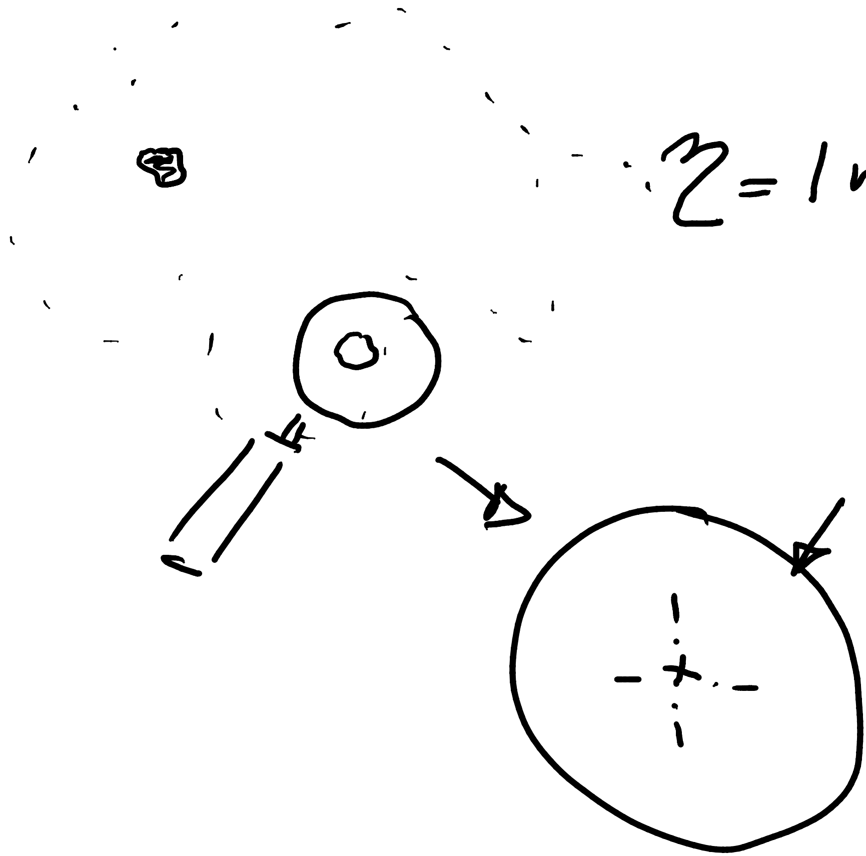
Stokes-Einsteinsche Gleichung für die Diffusion in verdünnten Lösungen

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$$



$\eta = 1\,\mathrm{mPa\,sec}$

$a = 10^{-4}\,\mu m \ldots 1\,\mu m$

Atom-radien ....

$k = 1.38 * 10^{-23}\ J/K$

Boltzmann konstante

$kT \sim$ kinetische Energie der Teilchen

$N_A = 6.022 * 10^{23}\ \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$ Avogadro-Konst.

allgemeine Gaskonstante

$$R = k N_A = 8.3 \frac{J}{mol\,K}$$

$$Pe_D = \frac{\text{Diffusionszeit}}{\text{Konvektionszeit}} = \frac{Ua}{\nu}\,\frac{\nu}{D} = Re * Sc$$

Schmidtzahl $\quad Sc := \frac{\nu}{D} = \frac{\frac{\eta^2}{\varrho}}{kT/6\pi a} = \frac{\text{Materialkraft}}{\text{„thermische" Kraft}}$

η^2/ϱ ist eine Materialkonstante

von der Dimension Kraft.

$$\eta^2/\varrho = (10^{-3})^2\, 10^{-3}\, N = 10^{-9}\, N$$

Wasser:

