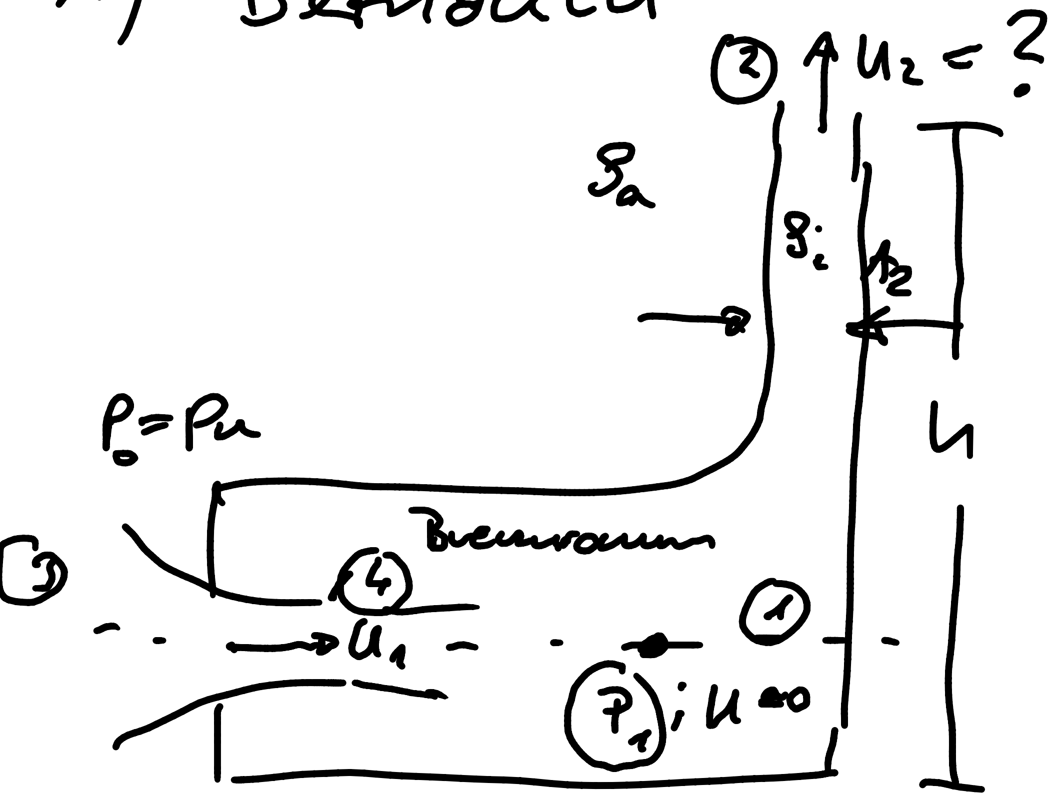
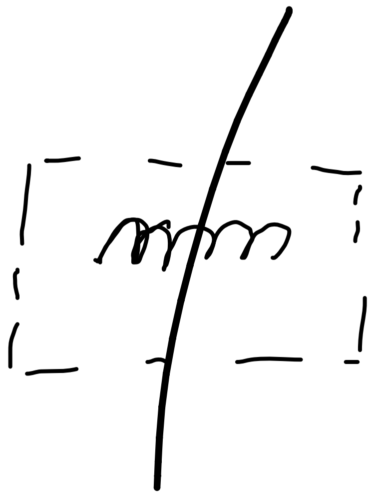
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

