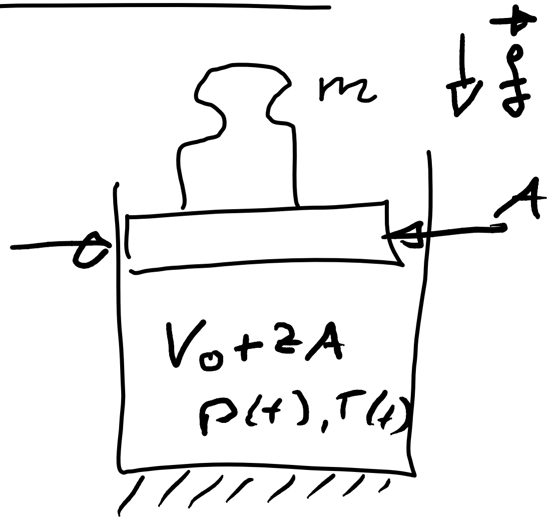
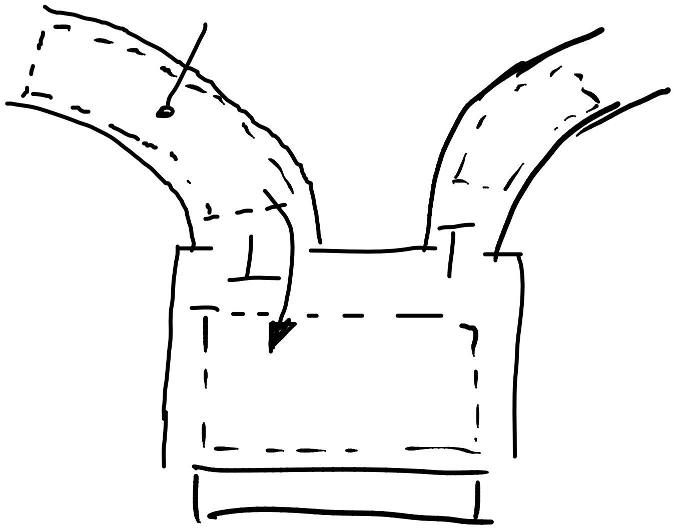
Eulersche Turbinengleichung

Druckspeicher



p_u

T_u

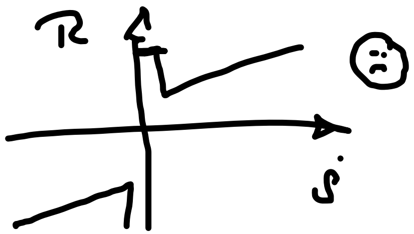


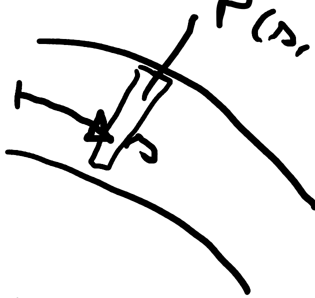
HYDROSTATIK

↳ zwei gewöhnliche DGL.

nichtlinear

$p = \underline{\underline{\rho}} R \underline{\underline{T}}$ } kein Problem





WELLENGLEICHUNG od.

CHARAKTERISTIKEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 18

Linearisierung über einen Störansatz

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$$

$$= \phi_0 \left[1 + \varepsilon f(t)\right]$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\varepsilon = \frac{\hat{z} A}{V_0}$$ Störungsparameter

Van Dyke: Perturbation Method,
Störungsrechnung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

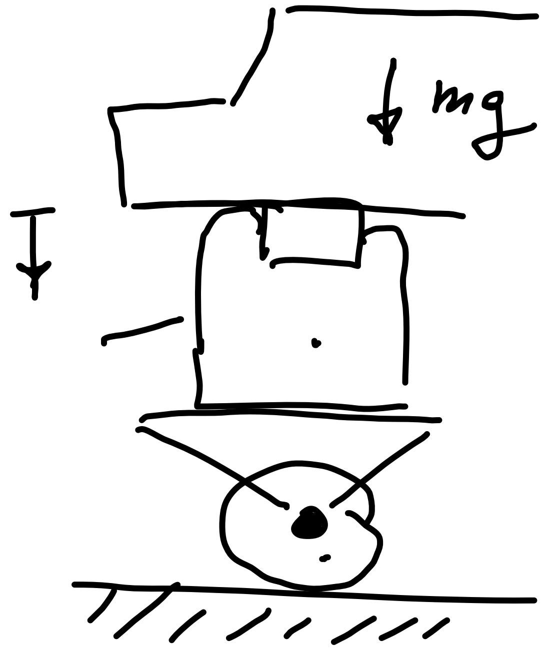
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wenn die Gleichungen linear sind.

