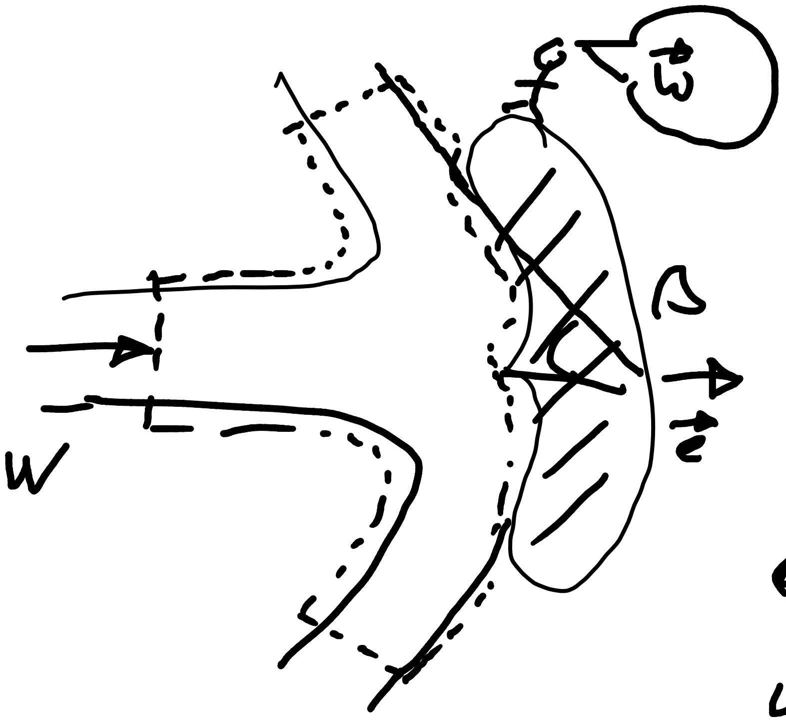


$\vec{w} = \vec{c} - \vec{u}$

Kraft

$F = \rho w^2 h (1 + \cos\beta)$

Leistung die an der Schaufel verrichtet wird.

$P = \vec{F} \cdot \vec{u}$

$\vec{u} = R\Omega\vec{e}$

Translationsgeschw. der Schaufel.

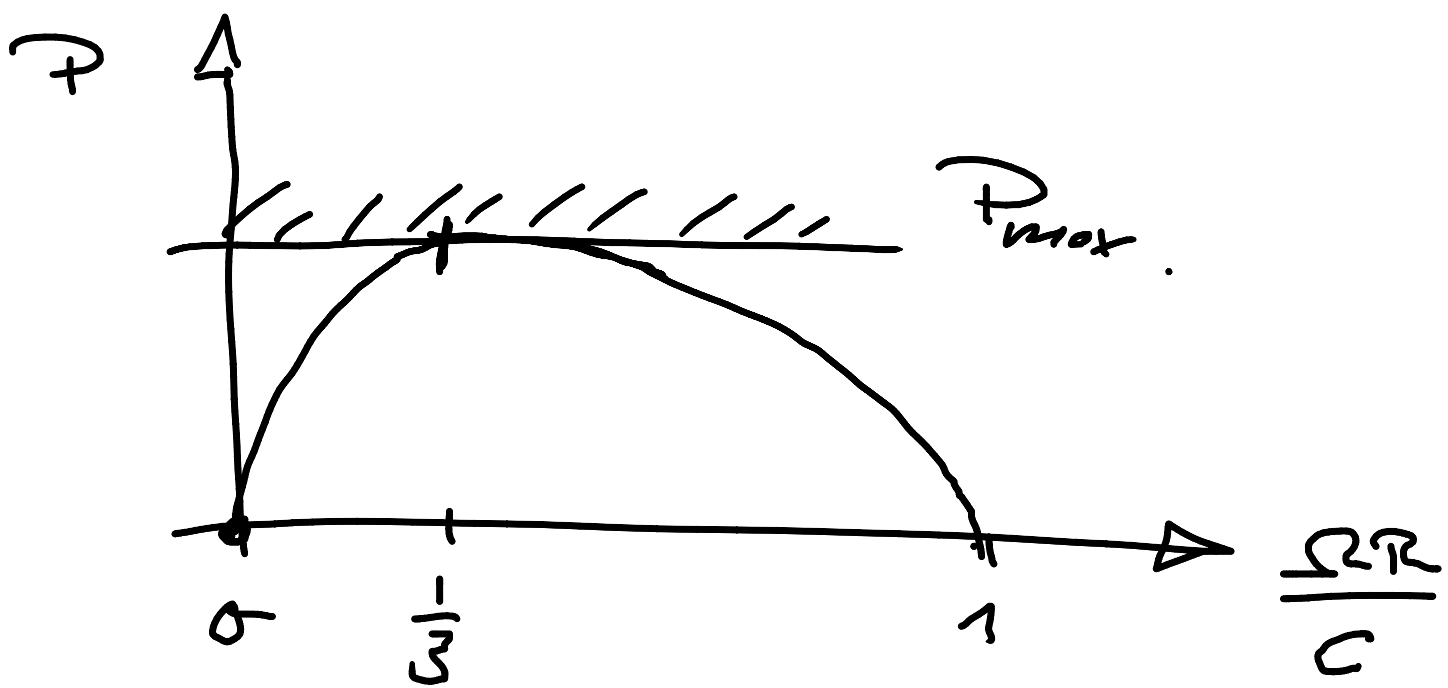
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$\Omega \equiv 0 \rightsquigarrow P \equiv 0.$$