1) Bernoulli





pro kg Brennstoff werden L kg Frischluft benötigt

gefragt: u_2

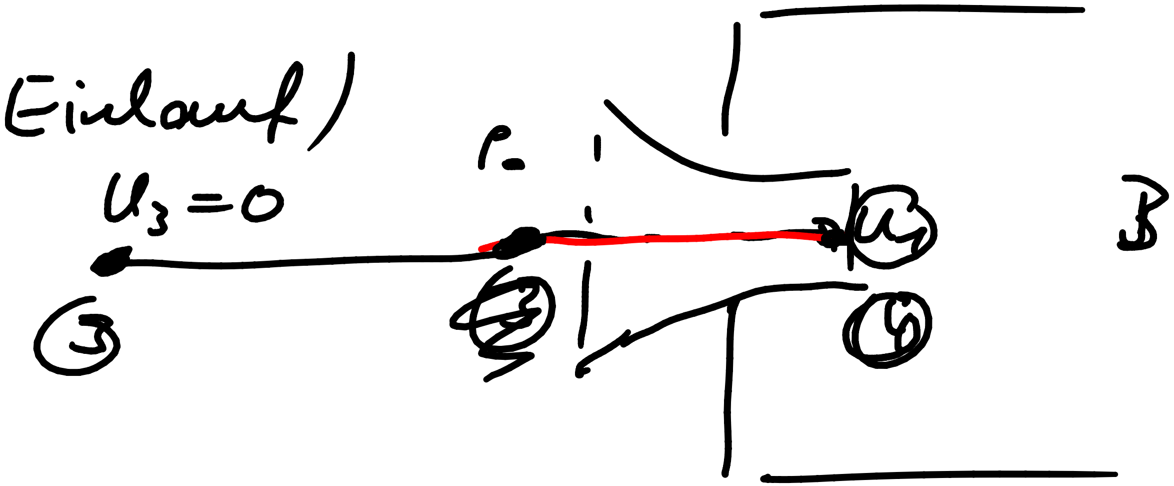
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Bernoulli

3 → 4 (Einlauf)



$\psi_3 = \psi_4$

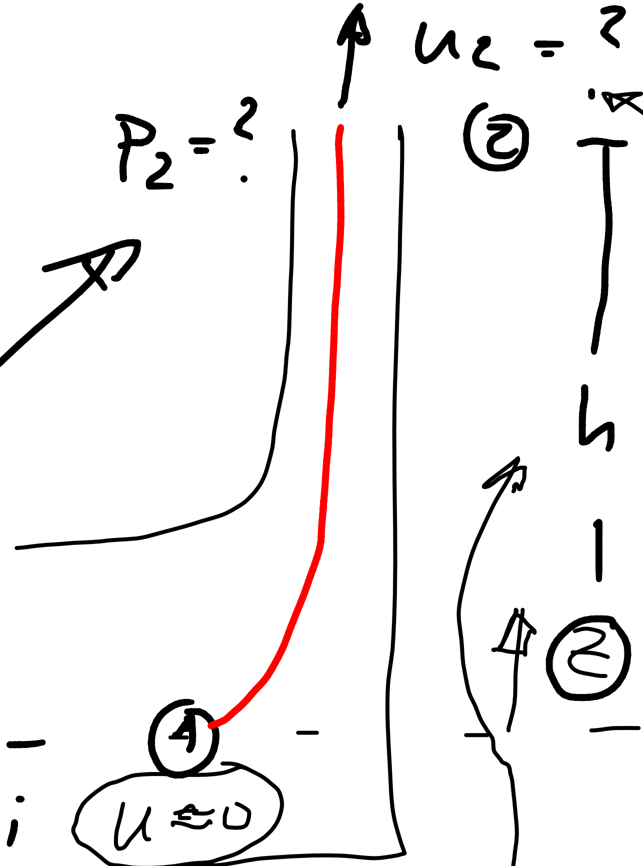
$$p_3 + \frac{\rho}{2}\cancel{u_3^2}^{\,0} + \cancel{\psi_3} = p_4 + \frac{\rho}{2}u_4^2 + \cancel{\psi_4} + \cancel{\int_3^4 \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, ds}^{\,0} + \cancel{\Delta p_v}^{\,0}$$

$$\boxed{p_0 = p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2} \quad (1)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Bernoulli ① → ②



$$p_1 + \frac{\varrho}{2} 0^2 + \varrho g 0$$

$$p_1 = p_2 + \varrho_i g h + \frac{\varrho_i}{2} u_2^2 \qquad (2)$$

$$p + \varrho g h = const$$

$$\Rightarrow p_2 = p_0 - \varrho g h \qquad (3)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\dot m_{ein} = \dot m_{aus} \quad \text{(Konti)}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot m_{ein} &= \dot m_{frisch} + \dot m_B \\ \dot m_{Frisch} &= L\, \dot m_{Brenn} \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\dot m_{frisch}}_{\rho_a u_1 A}\left(1+\frac{1}{L}\right) = \underbrace{\dot m_{aus}}_{\rho_i u_2 A_2}$$