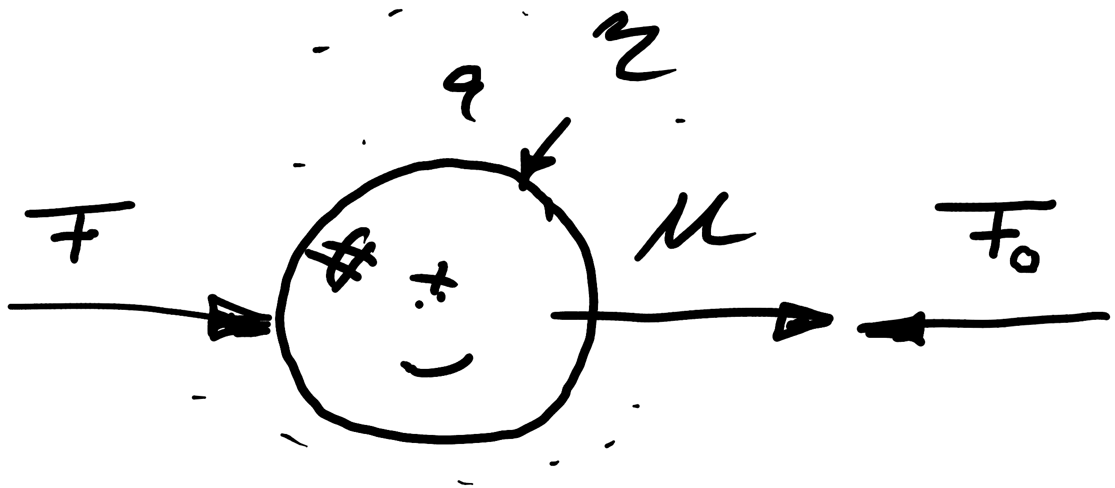
$$Sc = \frac{10^{-9} * \overbrace{6 * \pi}^{10}}{\underbrace{1.38}_{1}\, 10^{-23} \underbrace{(273+20)}_{\sim 10^2} \left(\underbrace{10^{-4}}_{\text{Atom}} \ldots \underbrace{1}_{\text{Molek.}}\right) 10^{-6}}$$

$$= 10^{3} \ldots 10^{7}$$

$Pe \gg 1$, obgleich $Re \ll 1$, da $Sc \ggg 1$.

↳ Diffusiver Stofftransport ist bei kleinen Re-Zahlen und wässrigen Lösungen dominant!

v Mobilität $:= \dfrac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Kraft}}$



Widerstandskraft F_0

Propulsionskraft F

$F = F_0$, da Trägheit keine Rolle spielt.

Stokesche Widerstand einer Kugel in unbegrenzter Flüssigkeit der Viskosität η

$$F_0 = f_n(U, a, \eta) \Longleftrightarrow \underline{F_0 = 6\pi U a \eta}$$

Zu Fuß:

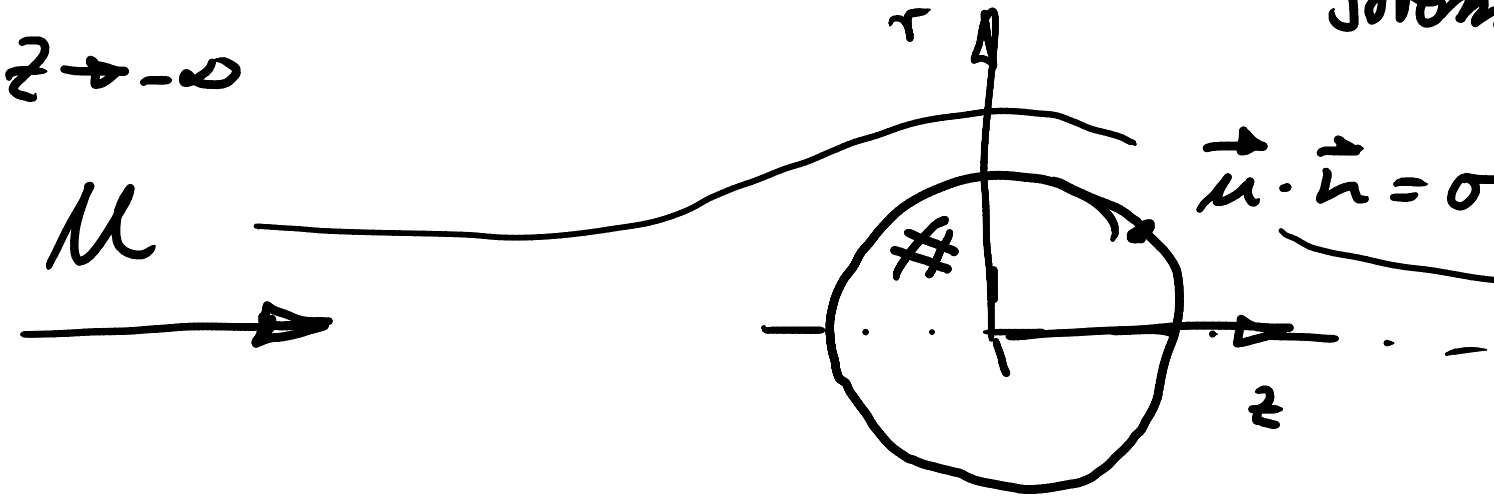
Lineare Gleichung!