$$c = \Omega R \rightsquigarrow W \equiv 0 \rightsquigarrow P \equiv 0$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

Herleitung Bernoullische Gleichung im Absolutsystem

$\boxed{\text{Geschw. } \vec{u}}$

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}$$

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV = \oint_S \vec{t}\, dS + \int_V \rho \vec{k}\, dV.$$

Für rotationsfreie und/oder reibungsfreie Strömung ist $\vec{t} = -p\vec{n}$

$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}$ $\quad \underset{\sim}{T}$ Spannungstensor

$= -p\vec{n} + \vec{n} \cdot \underset{\sim}{P}$ $\quad \underset{\sim}{P}$ Reibungsspannungstensor

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\int_V \rho \frac{D\vec{c}}{Dt}\, dV = \int_V -\nabla p \, dV + \int_V \rho \vec{k} \, dV$$

$$\int_V \underbrace{\rho \frac{D\vec{c}}{Dt} + \nabla p - \rho \vec{k}}_{\equiv 0} \, dV \equiv 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{D\vec{c}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k}}$$

Eulergleichung:

Differentielle Impulsbilanz für ein Flüssigkeitsteilchen in reibungsfreier Strömung.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underset{\sim}{T} + \rho \vec{k}$$ Cauchy-Gleichung.

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

$\tau \;\hat{=}\; \underset{\sim}{P} = 2\eta \underset{\sim}{E}$ Materialgesetz für eine Newtonsche Flüssigkeit $\Big\}\; \tau = \eta \dot{\gamma}$

$\underset{\sim}{P}$ Reibungsspannungstensor

η dynamische Viskosität

$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^{T}\right)$ Deformationsgeschwindigkeitstensor.

$\hat{=}\; \dot{\gamma}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k} + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{u})}$$

Navier-Stokessche Gleichung.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

Zusammenfassung

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underset{\sim}{T}$$

Cauchy

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + 2\eta \underset{\sim}{E}$$

Euler

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} - \nabla p$$

→ Bernoulli

Navier Stokes'sche Gl.

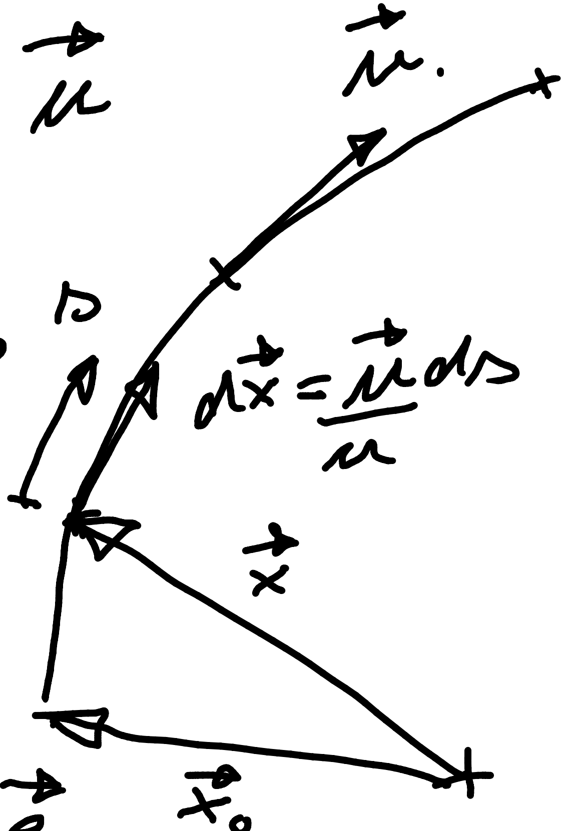
$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} - \nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{u})$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

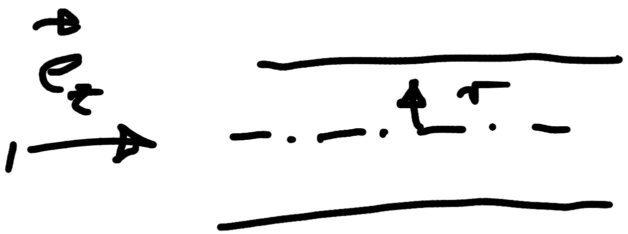
Herleitung Bernoulli aus der Eulergleichung.

