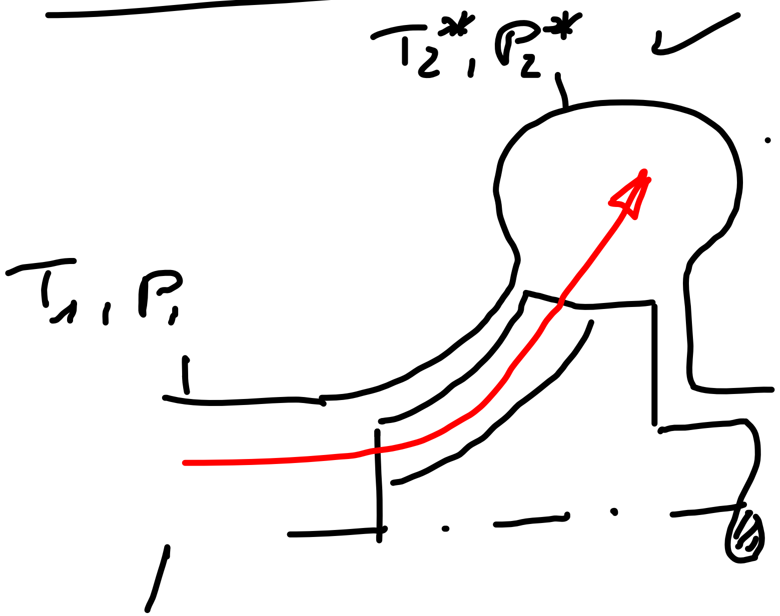
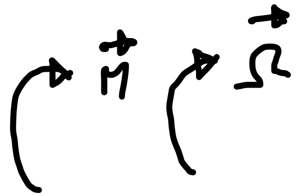
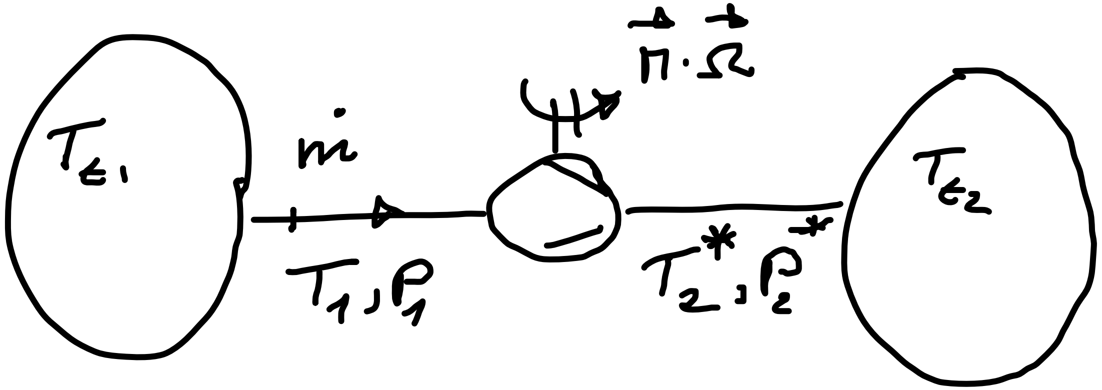
Wirkungsgrad bei kompressibler Strömung durch Turbomaschine





- $\vec{M}\cdot\vec{\Omega} = P_t > 0$ Arbeitsmaschine (Kompressor)
- Diagonal durchströmte Maschine



Vergleichswert.

* real gemessene Größen

ohne Asterix ⇒ Vergleichswerte.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$P_f = \dot{m} g H + \dot{m} g H_v$$

1. Hauptsatz

$$gH := \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \psi\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \psi\right)_1$$

Bernoullische Konstante

Druckfunktion.

$$C = \frac{u^2}{2} + P + \psi \qquad P = \int \frac{dp}{\rho}$$

$$g H := C_2 - C_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 17

$$\rho H = \underbrace{\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}}_{\approx 0} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

<u>Näherung</u>: kinetische Anteil

$$\frac{u^2}{2} \ll \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p}{\rho}$$

$$\rho H \approx \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right).$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Druckänderungsarbeit

$$gH = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

$$p = \rho R T$$

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

$$gH = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \left(T_2 - T_1\right)$$

$$= c_p \left(T_2 - T_1\right),$$

$$gH = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)$$

$$gH = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

da $R = c_p - c_v$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

reale Druckhöhenarbeit

$$gH = c_p \left(T_2^* - T_1 \right)$$

$$(gH)_{s=\text{const}} = c_p \left(T_2 - T_1 \right) \qquad T_2 < T_2^*,$$

da die Arbeitsumsetzung ideal ist.

