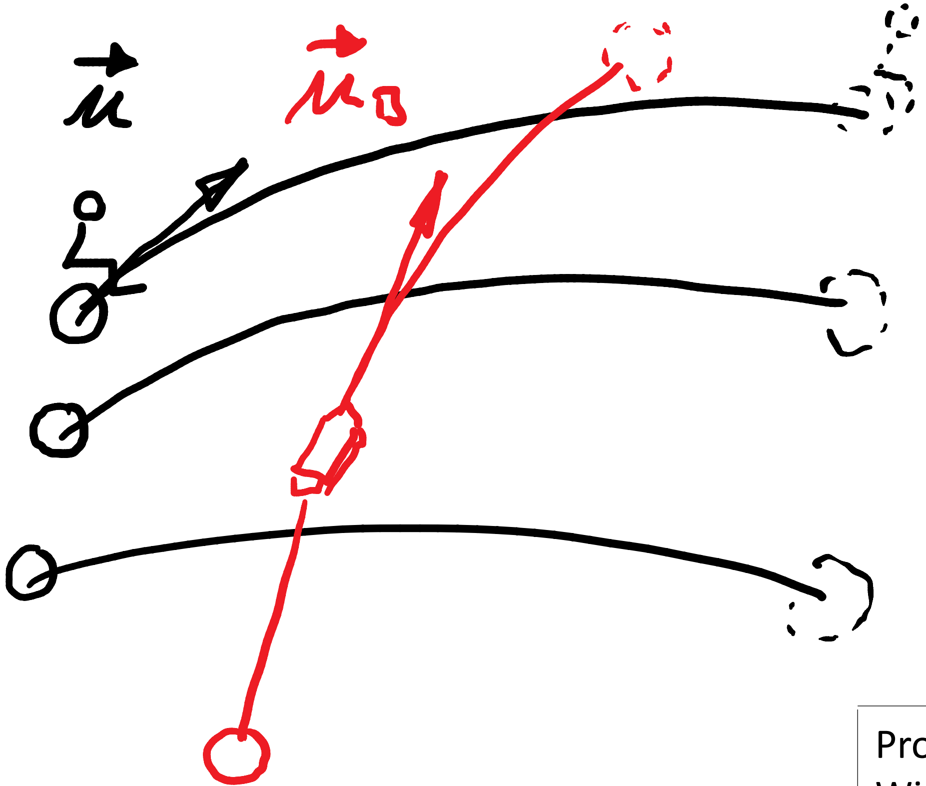
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{cases} \vec{u} & \text{Strömungsgeschw.} \\ \vec{u}_B & \text{Beobachtergeschw.} \end{cases}$$

$$\frac{d\phi}{dt} \rightarrow \frac{D\phi}{Dt}$$ materielle Zeitableitg.

$$\frac{d\phi}{dt}$$ allgemein Zeitableitg.

$$\boxed{\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u}_B\cdot\nabla\phi$$