$\rightsquigarrow$ Superposition

$$\hat{z} \sin \Omega t = z$$



$$\tilde{p} := p_0 \, p_+ \, e^{i \Omega t}$$

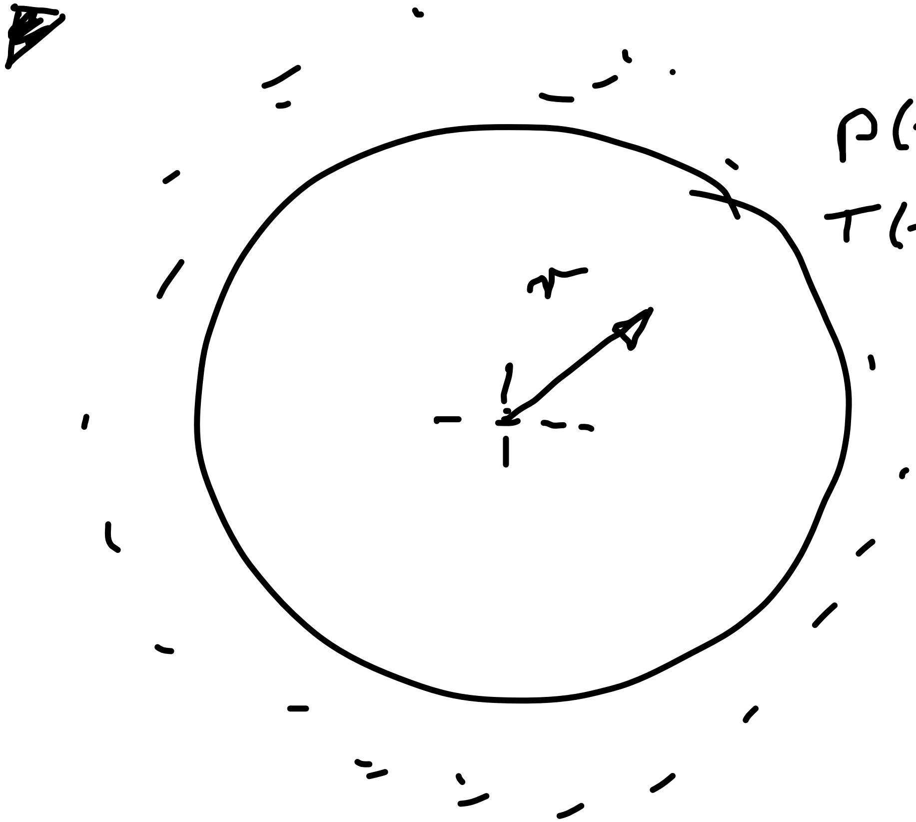
1. Definition einer dimensionslosen Größe

2. Rechnung nur mit der komplexen Amplitude.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



$$p(r,t) \qquad p = \hat{p}(r)\, e^{i\Omega t}$$

$$T(r,t) \qquad T = \hat{T}(r)\, e^{i\Omega t}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \Phi + \lambda \Delta T$$

1. Linearisierung über ein Störansatz
2. Komplexer Ansatz
3. Eigenwertproblem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

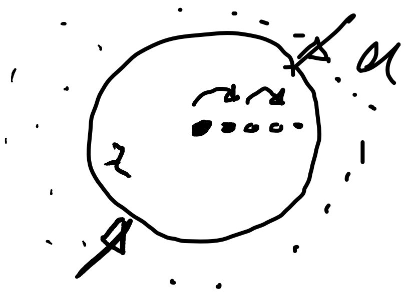
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

$$\varrho_+ + V_+ = 0 \qquad \text{Konti.}$$

$$P_+ + \gamma V_+ - i\gamma\frac{1}{\Omega\lambda}T_+ = 0 \qquad \text{Energie}$$

$$P_+ = \varrho_+ + T_+ \qquad \text{Gasgleich.}$$

$$\lambda := \frac{V_0\,\varrho_0\,c_p}{S_W'\,k_\lambda} \qquad \text{Thermische Relaxationszeit}$$