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla p &= \eta \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}}$$

$$\Delta^2 \psi = 0$$

$\psi = \text{const}$ Stokes'sche Stromfunktion

Stromlinie



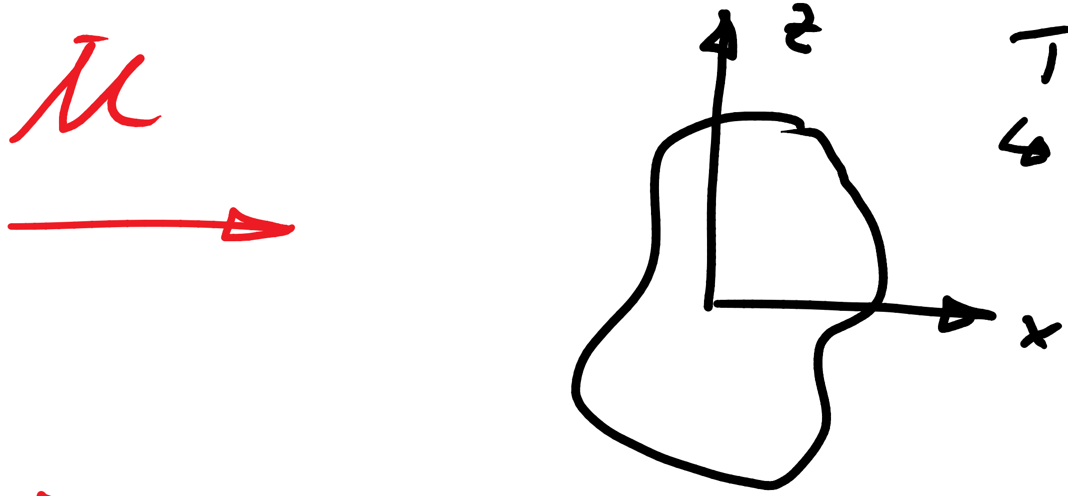
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{u} = \nabla \psi \times \vec{e}_\varphi$$