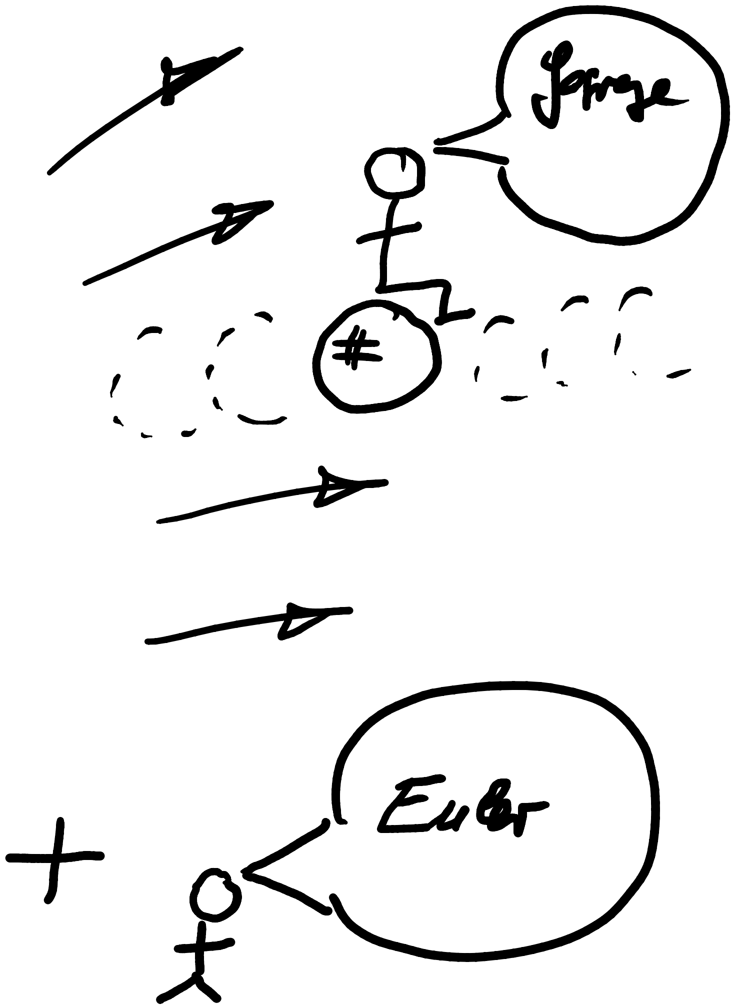

| Zeit | Temp |
| --- | --- |
| ⋮ | ⋮ |

$$\frac{DT}{Dt}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

Warum $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi$

lokale Änd. konvektive Änd. ?




$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi$$



Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz

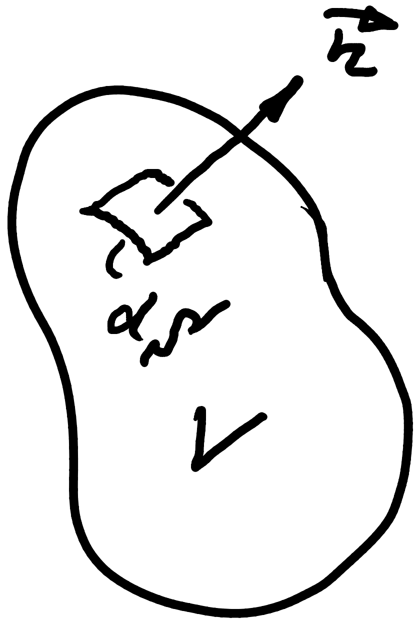
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

$$\overbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\rho} + \rho\,\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV + \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{u})\,dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV + \oint_S \underbrace{\rho\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}}$$