$$\frac{S_W'}{V_0} \quad \text{spezifische Oberfläche} \sim \frac{1}{a}$$

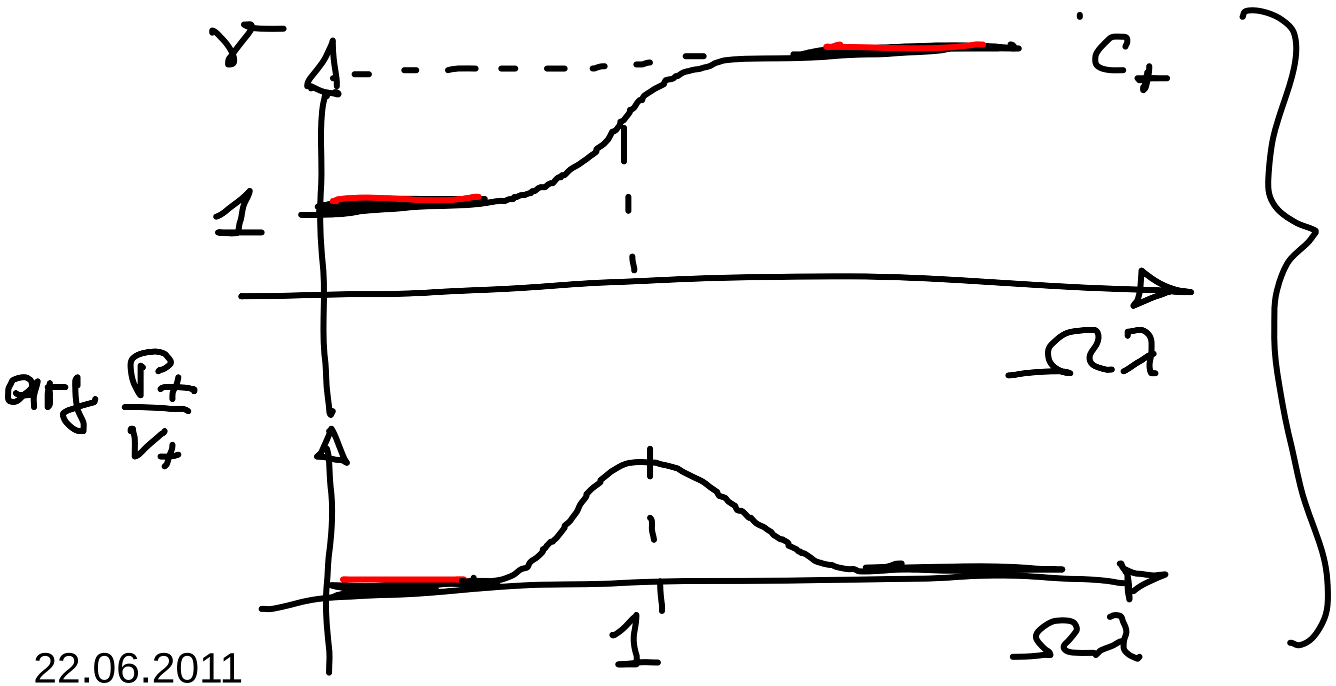
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

$$C_+ = \left|\frac{p_+}{V_+}\right| = \left| - \frac{1 + i\Omega\lambda}{1 + \frac{1}{\gamma} i\Omega\lambda}\right|$$