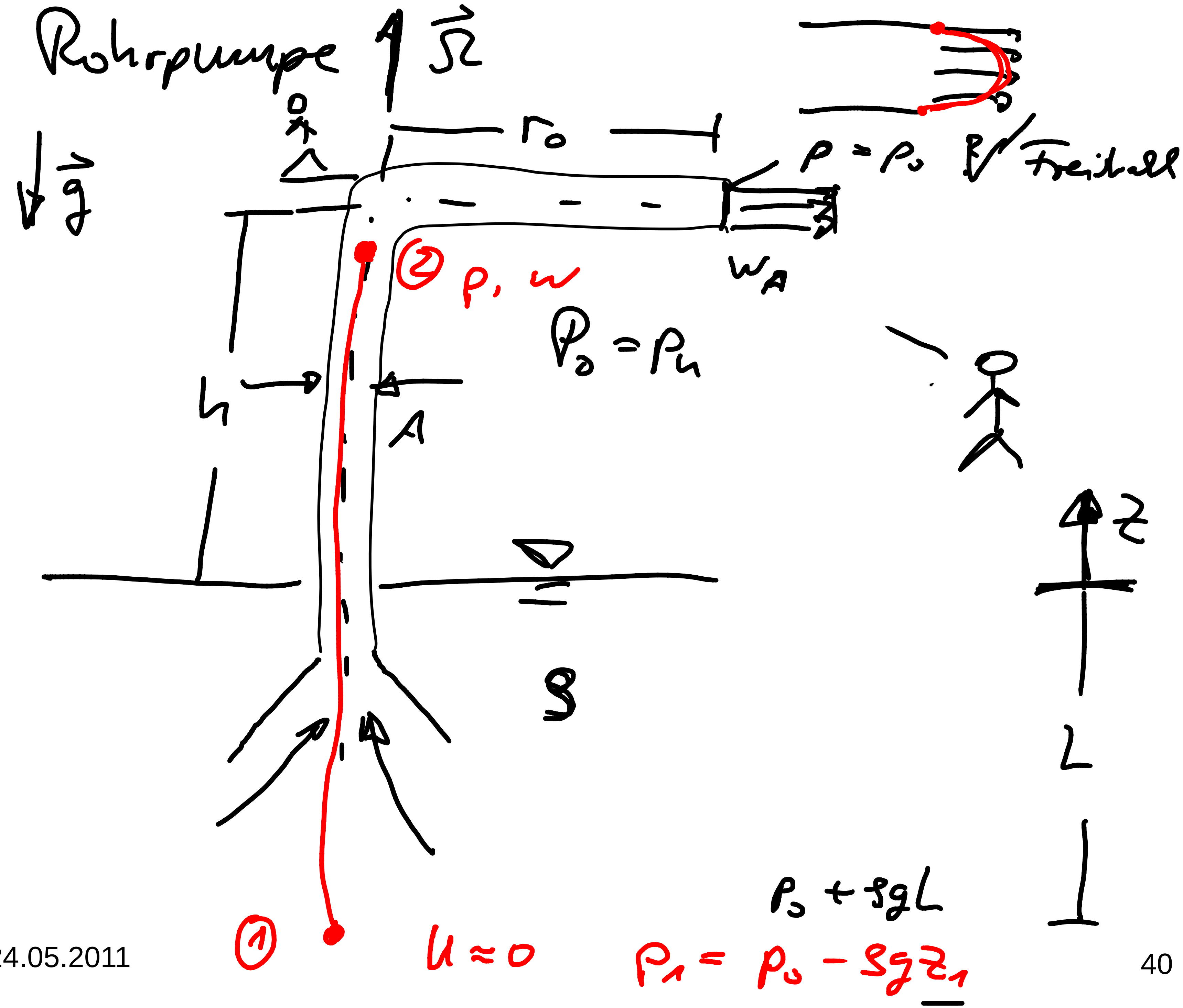
$$\Rightarrow u_1 = \frac{\rho_i u_2 A_2}{\rho_a A_1 \left(1+\frac{1}{L}\right)} \qquad (4)$$