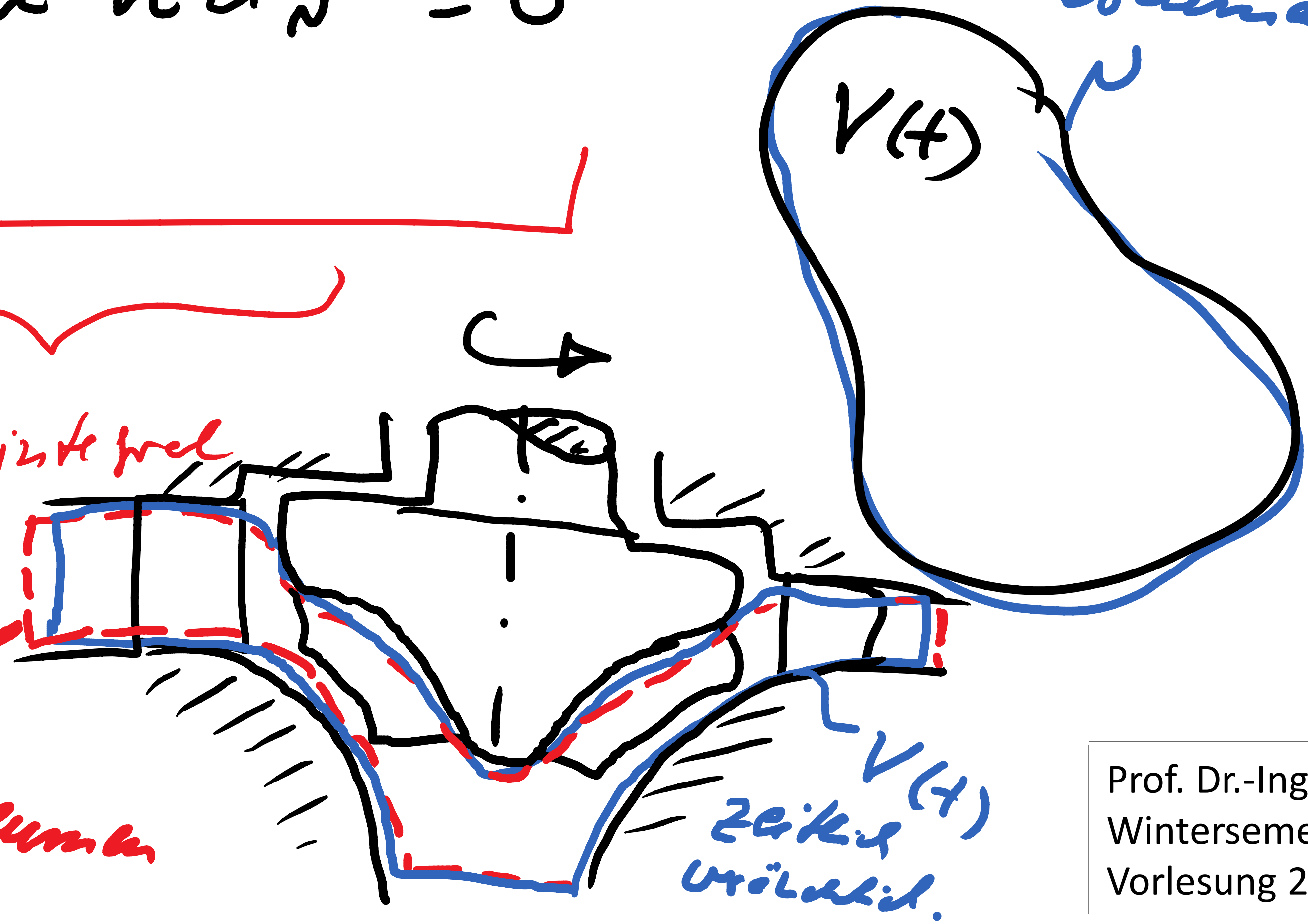
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0 \qquad \frac{Dm}{Dt} = 0 \qquad m = \text{const}$$

$\Longleftrightarrow$ Reynoldsches Transporttheorem $\hat{=}$ Leibnizscher Satz

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \, dV}_{\text{momentane Änderung}} + \underbrace{\oint_{S} \rho \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS}_{\text{Flussintegral}} = 0$$

materielles Volumen




V Kontrollvolumen zeitlich fest

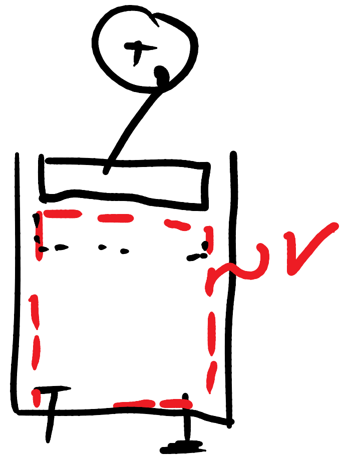


Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2012/13
Vorlesung 2 F 25

Reynoldsches Transporttheorem (RTT)
ist ein kinematischer Satz der dem
Leibnitzsche Satz entspricht.

materielles Volumen
$V(t)$

zeitlich veränderlich




Kontrollvolumen

$V$ mit Oberfläche $S$

$\sum m h_t = \ldots$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \phi \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \phi \, dV + \underbrace{\oint_{S} \phi \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS}.$$

Die <u>materielle Änderung</u> der Masse ist
Impulses
Dralls
Energie

gleich

Null
Kraft
Moment
Leistung + Wärme