$$C_+ := \left|\frac{p_+}{V_+}\right| \sim \frac{1}{\varkappa_+}$$



Bode Diagramm.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

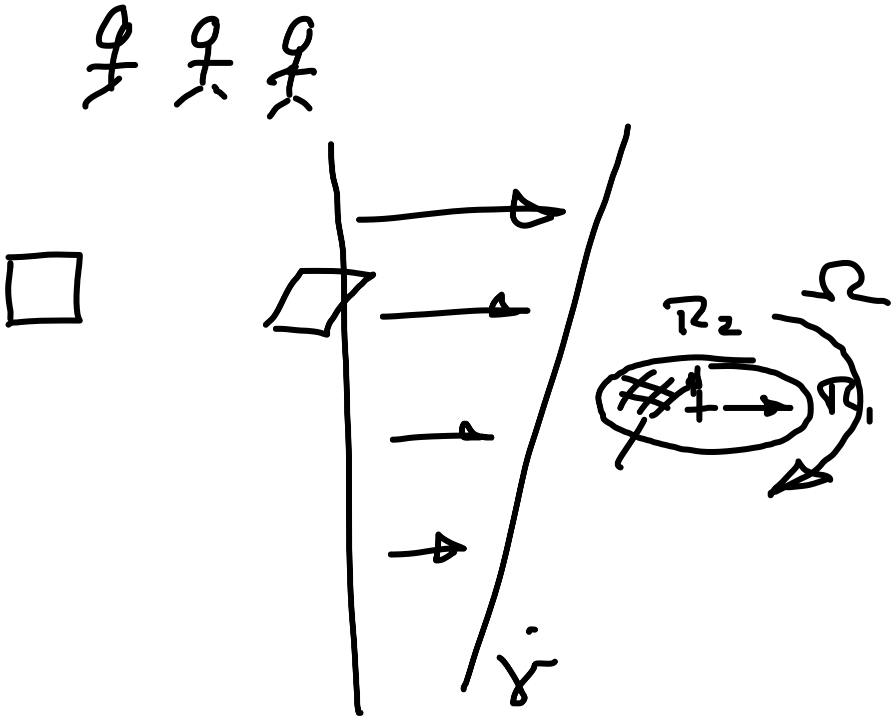
FLUID SYSTEM TECHNIK

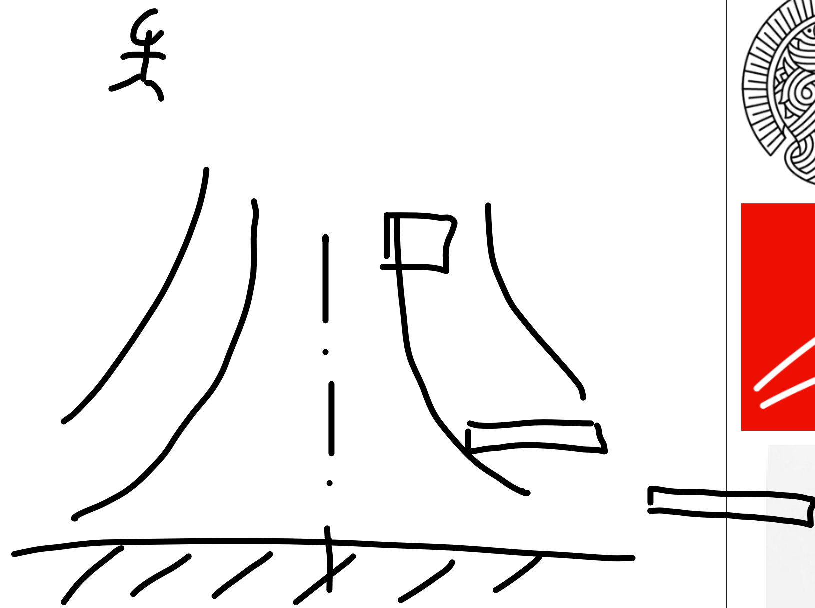
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

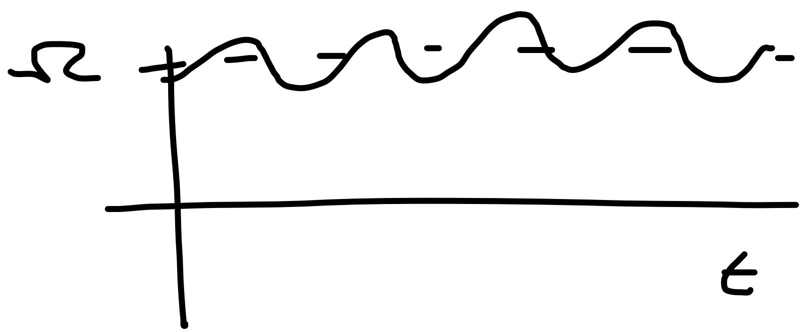
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 18





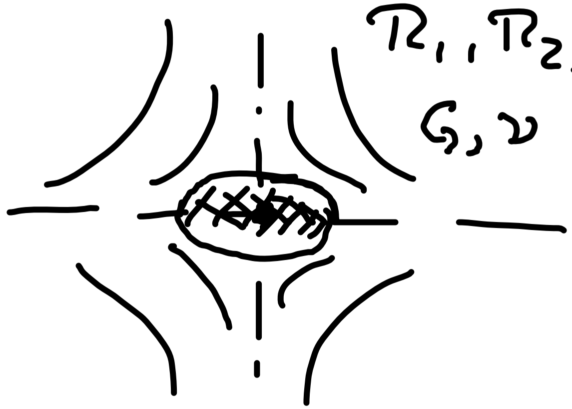
Scherströmung



Dehnströmung. α, ρ, η, p_t

$R_1, R_2,$

G, ν



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Drallsatz

$$\vec{D} := \int \vec{x} \times d\vec{I} \neq \vec{x} \times \int d\vec{I}$$

für deformierbare Medien.

Die zeitliche Änderung des Dralles eines Flüssigkeitskörpers ist gleich dem Moment auf den Körper.

Leonard Euler 1775

Axiom, d.h. unabhängig vom Impulssatz.

$$\int x \sin x \, dx \neq x \int \sin x \, dx$$

→ Für im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen folgt aus dem allgemeinen Drallsatz die sog. Eulersche Turbinengleichung (Axiale Komponente)