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} - \nabla p} \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \vec{k} - \frac{\nabla p}{\rho}$$



$$d\vec{x} = \frac{\vec{u}}{u}\, ds$$

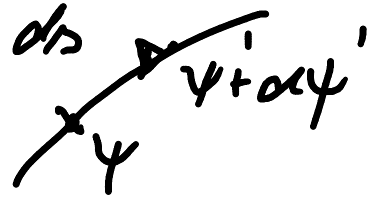


$$\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_z$$

$$\rightsquigarrow \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = 0,$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Skalare Multiplikation der Gleichung ds mit einem Element der Stromlinie



$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{u}, \quad \text{mit } u = |\vec{u}|$$

$$\underbrace{\vec{u}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \underbrace{\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})} = \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{k}} - \underbrace{\vec{u}\cdot\frac{\nabla p}{\rho}}$$

$$\cancel{u}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \cancel{u}\frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad -\cancel{u}\,d\psi' \qquad \cancel{u}\frac{dp}{\rho}$$

$d\psi$ Änderung von ψ längs ds

$$\vec{k} = -\nabla\psi'$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

Integration längs der Stromlinie

$$\boxed{\int \frac{\partial u}{\partial t}\,ds + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \psi' = \text{const.}}$$

Bernoullische Gleichung im rotierenden System $\vec{w}$

$$\int \frac{\partial w}{\partial t}\,ds + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \underbrace{gz - \frac{1}{2}\left(\Omega^2 r^2\right)}_{\psi'} = C$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

Im rotierenden System ~~arbeitet~~ gilt die Relativgeschw. $\vec{w} = \vec{c} - \vec{u}$.

Rotierendes System ist kein Inertialsystem, sondern ein beschleunigtes System.

⇝ Zusätzliche Beschleunig. / Kräfte.

$\boxed{\text{Zentrifugal} \quad \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{x}$$

Führungsbeschl. $\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt}$

Coriolisbeschl. $\underline{2\vec{\Omega} \times \vec{w}}$.

wird noch hergeleit.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

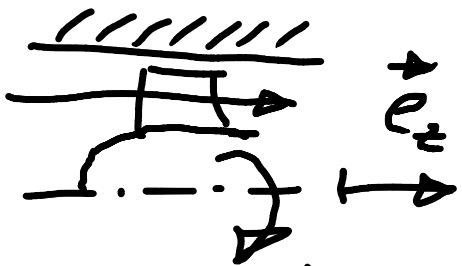
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Drallsatz. ⇝ Strömungsmaschine.



Die zeitliche Änderung des Dralls eines materiellen Körpers ist gleich dem Moment auf den Körper.

$$\frac{D}{Dt}\vec D = \vec M \quad \Big| \cdot \vec e_z$$

$$P = \vec M_{F \to L} \cdot \vec \Omega = M_{z,\,F \to L}\,\Omega$$

$$\vec \Omega = \Omega\,\vec e_z .$$

Nur die axiale Komponente ist für die Leistungsübertragung von Interesse.

$$\vec D = D_z \vec e_z + \underbrace{D_r \vec e_r + D_\varphi \vec e_\varphi}_{} .$$

→ Lärm Vorgaben.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$\vec{D} = \int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c}\, dV \neq \vec{x} \times \underbrace{\int \rho \vec{c}\, dV}_{\vec{I}}$$

gilt nur für den starren Körper.

$$\vec{M} = \oint_{S} \vec{x} \times \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{x} + \rho \vec{k}\, dV$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Die axiale Komponente

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} (\vec{x}\times\rho\vec{c})\cdot\vec{e}_z\,dV = \oint_{S} (\vec{x}\times\vec{t})\cdot\vec{e}_z\,dS + \int_{V} (\vec{x}\times\rho\vec{k})\cdot\vec{e}_z\,dV$$

Im Folgenden für eine rotierende Maschine.

$$\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad \text{Zylinderkoordinat.}$$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{c} = c_r\vec{e}_r + c_\varphi\vec{e}_\varphi + c_z\vec{e}_z$$