⋮ Mathematik: Einsetzen der Gleichung

⋮

$$u_2 = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{\frac{\rho_a}{\rho_i}-1}{1+\frac{\rho_i}{\rho_a}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{L}{L+1}\right)^2}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die
Hydrodynamik
Vorrechenübung 5



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

1) Ω_{max} für p & p_D überall im Rohr

Bernoulli von ① → ②

$$p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2 + \psi_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}u_2^2 + \psi_2 + \cancel{\int_1^2 \rho \frac{\partial u}{\partial t} ds}$$

$\to 0$

$p_1 \downarrow p_0 - \rho g z_1$

$u_1 \downarrow 0$, sehr weit weg

$\psi_1 = \rho g z_1 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_1^2$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

$$p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 + \psi_1 = \underline{p} + \frac{\rho}{2} \underline{w}^2 + \psi_2$$

$$p_1 = p_0 - \rho \underline{g z_1}$$

$$\psi_2 = -\frac{\rho}{2} \Omega^2 \underline{r}^2 + \rho g \underline{z}$$

$$\psi_1 = -\frac{\rho}{2} \Omega^2 r_1^2 + \underline{\rho g z_1}$$

Einsetzen

$$\boxed{p(r,z) = p_0 - \frac{\rho}{2} \underline{w}^2 + \frac{\rho}{2} \Omega^2 \underline{r}^2 - \rho g \underline{z}}$$

$w = ?$ Kontigl $A w_1 = A w \Rightarrow w_1 = w$

RB $p(r = r_0, z = h) = p_0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

$$\Rightarrow \quad p_0 = p_0 - \frac{\rho}{2} w_A^2 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_0^2 - \rho g h$$

mit $\underbrace{r = r_0 \,, \; z = h}_{RB}$ $\qquad \underbrace{w_A = w}_{\text{Konti}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho}{2} w^2 = \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_0^2 - \rho g h$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{p(r,z) = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 \underbrace{(r^2 - r_0^2)}_{<1:\; r=0} + \rho g \underbrace{(h - z)}_{0,\; z=h}}$$

$$p_{min} = p(r=0, z=h) = p_0 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_0^2 \overset{!}{>} p_D$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

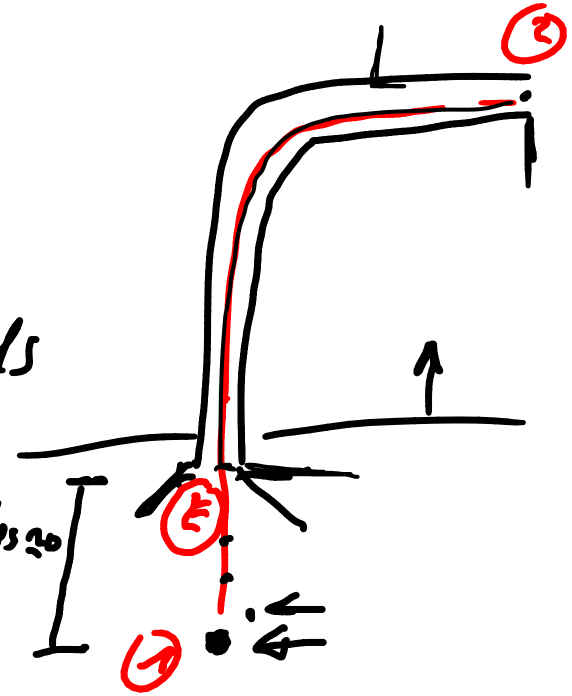
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Auflösen nach ~~Q~~ Ω:

$$\Omega < \sqrt{\frac{2(p_0 - p_D)}{\rho r_0^2}}$$

② $b(t)$ für Öffnen des Rohres

bei $t = 0$



$$p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 + \psi_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2 + \psi_2 + \int \rho \frac{\partial w}{\partial t} ds$$

$$\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} ds \approx 0$$

$$\underbrace{\rho g z_1 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 r_1^2}_{\psi_1} + \frac{\rho}{2} w_1^2 + p_1$$

$$= \rho \int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + p_2 + \rho g h - \frac{\rho}{2} \Omega^2 r_0^2 + \frac{\rho}{2} w_2^2$$

Argument: Aufgrund der sehr geringen Geschw. zwischen ① und Ⓔ liefert das das Integral $\int_1^E \cdot ds$ nur einen sehr geringen Anteil

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

$$\varrho \frac{dw_A}{dt}\int_E^2 1\,ds + p_0 + \varrho g h - \frac{\varrho}{2}\Omega^2 r_0^2 + \frac{\varrho}{2} w_A^2 = p_0$$

$w_2 = w_A$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dw_A}{dt} = b(t) = \frac{1}{2L}\left(\Omega^2 r_0^2 - 2gh - w_A^2\right)}$$

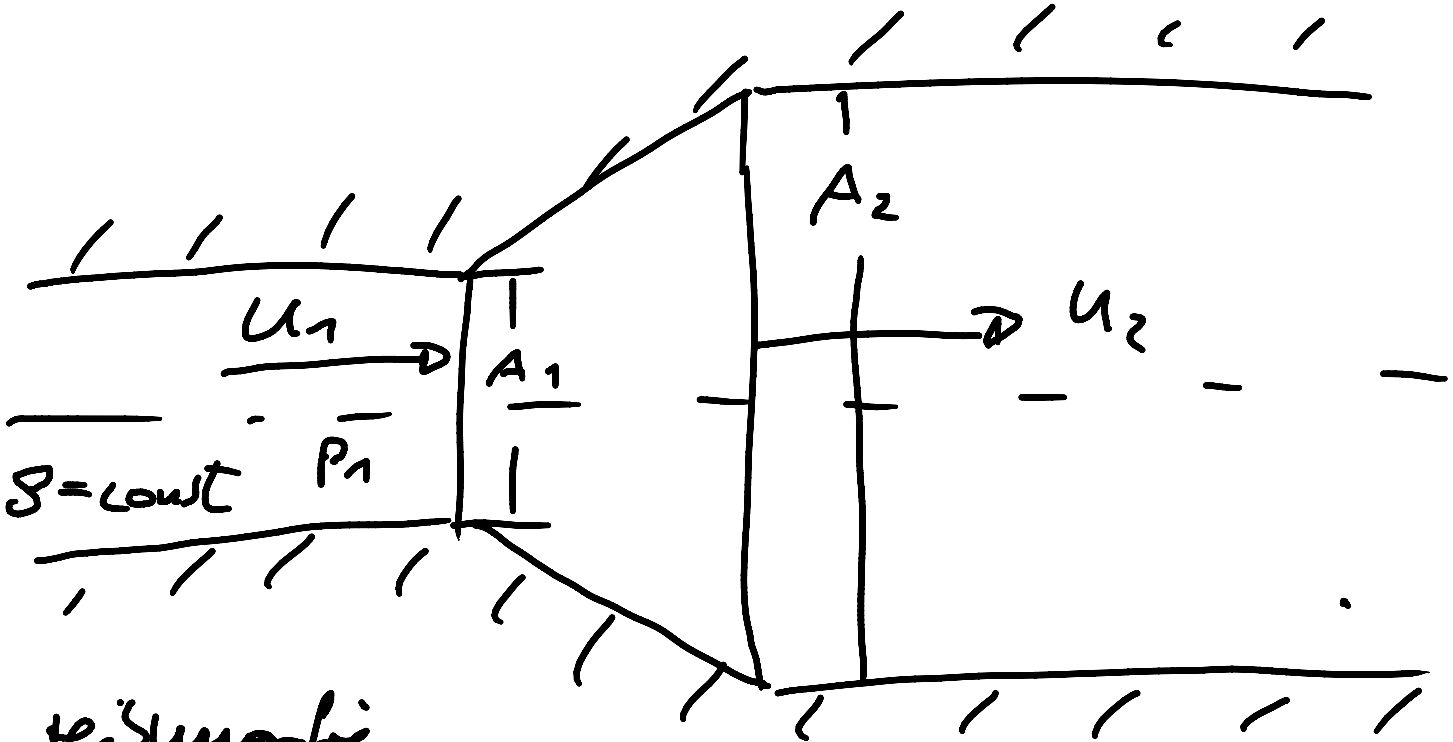
$$b(t=0) = \frac{1}{2L}\left(\Omega^2 r_0^2 - 2gh\right)$$