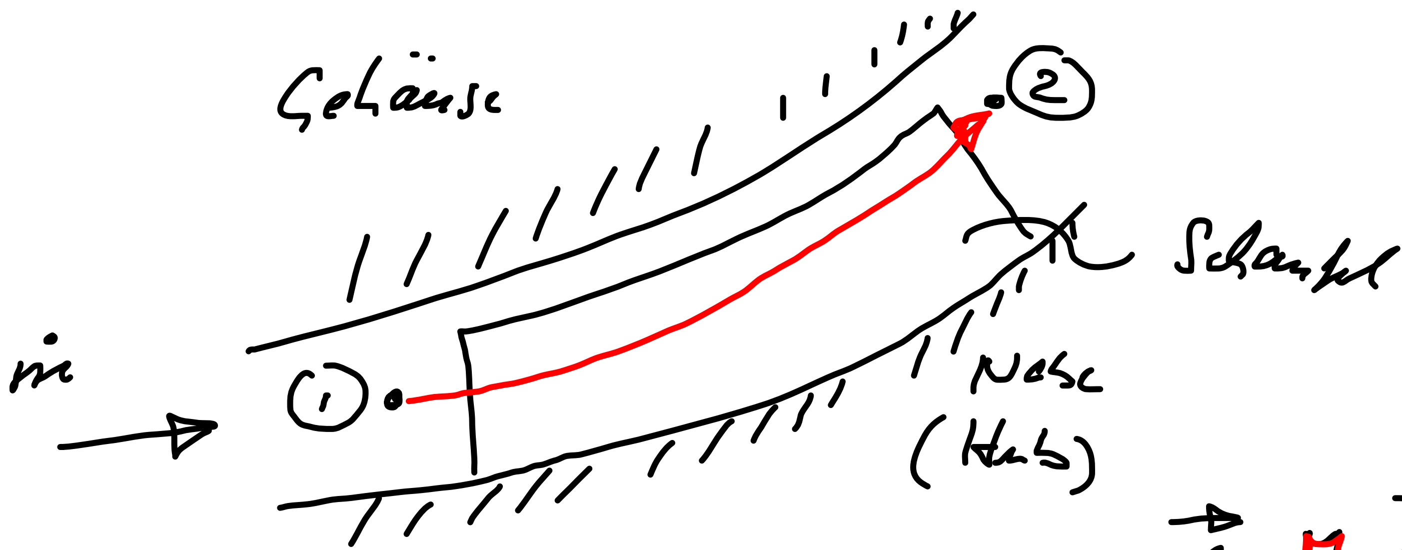
$$\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M} \quad \Big| \cdot \vec{e}_z$$

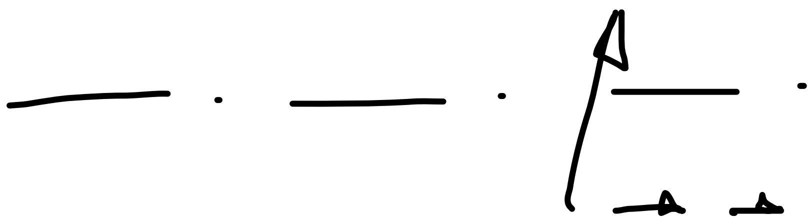
$$\boxed{\dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right) = M_z .}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

TCu





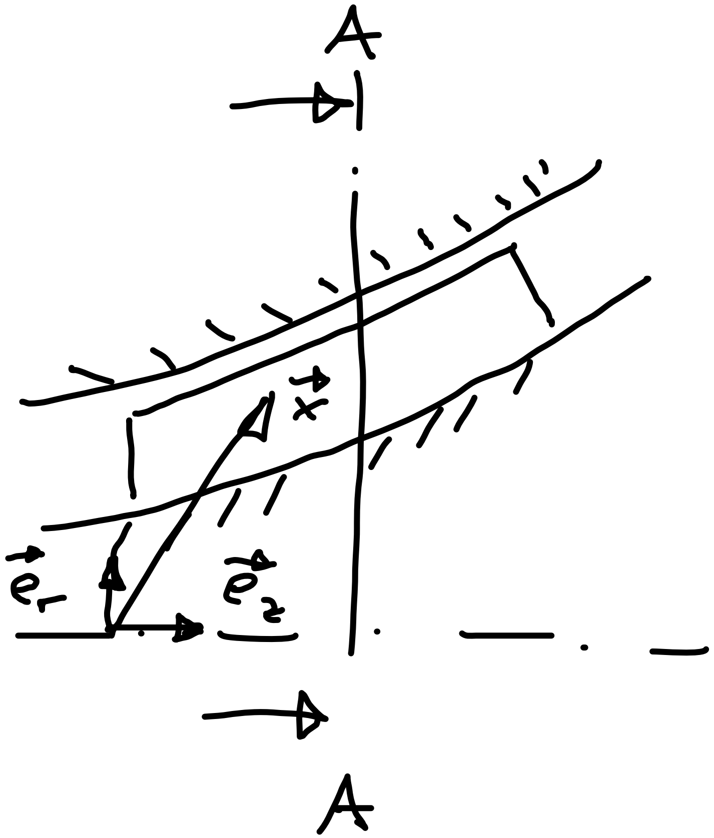
$$\vec M = M_z \vec e_z + \underbrace{M_x \vec e_x + M_y \vec e_y}_{\text{Umwucht od. Teilbeaufschlagung}}$$