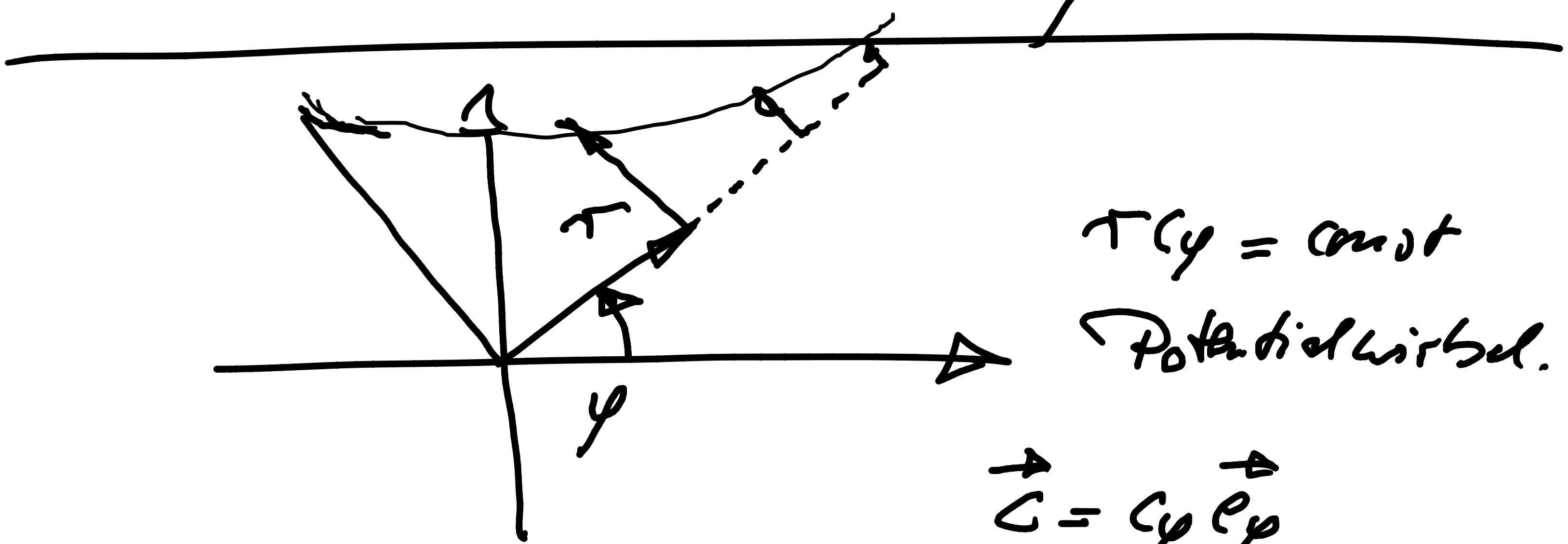
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$(\vec{x} \times \rho \vec{c}) \cdot \vec{e}_z = r c_\varphi \rho$$

Volumenspezifischer Drall eines Flüssigkeitsteilchens

$r c_\varphi \rho$

massenspez. Drall $\quad r c_\varphi$



$r c_\varphi = \text{const}$

Potentialwirbel.