$$\hookrightarrow \quad F_0 = 6 \pi \eta a U$$

Anm.: Angeströmter Zylinder



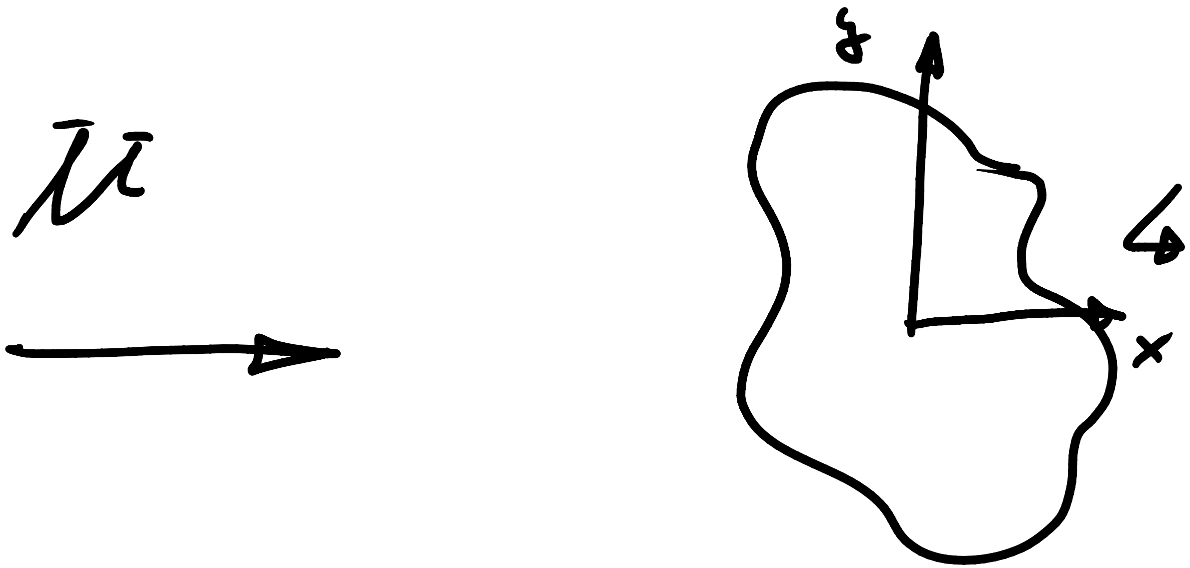
Tiefe → ∞
↳ ebenes Problem

hat keine Lösung!
Stokessche Paradox für $Re \to 0$

$$\underbrace{\rho \vec{U}\cdot\nabla\vec{u} + \nabla p = \eta \Delta \vec{u}}_{\text{Oseen-Gleichung}}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

$Re \to \infty$, rotationsfreie Strömung
keine Ablösung



$\nabla \times \vec{u} = 0$; $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$\hookrightarrow \vec{u} = \nabla \Phi$

$\hookrightarrow \Delta \Phi = 0.$

$F_0 \equiv 0$: d'Alembertsche Paradox

$F_0 \sim u$, infolge der Linearität der Differentialgleichung.

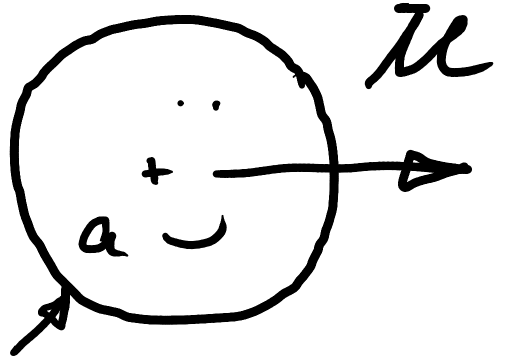
Zur Mobilität (Nernst-Einstein-Gleichung)

$$\boxed{\nu := \frac{u}{F_0} = \frac{1}{6\pi\eta a} = \frac{kT}{D} \sim \frac{RT}{D}}$$