$$P_t = \vec M \cdot \vec \Omega = \vec M \cdot \Omega \vec e_z = M_z \Omega$$

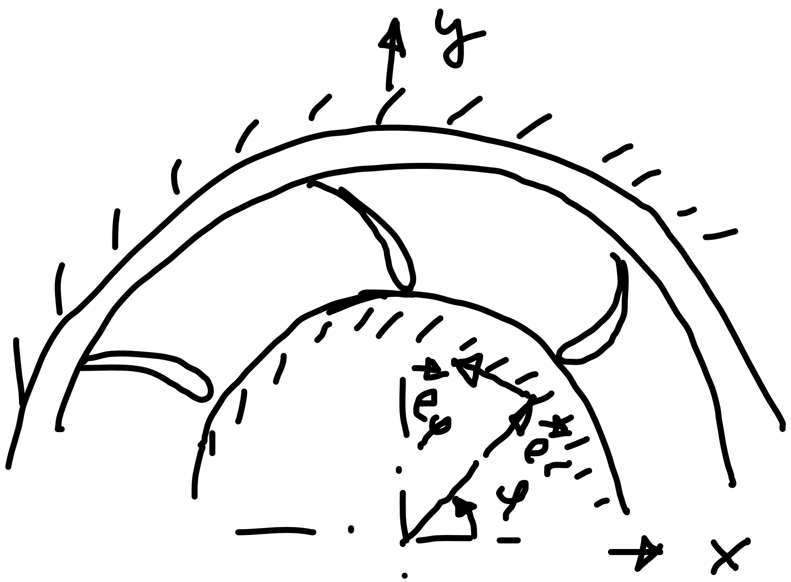
Rotating Stall

$$\dot m = -\int_{A_1} \rho\, \vec c \cdot \vec n \, dS = \int_{A_2} \rho\, \vec c \cdot \vec n \, dS$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



Schnitt A-A



Ortsvektor $\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$

$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$

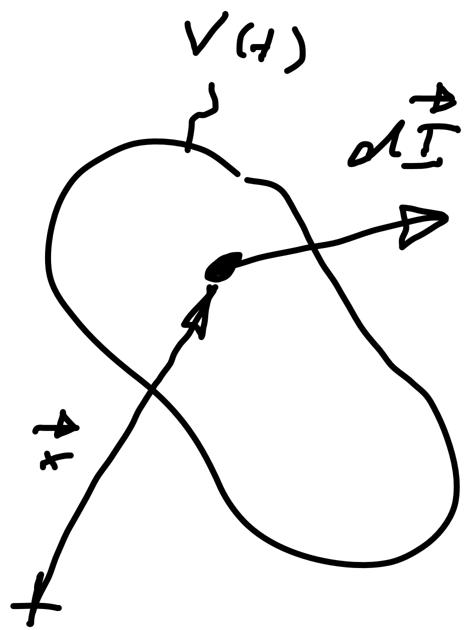
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

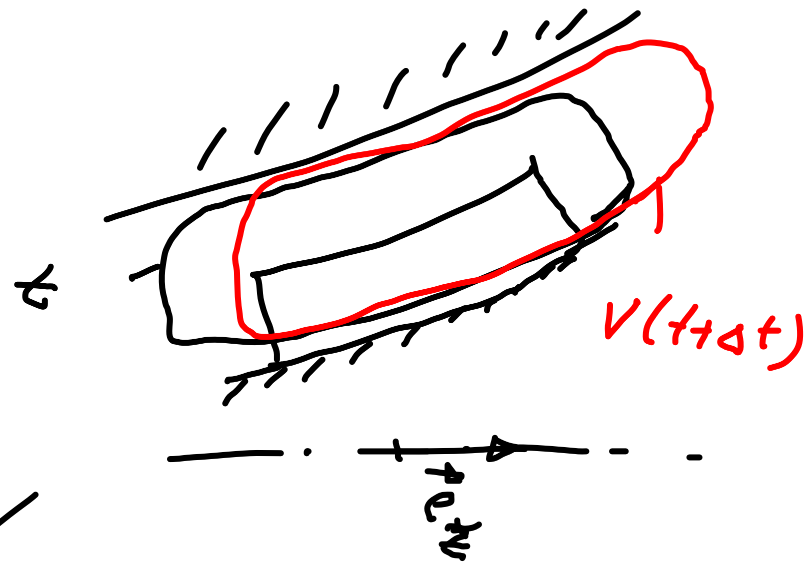
Zum Drall

$$\vec{D} = \int \vec{x} \times d\vec{I}$$



$$d\vec{I} = \rho \vec{c}\, dV$$
$$= \vec{c}\, dm$$

$$\vec{D} = \int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c}\, dV$$

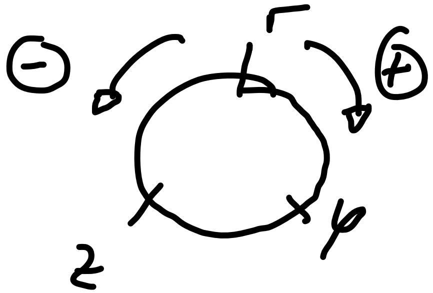


$$D_z = \int_{V(t)} (\vec{x} \times \rho \vec{c}) \cdot \vec{e}_z\, dV$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$(\vec{x}\times\vec{c})\cdot\vec{e}_z$$

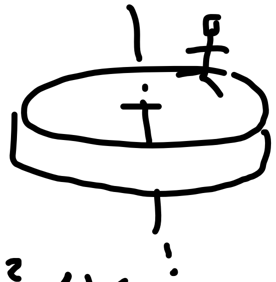
$$\left[(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z)\times(c_z\vec{e}_z + c_r\vec{e}_r + c_\varphi\vec{e}_\varphi)\right]\cdot\vec{e}_z$$



$$= r\,c_\varphi$$

$$D_z = \int_{V(t)} \varrho\, r\, c_\varphi \, dV$$

∇ Starrer Körper



$$c_\varphi = r\,\Omega$$

$$\dot{D}_z = \dot{\Omega}\underbrace{\int_V \varrho\, r^2\, dV}_{\Theta_{zz}} = M_z$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, c_u r\, dV = \Bigg[\underbrace{\oint_{S} \vec{x}\times\underbrace{\vec{t}\, dS}_{d\vec{F}}}_{\vec{M}\cdot\vec{e}_z} + \underbrace{\int_{V} \vec{x}\times\underbrace{\rho\vec{k}\, dV}_{d\vec{F}}}_{\equiv 0}\Bigg]\cdot\vec{e}_z$$

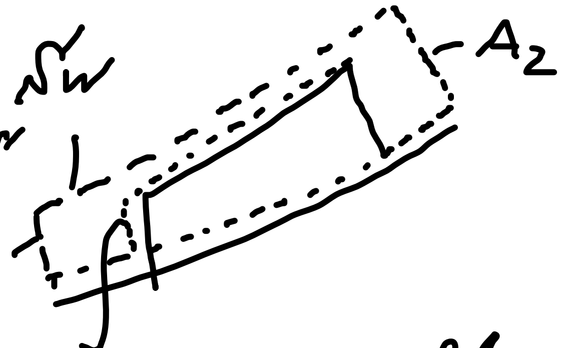
im Inertialsystem.

$\vec{k} = k_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, c_u\, dV + \int_{A_1+A_2} \rho\, c_u r\, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, c_u\, dV + \int_{A_1+A_2} \rho\, c_u r\, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS = \underbrace{\int_{S_f} (\vec{x}\times\vec{t})\cdot\vec{e}_z\, dS}_{M_z}$$

S_W



S_f benetzte Schaufel.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 18

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, c_u r\, dV + \int_{A_1+A_2} \rho\, c_u r\, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS' = M_z$$

$c_u r = \text{const}$ über A_1 und A_2

homogene Drallverteilung über Ein- und Austrittsfläche.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, c_u r\, dV}_{\hat{=}\ \dot{\Omega}\,\Theta} + \boxed{\dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right) = M_z.}$$

Euler.

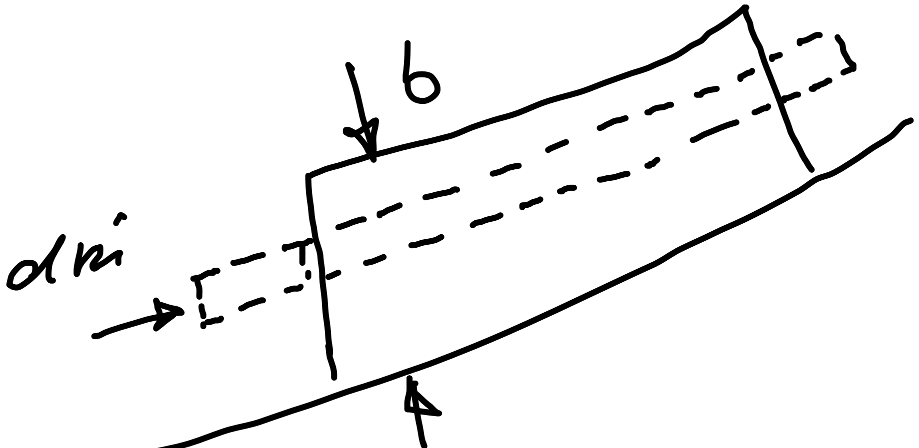
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

Für eine inhomogene Drallverteilung $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