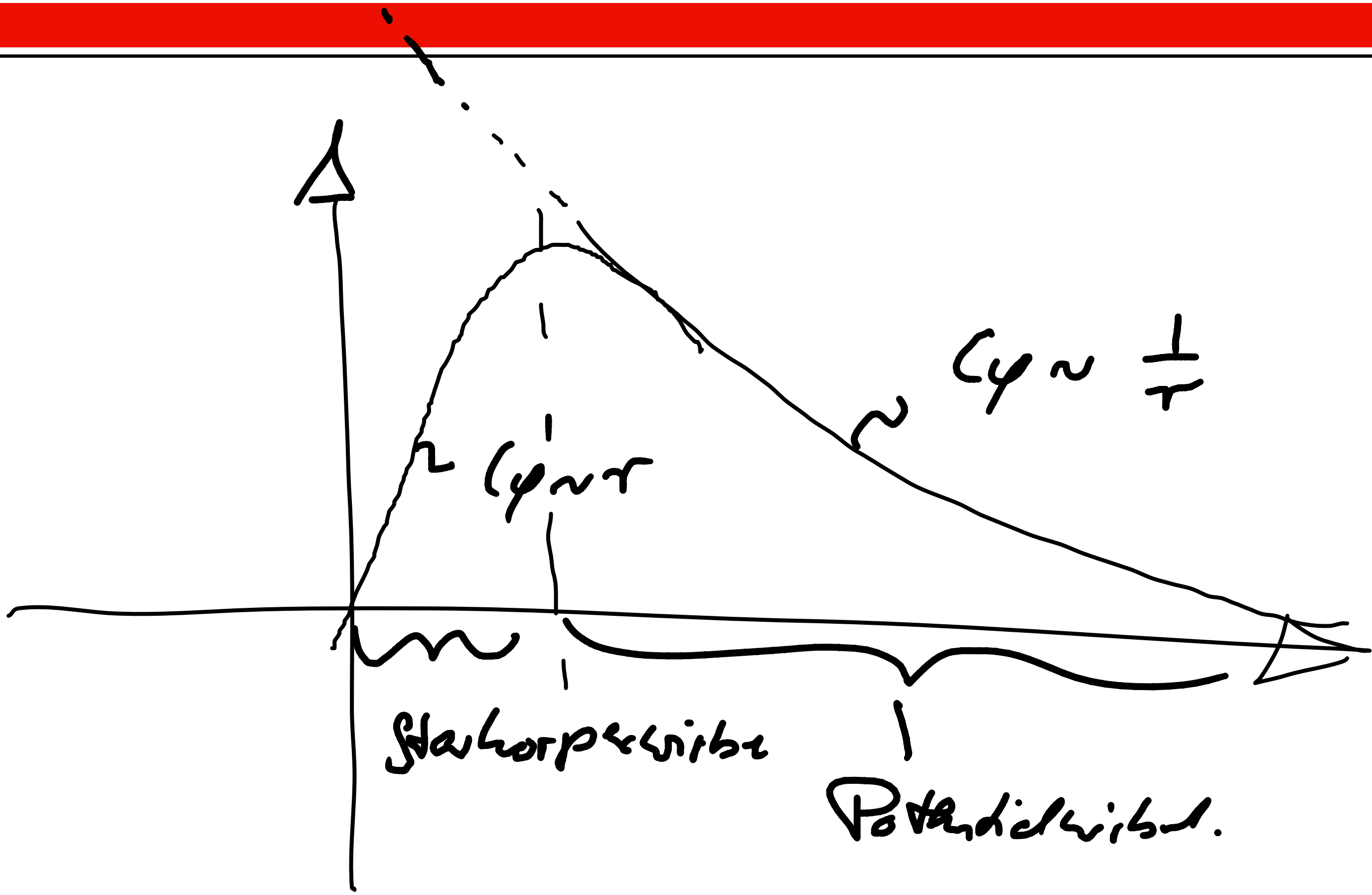
$\vec{c} = c_\varphi \vec{e}_\varphi$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