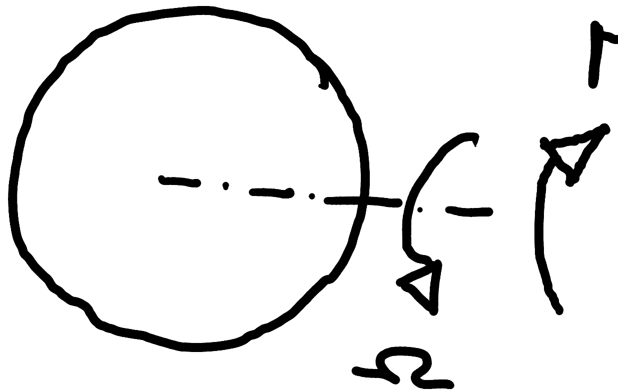
$$\frac{F_0}{u} = 6\pi\eta a$$

Literatur: Schleichende Strömung Bachelor: Fluid Mechanics

Happel, Brenner: Low Reynolds-number Hydrodynamics



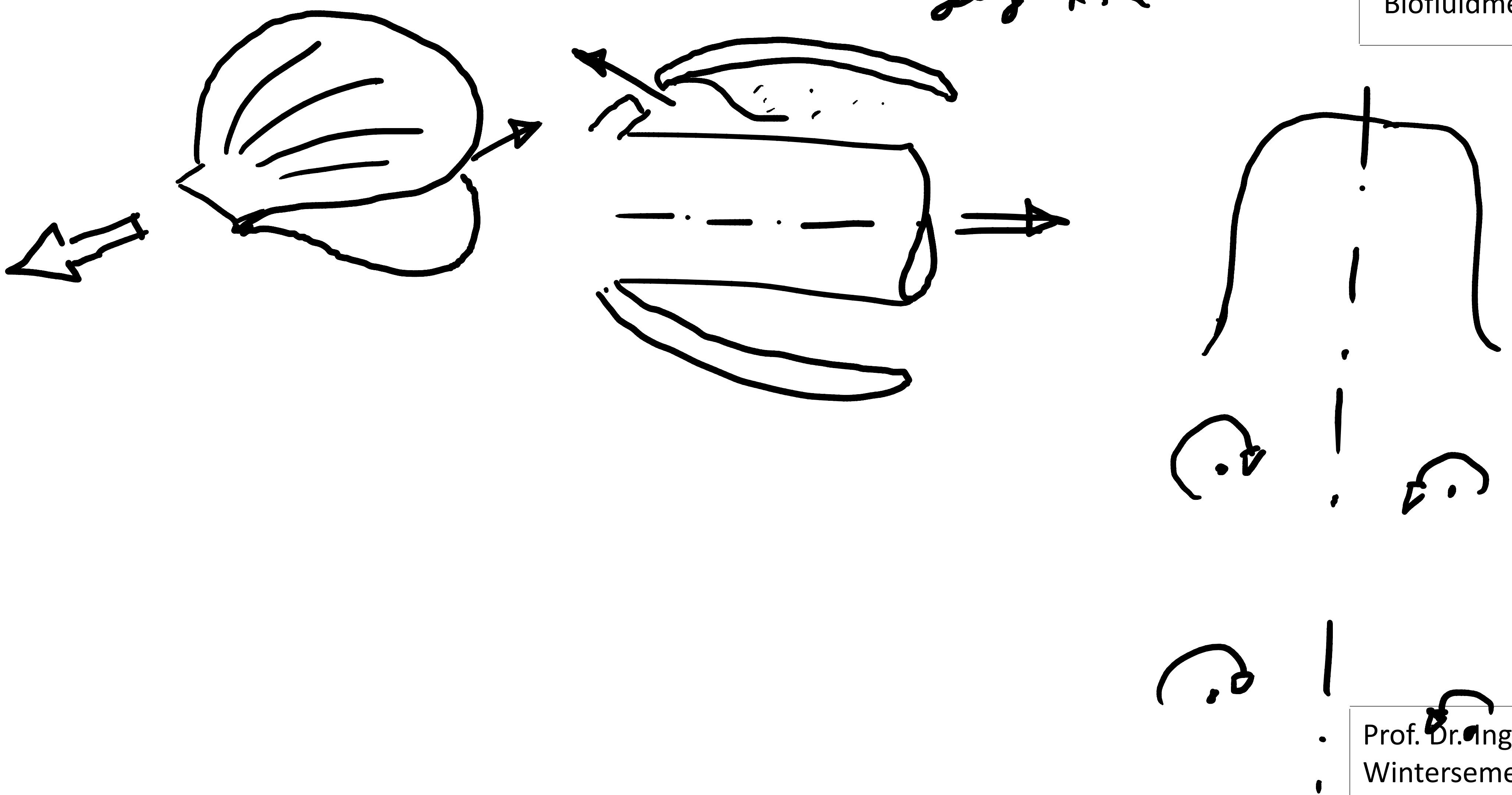
$$F_0 = 6\pi\eta U a$$



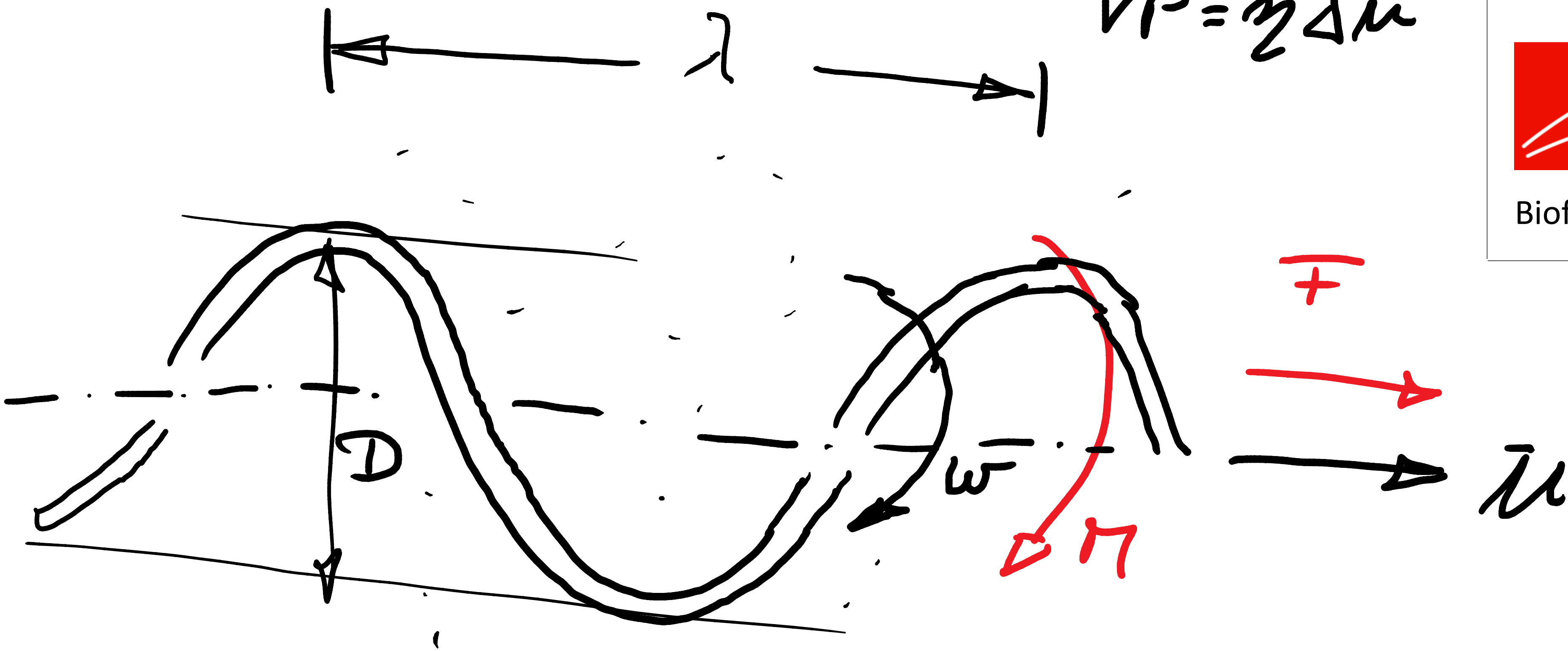
$$M_0 = 8\pi\eta\,\Omega a^3$$

Fortbewegung der Muscheln, Tintenfisch, Qualle...

Meduse
Jelly Fish



$$\nabla p = \eta \Delta \vec{u}$$



Arbeitsmaschine, d.h. $\vec{M}\cdot\vec{\omega} > 0$

$\vec{F}\cdot\vec{u} > 0$

$$F = AU + B\Omega$$

$$M = CU + D\Omega$$

Wichtig: 1. Die Linearkombination folgt aus der Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit. (vgl. Purcell)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Biofluidmechanik

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix}$$

Propulsionsmatrix $\hat{=}$ Inverse der Mobilität.