$$\eta := \frac{(gH)_{s=\text{const}}}{gH} = \frac{T_2 - T_1}{T_2^* - T_1}$$

Wirkungsgrad wie bisher. ⇝ Isentroper Wirkungsgrad.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Zum polytropen Wirkungsgrad

Vergleichsprozess ist eine polytrope Zustandsänderung

$$gH = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1}\,R}_{c_p}\,\left(T_2 - T_1\right)$$

$$(gH)_{pol} = \frac{n}{n-1}\,\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right].$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2^*}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Bestimmung des polytropen Exponenten aus Meßdaten:

$$\frac{n-1}{n} = \frac{\ln\left(T_2^*/T_1\right)}{\ln\left(p_2/p_1\right)}$$

$$(g\,H)_{pol} = \frac{n}{n-1} R \left(T_2^* - T_1\right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\eta_{pol} := \frac{n}{n-1}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Literatur hierzu:

Spurk: Dimensionsanalyse in der Strömungslehre

Springer 1992

Gewusst!?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Anwendungsbeispiel für die Energiegleichung

Luftfeder ⇝ Erhaltungsgleichung ⇝ 0-D Modell.

⇝ Linearisierung um den Betriebspunkt. (Störansatz)

⇝ Kennlinien der Dynamik (Bode Diagramm).

⇝ Klärung der Frage:

Wann ist eine Zustandsänderung isotherm?

adiabat?

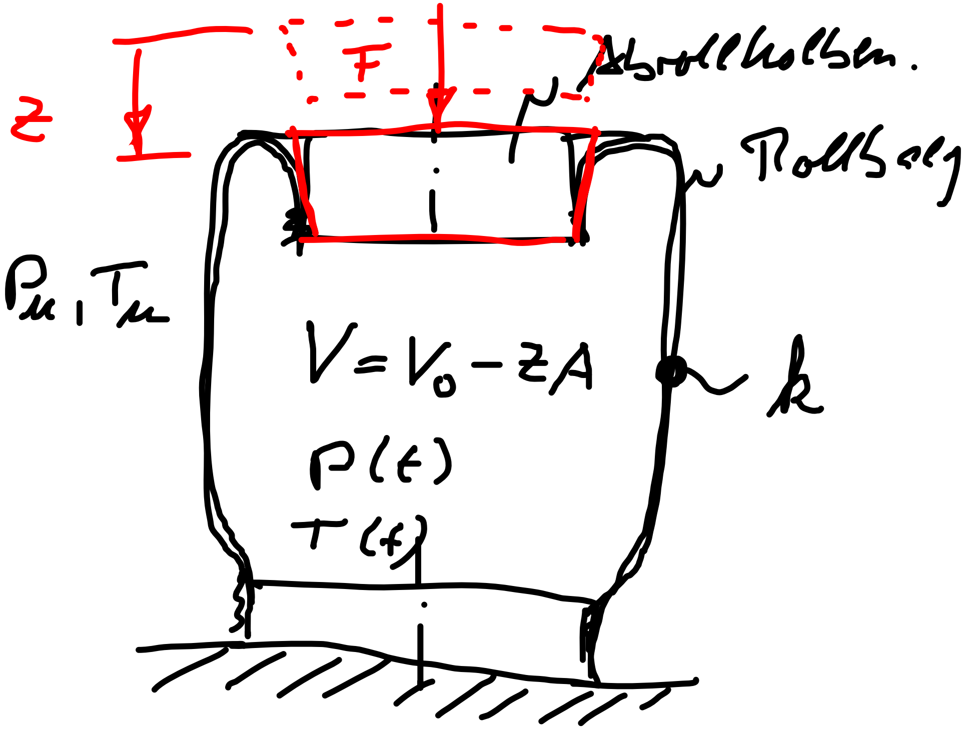
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Modell eines Druckspeichers

Skizze des Systems im ausgefahrenen Zustand



Verdrängerfläche (Kinematik)