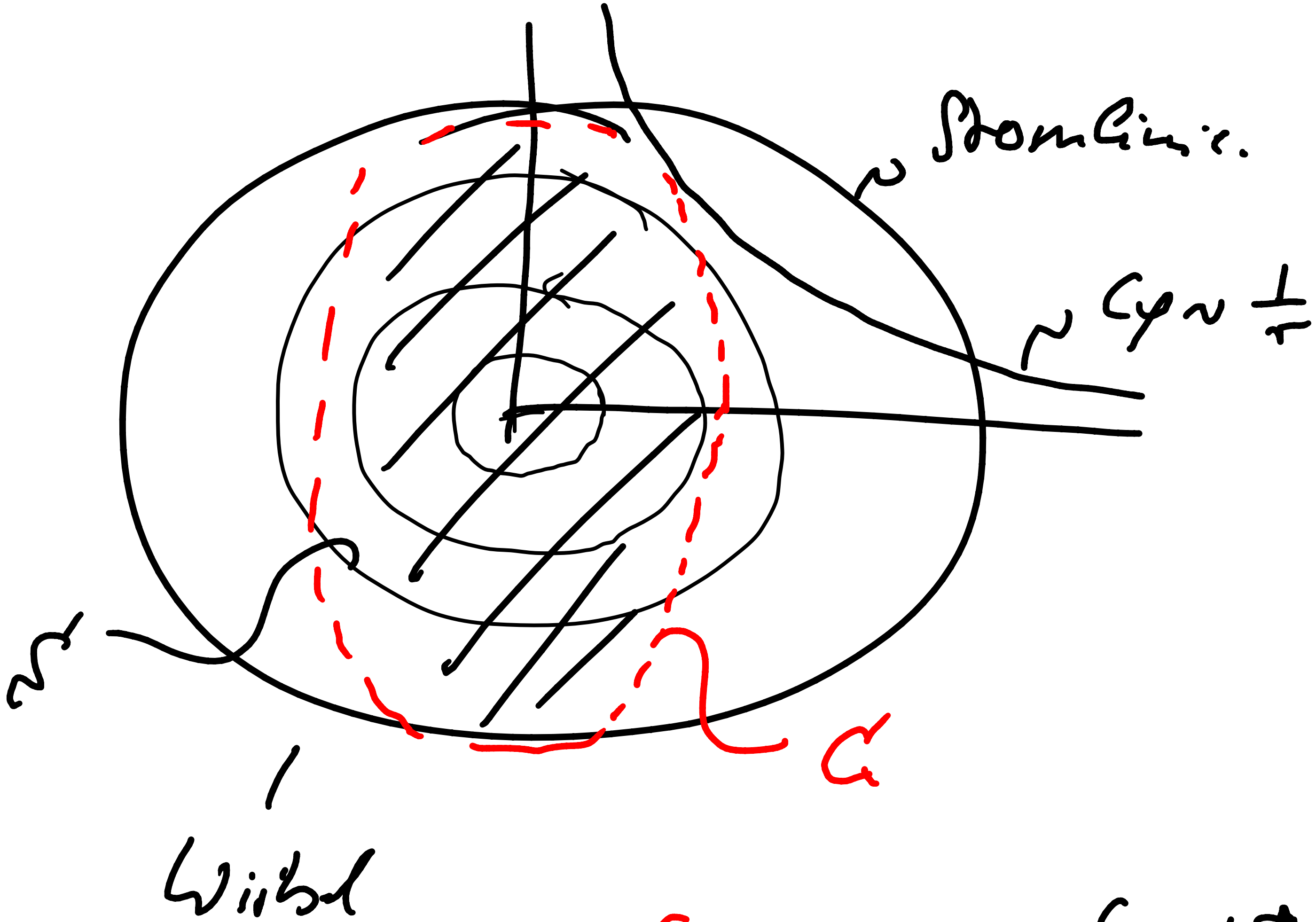


Stärke eines Wirbels wird in der Zirkulation bemessen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