mit $\underline{\underline{w_A(t=0) = 0}}$

3 min Pause

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Impulssatz



leistungsfrei
+
inkompressibel

1) u_2 ?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

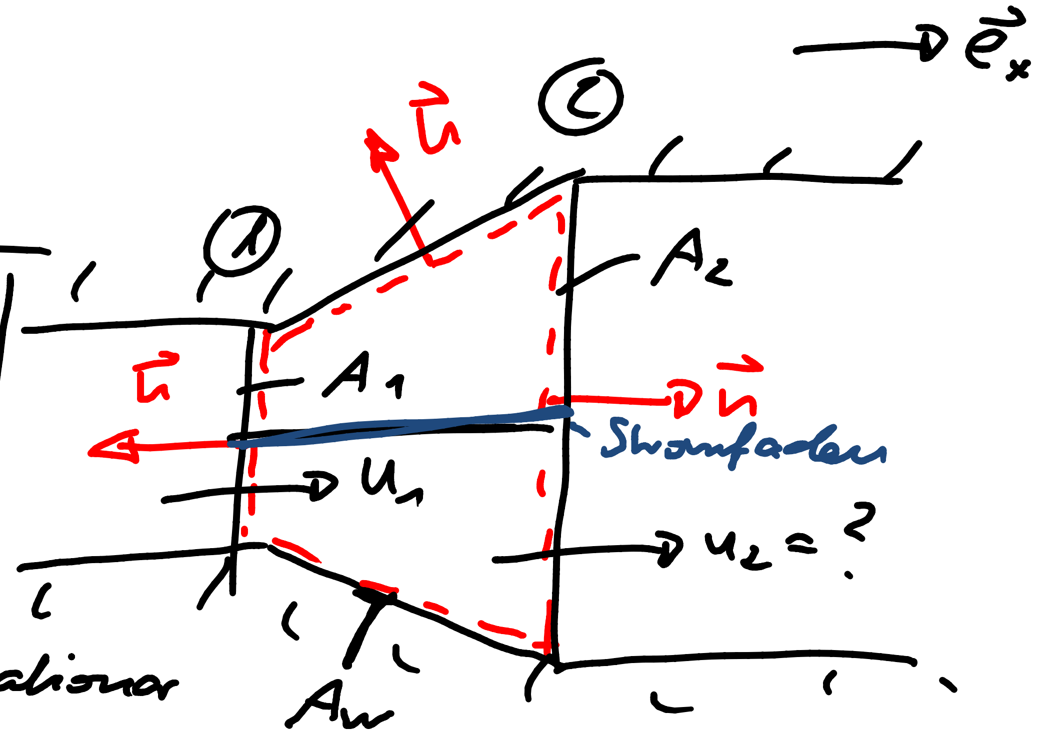
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Kontigl:

$$\boxed{\text{Konti: } u_1 A_1 = u_2 A_2}$$



$$\iiint_V \underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{0,\ \text{stationär}} dV + \oint_S \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{A_1} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{-u_1} dS + \iint_{A_2} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{u_2} dS + \iint_{A_W} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{0} dS = 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

$$\iint_{A_1} \varrho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = -\varrho A_1 u_1$$

$$\Rightarrow \quad -\varrho A_1 u_1 + \varrho A_2 u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1}}$$

(2) p_2 am Austritt ?