$$d\dot{m}\,(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) = dM_z$$



$$M_z = \int_b dM_z$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

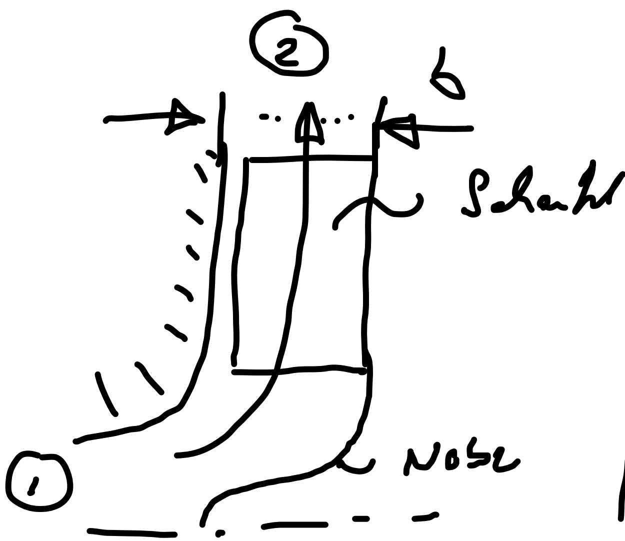
FLUID SYSTEM TECHNIK

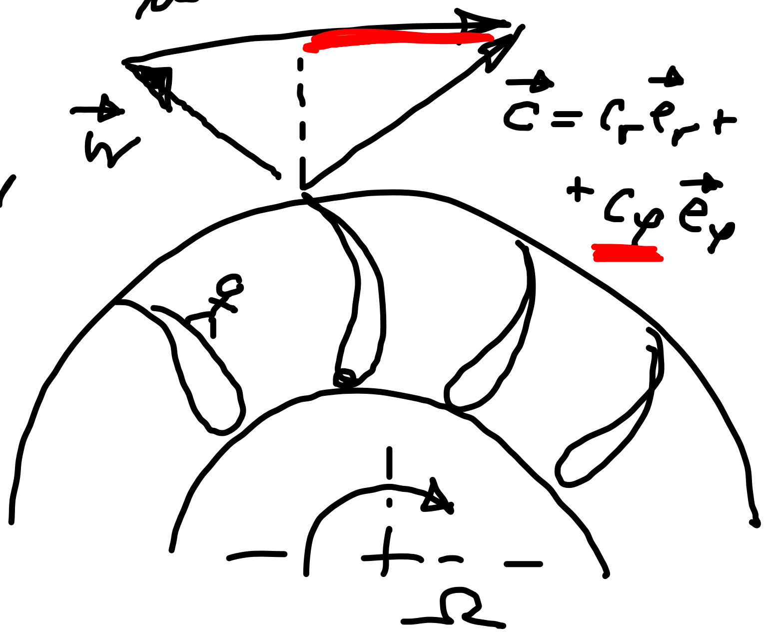
Wann tritt eine homogene Drallverteilung auf?

1.) drallfreie Strömung $r c_u \equiv 0$.

2.) radiale Zuströmung od. radiale Abströmung

$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x} = \Omega r \vec{e}_\varphi$





$\vec{c} = c_r \vec{e}_r + c_\varphi \vec{e}_\varphi$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

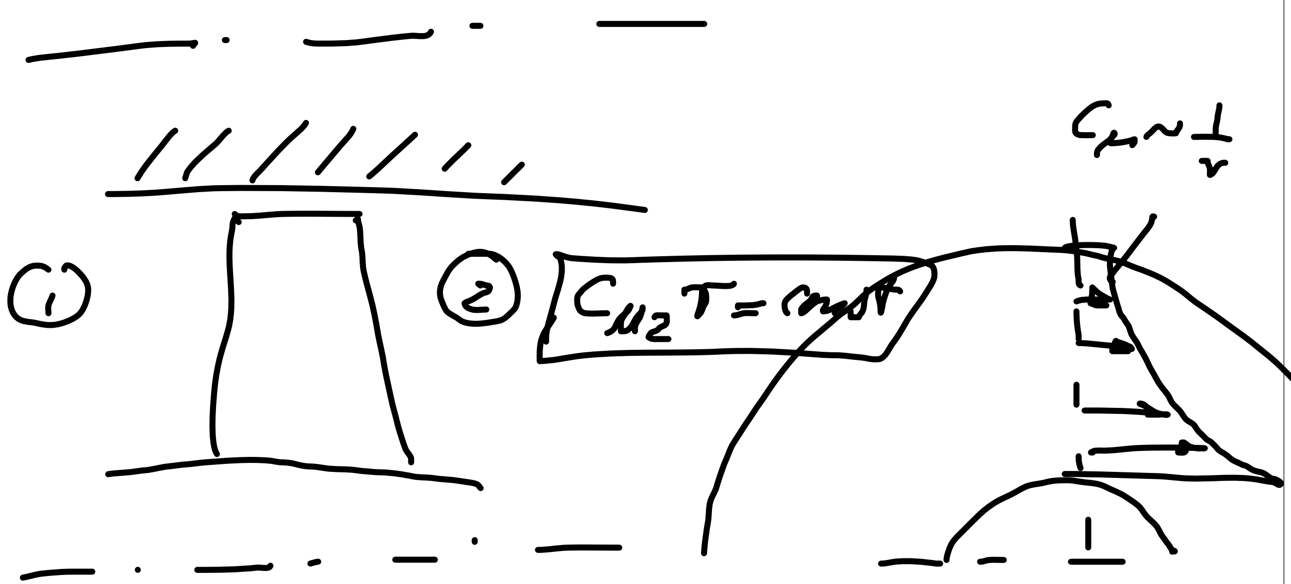
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 18

3.) Für die 1. Auslegung eine Axialmaschine mit kleiner Schaufelhöhe.

$b \ll R$

4.)



Wirbelflußmaschinen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 18