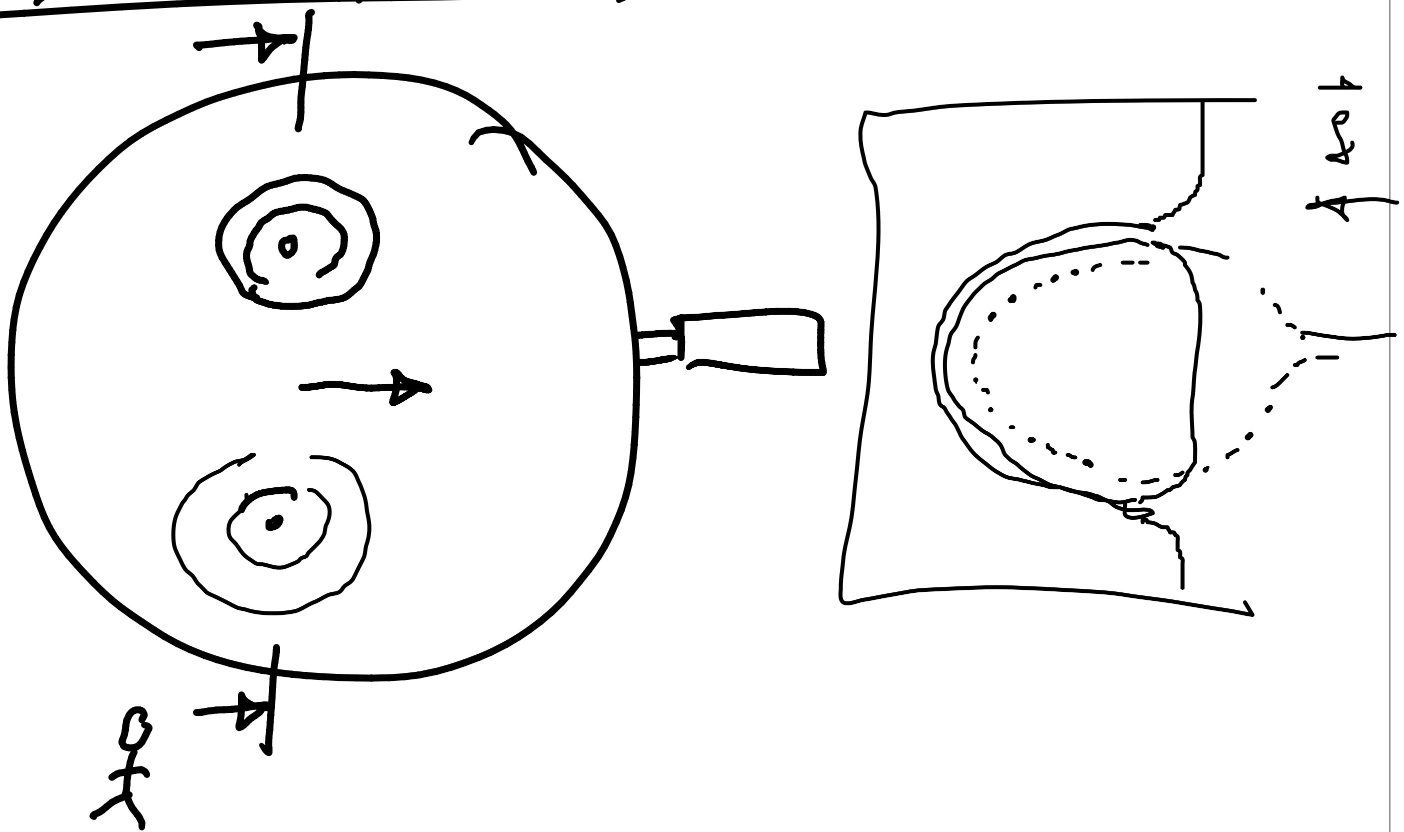


Zirkulation

$$\Gamma := \oint_C \vec{c} \cdot d\vec{x} = \int \underbrace{\operatorname{rot} \vec{u}}_{} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 2 \vec{\omega}$$

Wirbel in der Kaffeetasse



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$\rho \vec{k} \equiv 0$

$$\frac{D}{Dt}\int \rho c_\varphi r \, dV = \underbrace{\int_{S_{Schaft}} (\vec{x}\times\vec{t})\cdot\vec{e}_z \, dS}_{M_{z\,\text{Schaft}\to\text{Fl.}}} + \int_{A_1+A_2} (\;)\cdot\vec{e}_z \, dS'$$

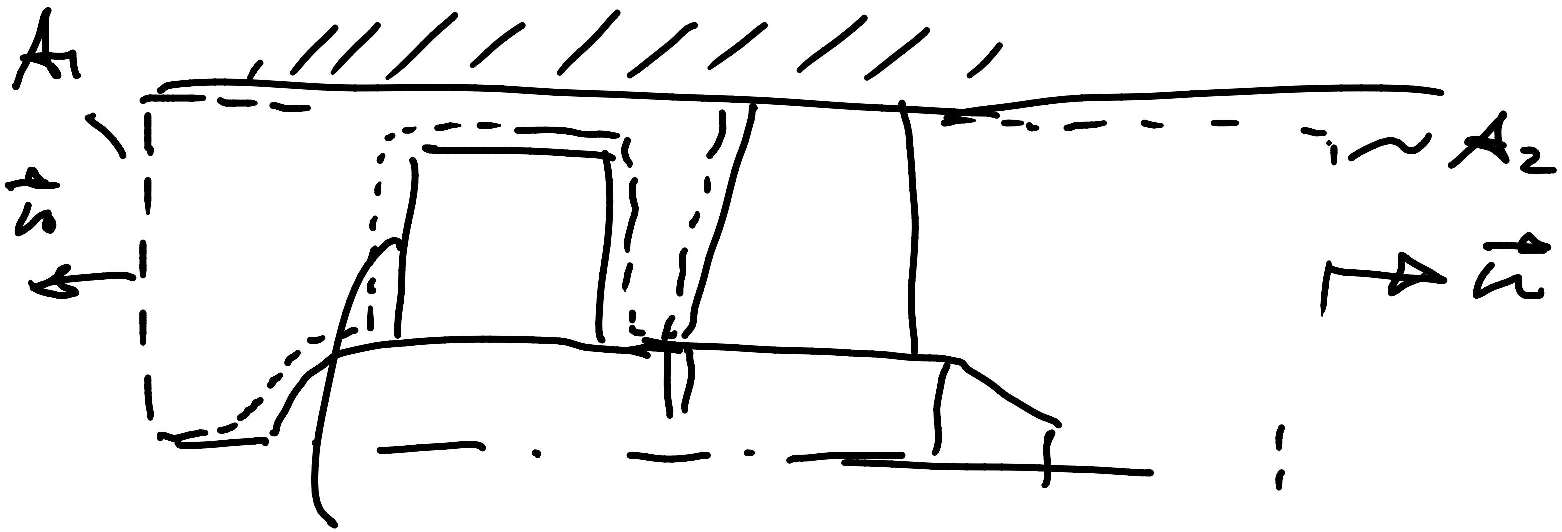
$$\equiv 0. \begin{cases} (\vec{x}\times\vec{t})\cdot\vec{e}_z = (\vec{x}\times -p\vec{n})\cdot\vec{e}_z \\ \vec{n}\perp\vec{e}_\varphi \text{ an} \\ \text{Eintrittsfl. } A_1 \text{ und Austrittsfl. } A_2 \end{cases}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, r\, c_\varphi \, dV = M_{z\,\text{Schaft}\to\text{Fl.}}$$



Schaft

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

stationäre Strömung im zeitlichen Mittel.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$\boxed{M_z = \dot m \left(r_2 c_{\varphi 2} - r_1 c_{\varphi 1} \right)}$$

Eulersche Turbinengleichung

Moment = Änderung des Drallflusses.