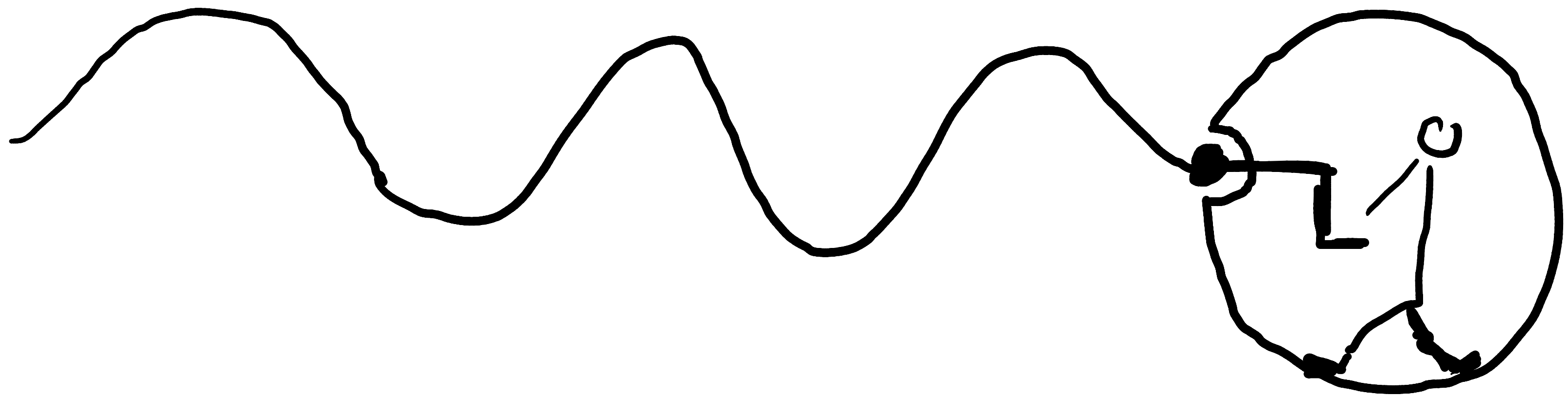
Besondere Eigenschaft:

Die Propulsionsmatrix ist symmetrisch, infolge Linearität $\nabla p = \eta \Delta \vec{u}$.

$$B \equiv C$$

Analog zur Begründung der Symmetrie von Steifigkeitsmatrizen (Satz von Betti oder Maxwellscher Vertauschungssatz)

A_0, D_0



Gleichgewicht

$$A_0 U = -AU - B\omega$$

$$D_0 \Omega = -BU - D\omega$$

$$\Omega_m := \omega - \Omega$$

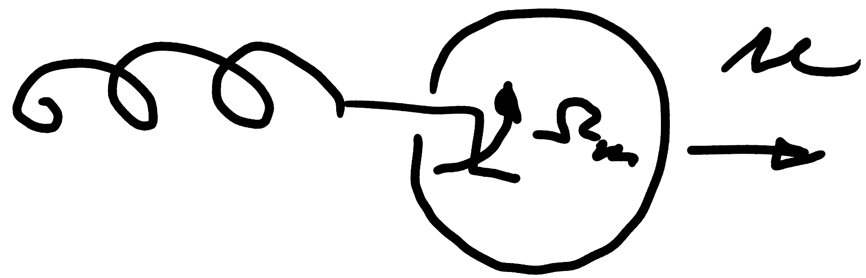
relativ Winkelgeschw.

$$A_0 = 6\pi a \eta$$

$$D_0 = 8\pi a^3 \eta$$

Auflösen nach $\underbrace{\mathcal{U}F_0}_{\text{Nutzen}}$ und $\underbrace{M\Omega_m}_{\text{Aufwand}}$; $\mathcal{U}$, M

$$\eta_{Fr} := \frac{\mathcal{U}F_0}{M\Omega_m}$$



$$\mathcal{U} = -\frac{B D_0}{(A_0+A)(D_0+D)-B^2}\,\Omega_m$$

$$\mathcal{U} \sim \Omega_m$$

$$M = \frac{B^2 - D(A_0+A)}{B}\,\mathcal{U}$$

Propulsionswirkungsgrad nach Froude.

$$\eta_{Fr} = \frac{A_0 D_0 B^2}{\left[(A_0+A)D - B^2\right]\left[(A_0+A)(D_0+D) - B^2\right]}$$

Zur Näherung:

$$\frac{D_0}{D_0 + D} \sim 1$$

$$B^2 << AD$$

$$\eta_{Fr} = \frac{A_0 B^2}{(A_0+A)^2 D}$$