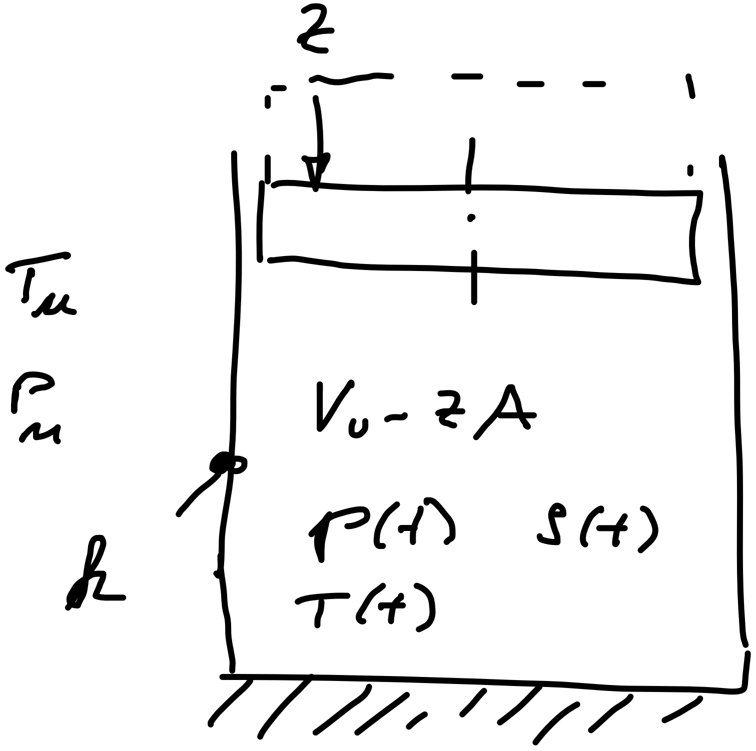
$$A := -\frac{dV}{dz}$$

Tragfläche (Dynamik)

$$A_T := \frac{F}{p - p_u}$$

i.A. $A \neq A_T$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



Unbekannten:

$p(t), T(t)$

$\rho(t)$

1. Annahme

$$A = A_T \text{ für}$$

eine Kolben.

2. Annahme

Hydrostatik $p = p(t)$

$$T = T(t)$$

3. Annah. $\frac{u^2}{2} \ll c_p T$

4. Annah. $z = \hat{z} \sin \Omega t$

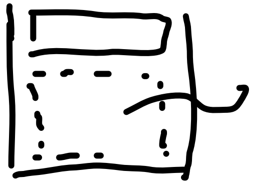
5. Annah.: Kraftelement → kein Trägheit.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Energiegleichung



$V_0 - zA$

$$\underbrace{\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\rho\right]}_{\text{Hydrostatik}} A\,ds - \dot m_1 h_{t_1} + \dot m_2 h_{t_2} =$$

$$= P_A + \dot Q$$

Konti:

$$\underbrace{\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)}\, ds \qquad - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

$$\boxed{\dot m \neq \frac{dm}{dt}}$$

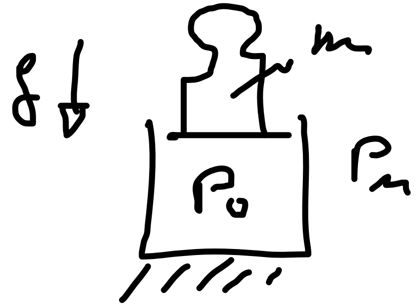
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot\phi$$

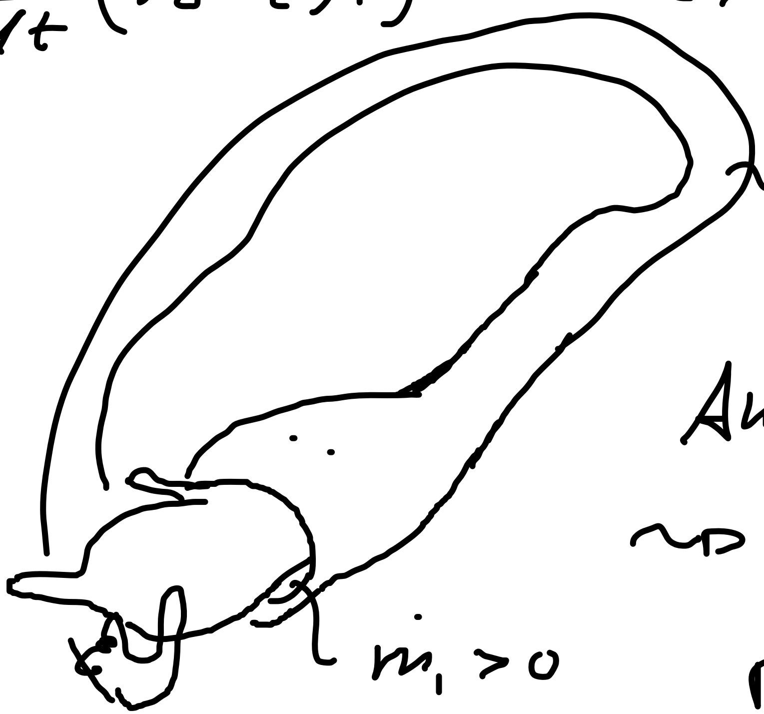
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right](V_0 - zA) - \rho \dot{z} A h_t = -\dot{q}_n S_w$$

$$\frac{d\rho}{dt}(V_0 - zA) - \rho \dot{z} A = 0.$$





$\dot{m}_2 \equiv 0.$

$\dot{m}_1 > 0$

Anfangswertproblem

$\rightsquigarrow$ Anfangsbedingung

$$p(t=0) = p_0 = p_u + \frac{mg}{A}$$

$$T(t=0) = T_0 = T_u$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Umformungen $\rho e = \rho c_v T + \text{const.}$ (kalorisch ideal.)

$$= p \frac{c_v}{R}$$

$$= p \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$\rho h = p \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$\leadsto \quad \dot{\varrho}\,(V_0 - zA) - \dot{z}A\varrho = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\,\dot{p}\,(V_0 - zA) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\dot{z}Ap = -k\,S_w\,(T - T_0) \qquad (2)$$

nichtlinear.

$$p = \varrho R T \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ T(0) &= T_0 = T_u \\ \varrho(0) &= p_0 / R T_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Anfangsbeding.}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Weitere Lösungen

1.) numerisch.

↳ Übung

Matlab

Modelica

Mathematica

⋮

Subroutine für kommerzielle MKS (Mehrkörpersimulation)

Simpack.

⋮

⋮

2.) Linearisierung ⟶ Analytisch.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

Linearisierung um den Betriebspunkt für „kleine" Auslenkungen um den Betriebspunkt.

1. Annahme kleine Amplitude

$$\frac{zA}{V_0} \ll 1$$

2. Störansatz (Perturbation) um den Betriebspunkt

$$\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t) \qquad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0$$

$$p(t) = p_0 + \tilde{p}(t) \qquad |\tilde{p}| \ll p_0$$

$$T(t) = T_0 + \tilde{T}(t) \qquad |\tilde{T}| \ll T_0$$

$$V(t) = V_0 + zA \qquad |zA| \ll V_0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

3. Einsetzen in die das Algebrodifferentialgleichen.

$$p = \rho R T$$

$$\cancel{p_0} + \tilde{p} = R(\rho_0 + \tilde{\rho})(T_0 + \tilde{T})$$

$$= R\cancel{\rho_0 T_0} + R\tilde{\rho}T_0 + R\rho_0\tilde{T} + R\tilde{\rho}\tilde{T},$$

mit

$$p_0 = R\rho_0 T_0$$

$$\tilde{\phi} \gg \tilde{\phi}^2$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R T_0 + \rho_0 R \tilde{T} + \mathcal{O}(\tilde{\phi}^2)$$

$$\tilde{p} \approx \tilde{\rho} R T_0 + \rho_0 R \tilde{T}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 17

$$\Rightarrow \quad \dot{\tilde{\rho}} V_0 + A \dot{z} \rho_0 = 0 \qquad \text{Konti.}$$

$$\dot{\tilde{p}} V_0 + A \dot{z} \gamma p_0 + (\gamma - 1) S_w k \tilde{T} = 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R T_0 + \rho_0 R \tilde{T}$$

lineares System. ⇝ Superposition ist möglich.

Produktbildung nicht möglich.

Ansatz

$$\tilde{p} := p_0 p_+ e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{\rho} := \rho_0 \rho_+ e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{T} := T_0 T_+ e^{i\Omega t}$$

$$\hat{z} A = \tilde{V} := V_0 V_+ e^{i\Omega t}$$

p_+, ρ_+, T_+, V_+ dimensionslose, komplexe Amplituden.

$$\rho_+ + v_+ = 0 \qquad \text{Konti.}$$

$$p_+ + \gamma v_+ - i(\gamma - 1)\frac{N_W k T_0}{\Omega V_0 p_0} T_+ = 0 \qquad \text{Energie}$$

γ = Π_1

$\frac{N_W k T_0}{\Omega V_0 p_0}$ = Π_2

λ Relaxations-zeit

$$p_+ = \rho_+ + T_+ \qquad \text{Gasgleichung.}$$

Dimensionsanalyse mal der Methode der Differentialgleichung.

$\Pi_1 = \gamma$

N=N

$\gamma = \frac{7}{5}$

O=C=O

$\gamma > \frac{7}{5}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 17

$$\Pi_2 = \frac{1}{\Omega \lambda} = \frac{S_w k T_0}{\Omega V_0 p_0}$$

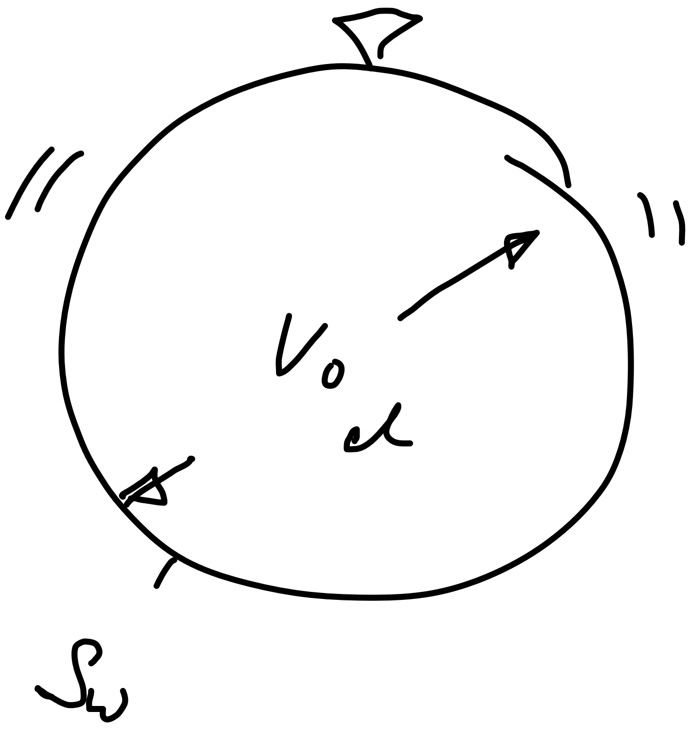
⇝ Relaxationszeit

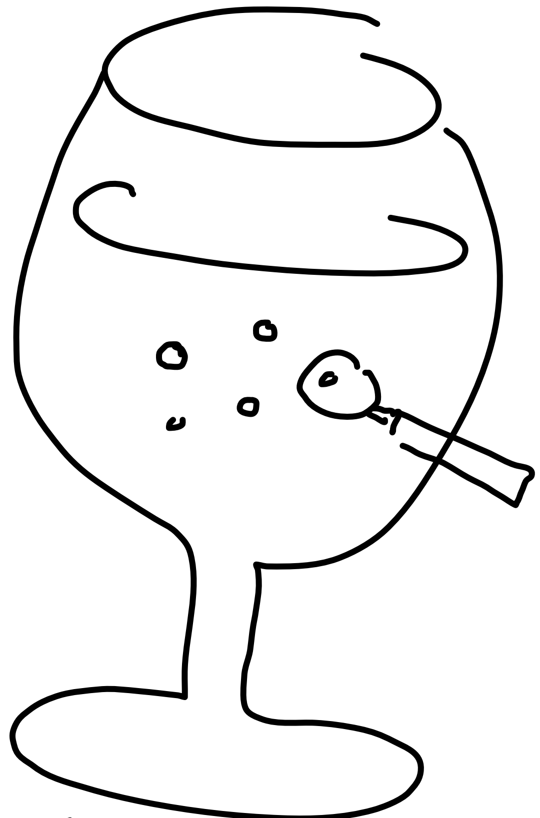
$$\lambda = \frac{V_0 \rho_0 c_p}{S_w k} = \frac{m_0 c_p}{S_w k} = \frac{C_p}{K}$$

$\Omega \ll \frac{1}{\lambda}$ ⇝ isotherme Zustandsänd.

$\Omega \gg \frac{1}{\lambda}$ ⇝ adiabat Zustandsänd.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz





$$\frac{S_w}{V_0} \sim \frac{1}{\alpha} \qquad << \qquad \left(\frac{S_w}{V_0}\right)' \sim \left(\frac{1}{\alpha}\right)'$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 17