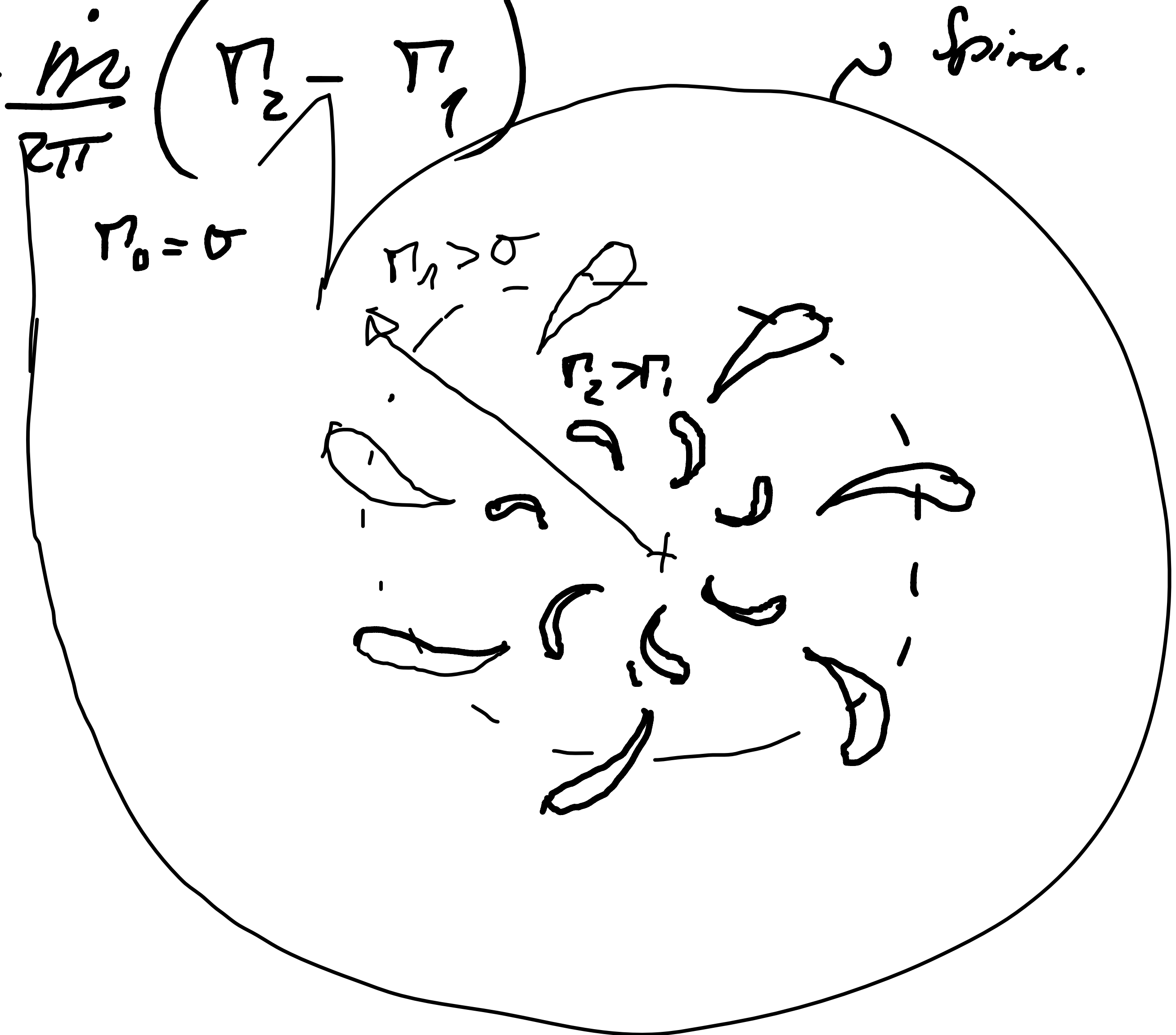
$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho c_\varphi r \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho c_\varphi r \, dV + \int c_\varphi r \, \rho \, \vec{c}\cdot\vec{n} \, dS$$

Umfang $\hat{=}$ „u" $\hat{=}$ „φ"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8

$$M_z = \frac{\dot{m}}{2\pi}\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)$$



$$\vec{M} \cdot \vec{\Omega} = P$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 8