$\Rightarrow$ Bernoulli (1) $\rightarrow$ (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Bernoulli ① → ②

$$p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2 + \rho g z_1 = \underline{p_2} + \frac{\rho}{2}u_2^2 + \rho g z_2$$

① e.s

Konti

① R.S

$z_1 = z_2$ 0.5

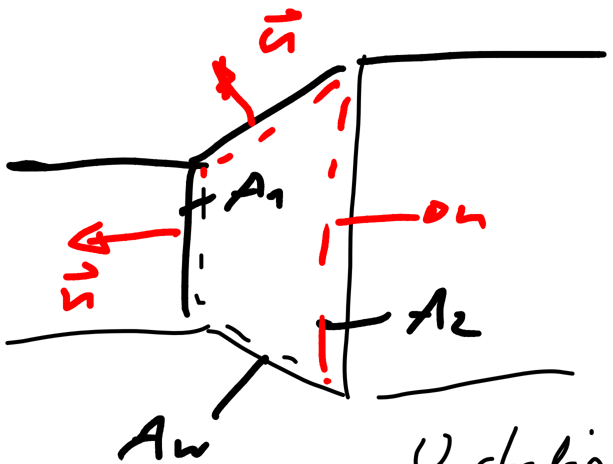
$$\Rightarrow \underline{\underline{p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]}}$$ ①

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

③ welche axiale Kraft $\underline{F_x}$ wird von der Strömung auf den Diffusor ausgeübt



0, stationär

$$\iiint_V \cancel{\frac{\partial(\rho\vec u)}{\partial t}} dV + \oint_S \rho \vec u (\vec u\cdot\vec n)\, dS = \oint_S \vec t\, dS + \iiint_V \cancel{\rho \vec k}\, dV$$

0

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\Rightarrow \iint_{A_1} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \iint_{A_2} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \iint_{A_w} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS$$

$$= \iint_{A_1} \vec{t}\,dS + \iint_{A_2} \vec{t}\,dS + \iint_{A_w} \vec{t}\,dS$$

$$= \vec{F}_{\to Fl}$$

$$= -\vec{F}_{\to Diffusor}$$

$$\boxed{\iint_{A_1} \vec{t}\,dS = \iint_{A_1} \underline{-p\vec{n}}\,dS}$$

analog für A_2

$A_1: \vec{n} = -\vec{e}_x$

$A_2: \vec{n} = \vec{e}_x$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

Multiplikation mit $\vec{e}_x$

$$\iint\limits_{A_1} \rho \vec{u}(\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{-u})\, dS \cdot \vec{e}_x + \iint\limits_{A_2} \ldots dS\cdot\vec{e}_x + \iint\limits_{A_W} \ldots dS \cdot \vec{e}_x$$

$$= \iint\limits_{A_1} -p\, \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{e}_x}_{-1}\, dS + \iint\limits_{A_2} -p\, \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{e}_x}_{1}\, dS - \vec{F}_{\to Diff}$$

$$= p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{x \to Diffusor}$$

$$\iint\limits_{A_1} \rho \vec{u}(\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}})\, dS \cdot \vec{e}_x$$

$$\rho \quad -u\, u\, A_1$$

$$-\rho u_1^2 A_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 5

$$\iint \rho \vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\cdot\vec{e}_x\, dS$$

$$\Rightarrow \overbrace{-\rho u_1^2 A_1}^{A_1} + \rho u_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{x \to Diff.}$$

$\Rightarrow$ Umstellen + Einsetzen von u_2 und p_2

$$\Rightarrow F_{x \to Diff} = \rho u_1^2 A_1 \left[2 - \frac{A_1}{A_2} - \frac{A_2}{A_1} \right] + p_1 (A_1 - A_2)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz