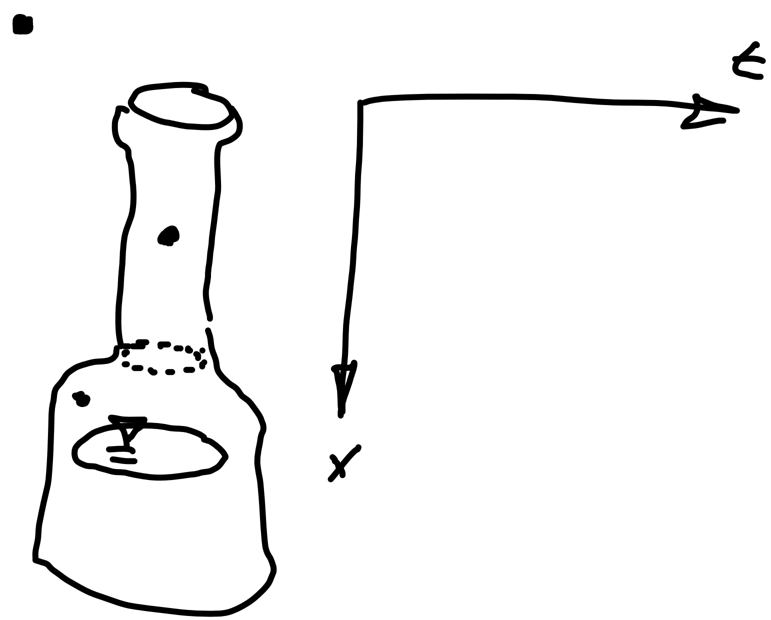
Charakteristikenmethode II

0-D Methode

- einfach
- mit Papier und Bleistift.
- immer lösbar



1D-Methode.

- nichtlinear — Charakteristiken-methode.
- linear — Wellengleichung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

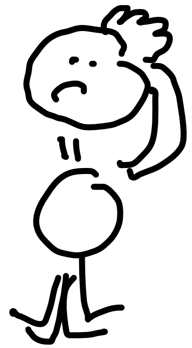
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 10

Konti $\quad \frac{1}{\rho a_E}\frac{Dp}{Dt} + a_E \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0$



Impuls $\quad \frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = k_E$

$\oplus \quad \ominus$

$C^+: \quad du + \frac{1}{\rho a_E}\, dp = k_E \; ; \quad ds = (\bar{u} + a_E)\, dt$

$C^-: \quad du - \frac{1}{\rho a_E}\, dp = k_E \; ; \quad ds = (\bar{u} - a_E)\, dt$

$\rightsquigarrow$ Analytisch lösbar für $s = \text{const}$

$p = c\rho^{\gamma} \qquad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

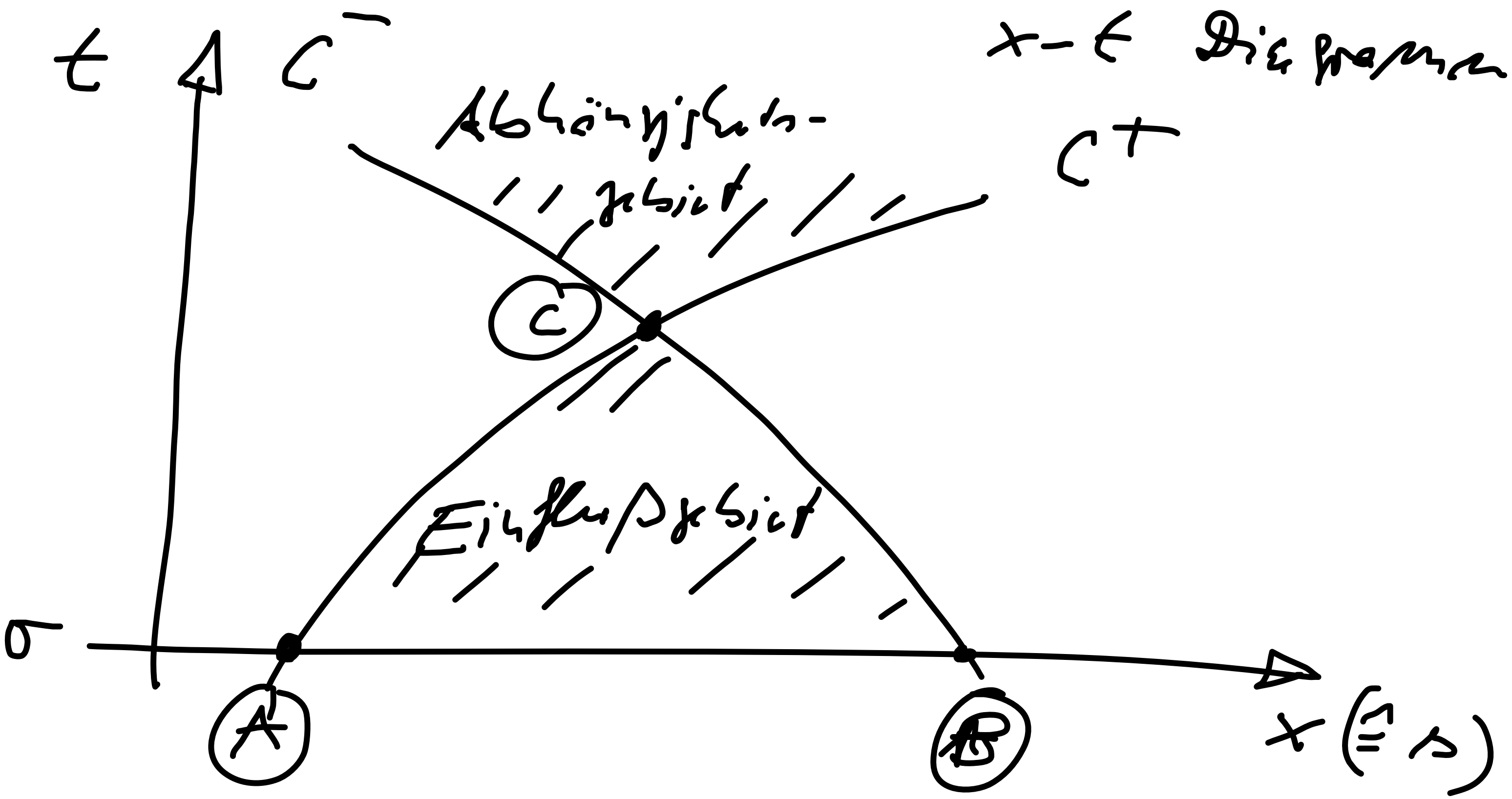
„d" allgemein Änderung, die ein Beobachter sieht, der sich mit der Geschwindigkeit $\bar{u} + a_E$ (C^+-Beobachter) oder $\bar{u} - a_E$ (C^--Beobachter) bewegt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

Charakteristikenmethode.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Literatur-Empfehlung zum Thema

instationäre Gasdynamik

1. Randall J. LeVeque +++

Numerical Methods for Conservation Laws

- ⊕ einfache Sprache
- ⊕ sehr freundlich
- ⊕ „Sprungbedingungen" für Stöße
- ⊕ Verkehrsflußmodell

⇝ FST kaufen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

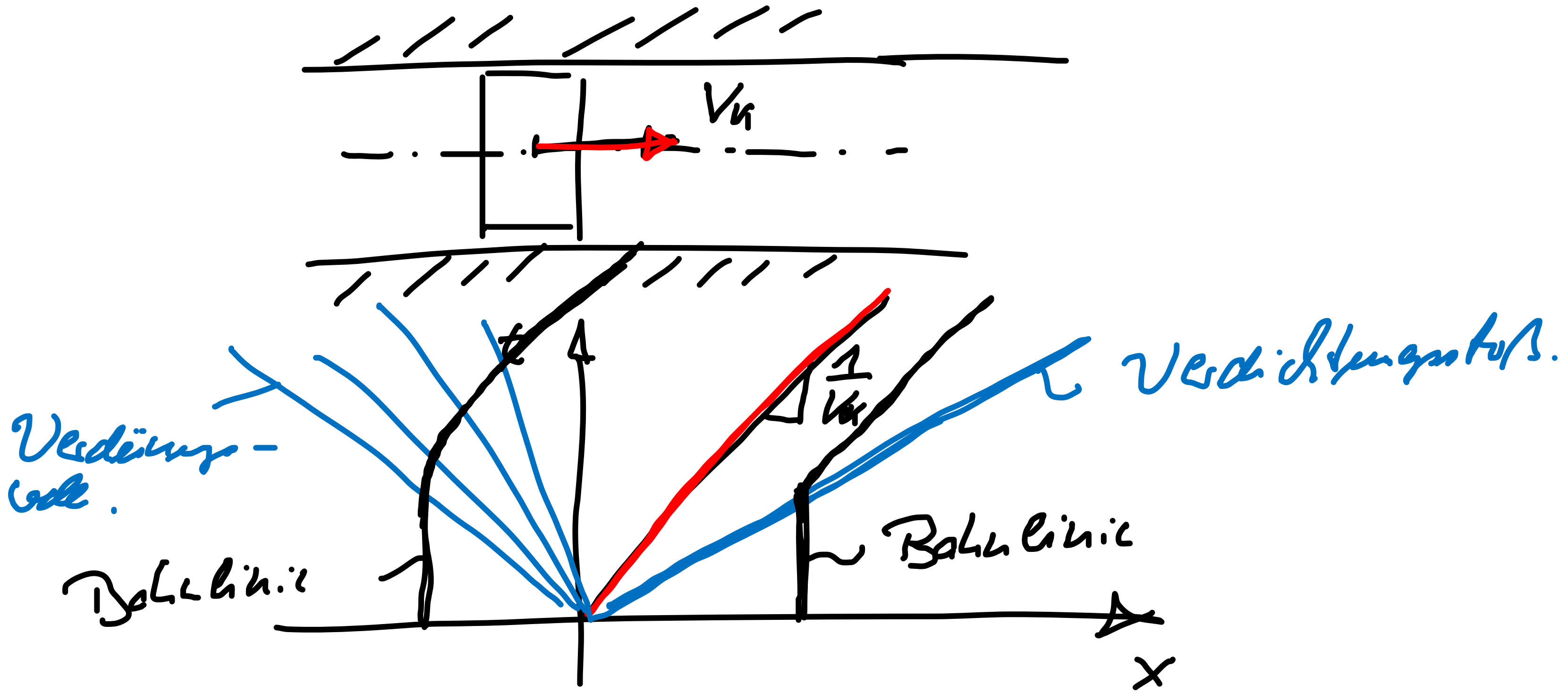
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

2. Analytische Lösung von $du \pm \frac{1}{\rho a_E} dp = 0$
für isentrope Strömung

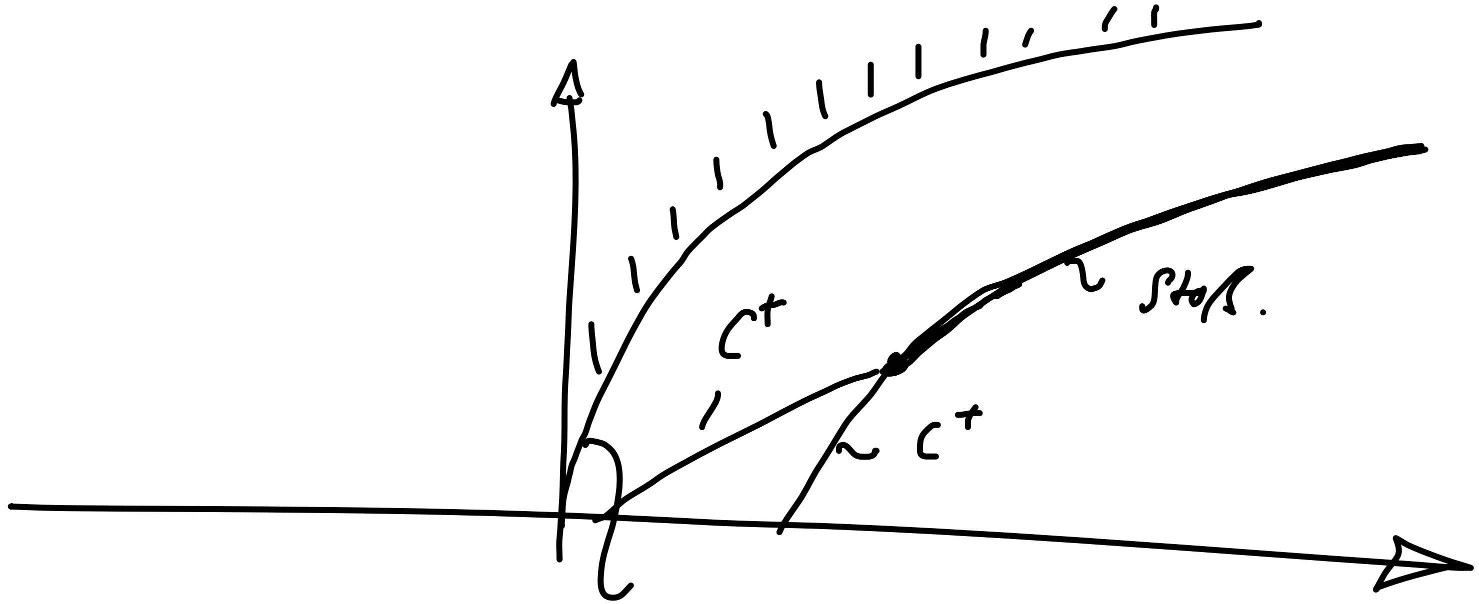
Sprich Kap. 9.2 instationäre Gasdynamik

++



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10



beschleunigter Kolben mit
konstanter Kraft.

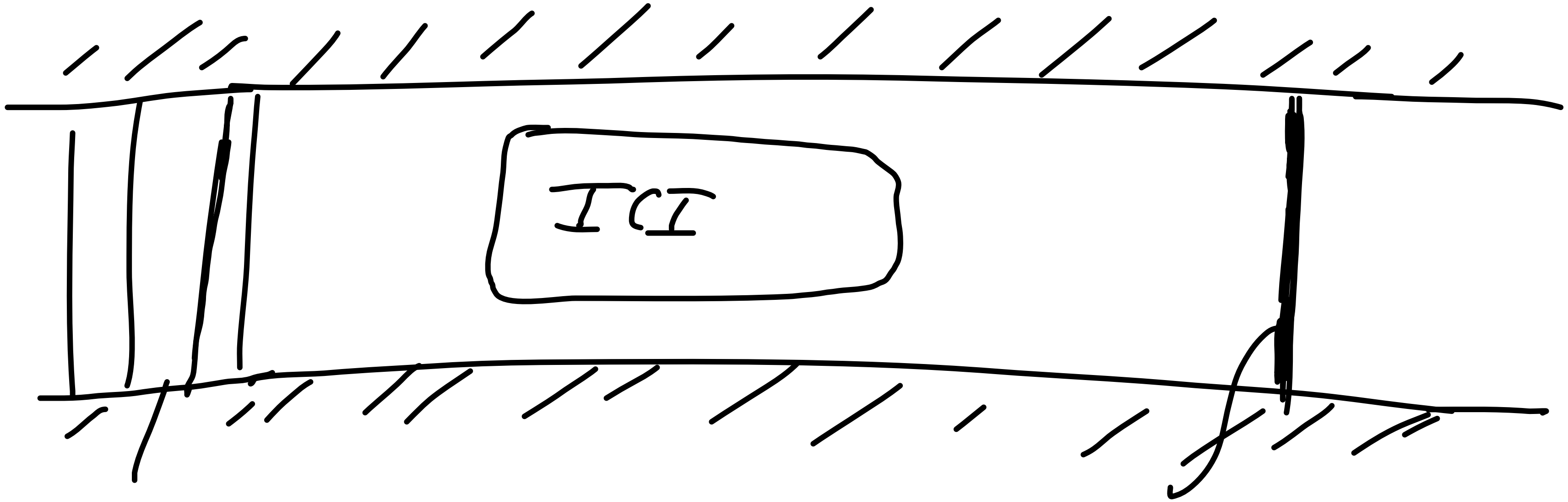
- Shapiro : Gasdynamik +
- Becker, Ernst : Gasdynamik. ++++
- Streeter & Wylie: Fluid Transients +o

⇝ lineares Charakteristikenverfahren.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10



Verdrängungswelle.

Verdichtungsstoß

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$$

$$a = a_0 + \tilde{a}$$

Impedanz

$$Z = \rho a = \overbrace{\rho_0 a_0}^{Z_0} + a_0 \tilde{\rho} + \rho_0 \tilde{a} + \tilde{\rho}\tilde{a}$$

Lineares Verfahren

$$Z \approx Z_0 = \text{const.}$$

$$|\bar{u}| \ll a_0$$

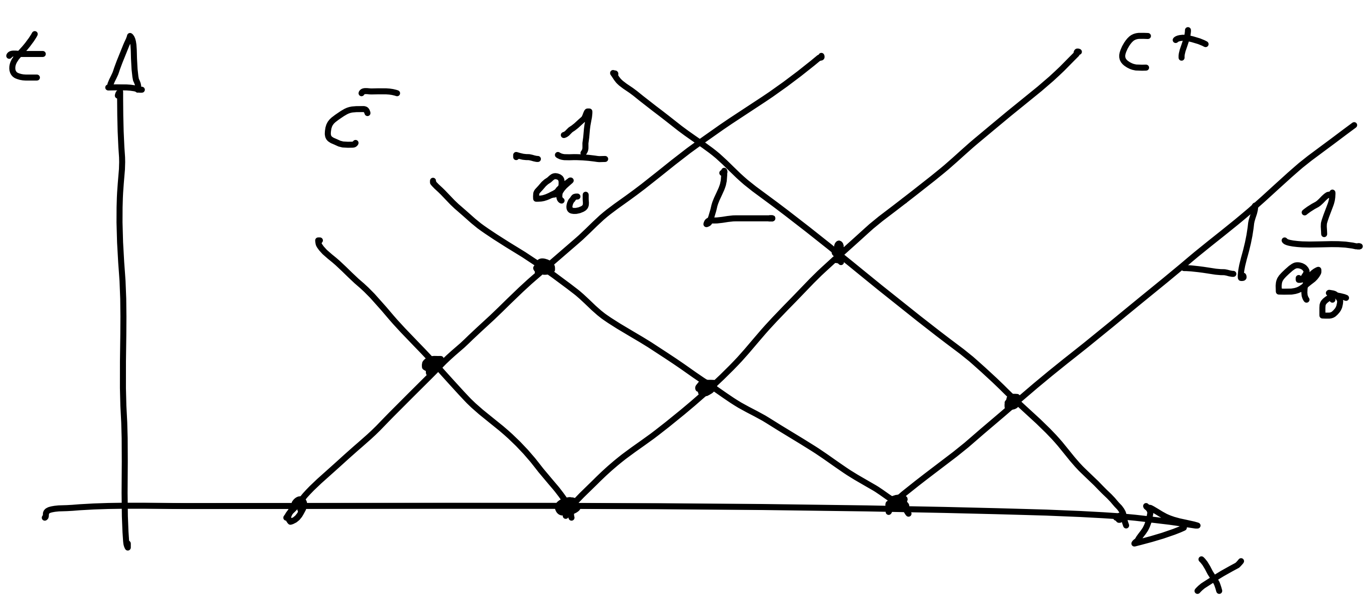
$\rightsquigarrow$ Charakteristiken sind gerade

$\rightsquigarrow$ Verdichtungsstöße können nicht dargestellt werden.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10



$$d\bar{u} + \frac{1}{z_0}\, dp = k_E\, dt \qquad dx = a_0\, dt$$

$$d\bar{u} - \frac{1}{z_0}\, dp = k_E\, dt \qquad dx = -a_0\, dt$$

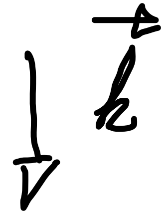
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

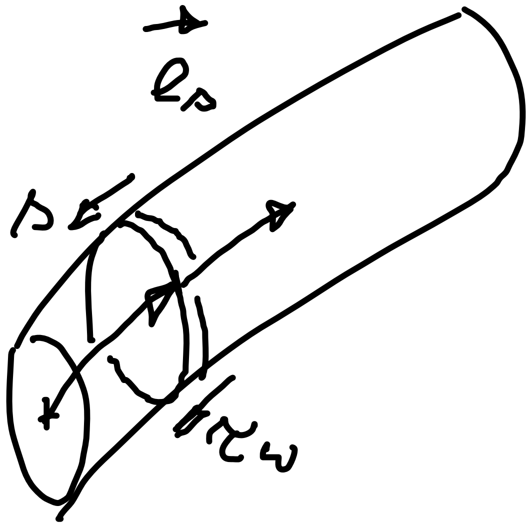
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

effektive Volumenkraft.

$$k_E = k_s - \frac{\lambda}{2}\,\frac{\bar{u}\,|\bar{u}|}{d}$$

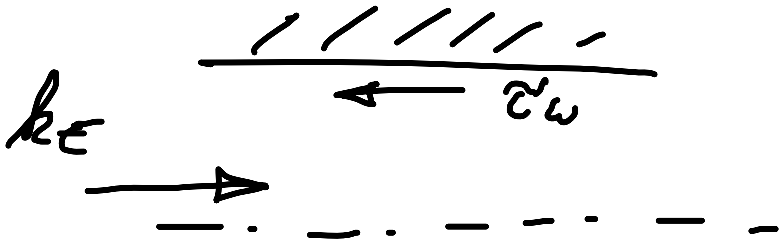


$$k_s = \vec{k}\cdot\vec{e}_s$$



λ Widerstandszahl

≙ dimensionslose Wandschubspannung.



$$\tau_w = fn(\bar{u}, d, \nu, \varrho, k, \dot{\mu})$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 10

$$\frac{\tau_w}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2}} = fn\left(\frac{\bar{u}\, d}{\nu},\ \frac{k}{d},\ \frac{\dot{\bar{u}}\, d^3}{\nu^2}\right)$$

in relative Rauheit.

$$\parallel$$

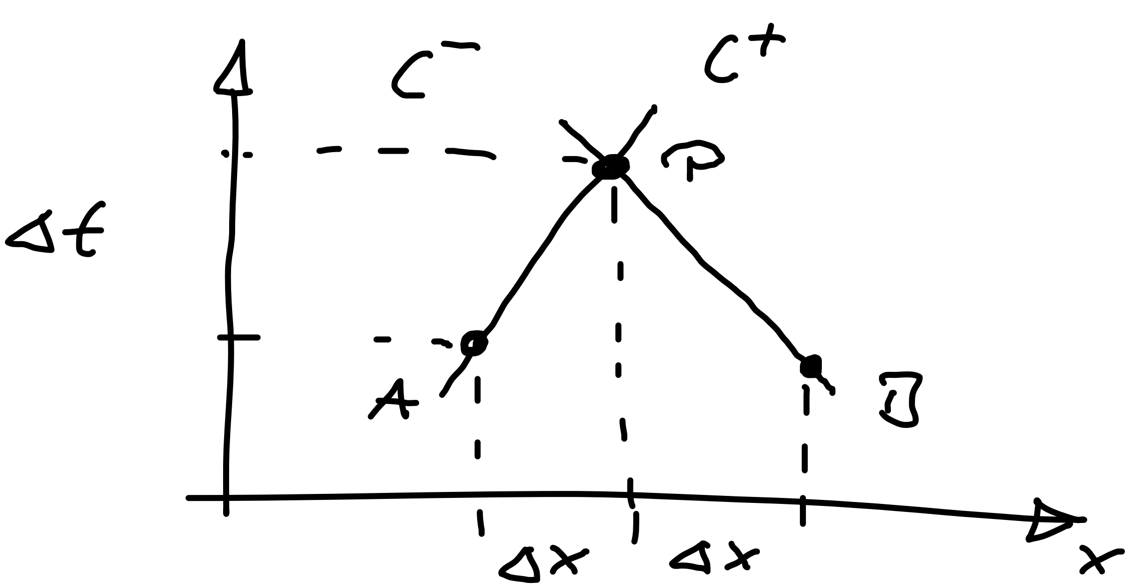
$$\lambda := \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2}\bar{u}^2}$$ Widerstandsziff.

Mangels besserer Gesetze

$$\lambda = \lambda(Re,\ k/d)$$

Dissertation
Dissertation.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10



$$C^+: \quad p_P = p_A - Z_0 (u_P - u_A) - R\, u_P |u_A|$$

$$C^-: \quad p_P = p_B + Z_0 (u_P - u_B) + R\, u_P |u_B|$$

$$Z_0 := \rho_0 a_0$$

$$R := \rho_0 \lambda \frac{1}{2d} \Delta x$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

Numerische Methode / Homepage.

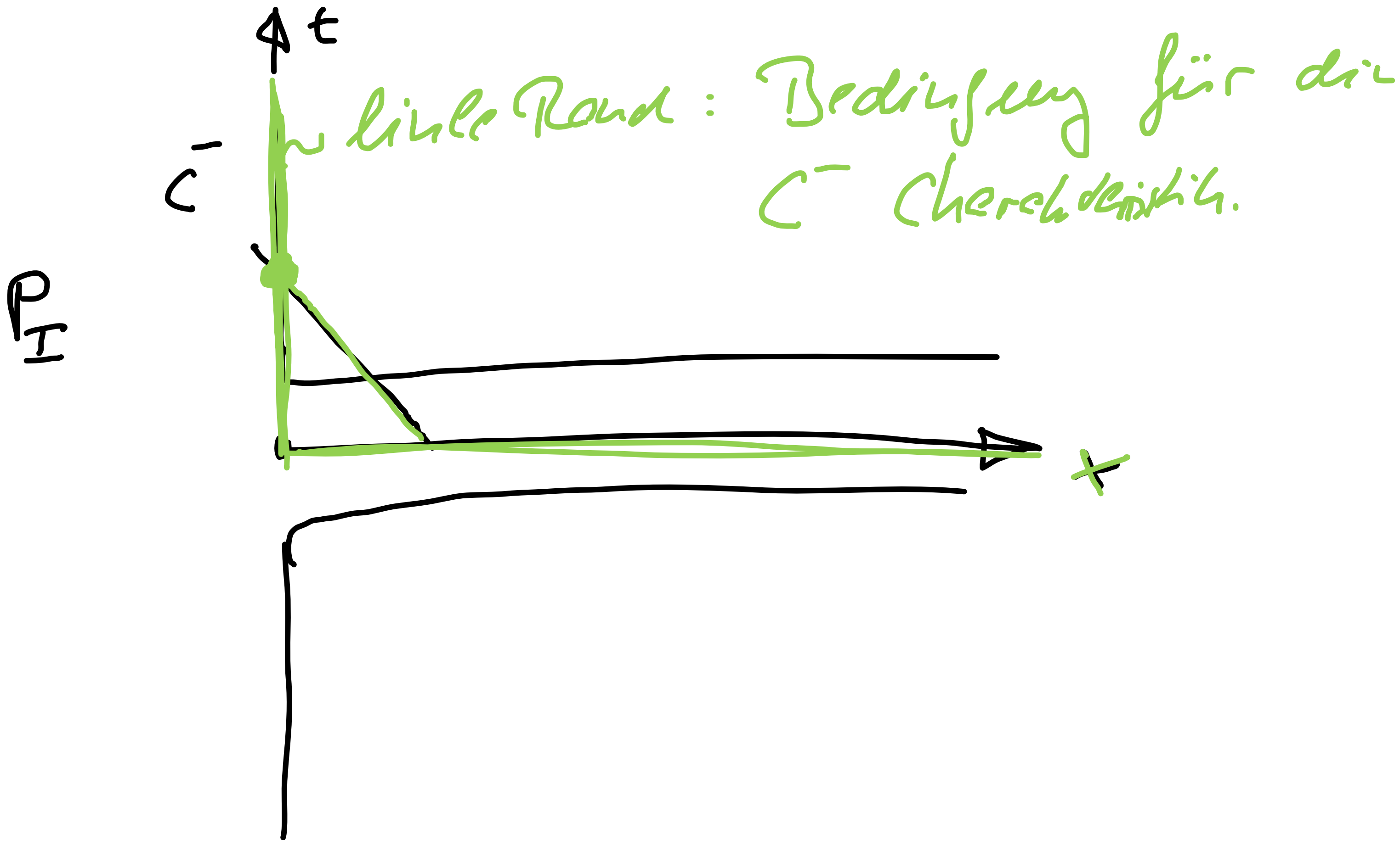
=

Offene Frage:

Randbedingung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



Einströmrandbed.: Druck am linken Rand ist vorgeschrieben

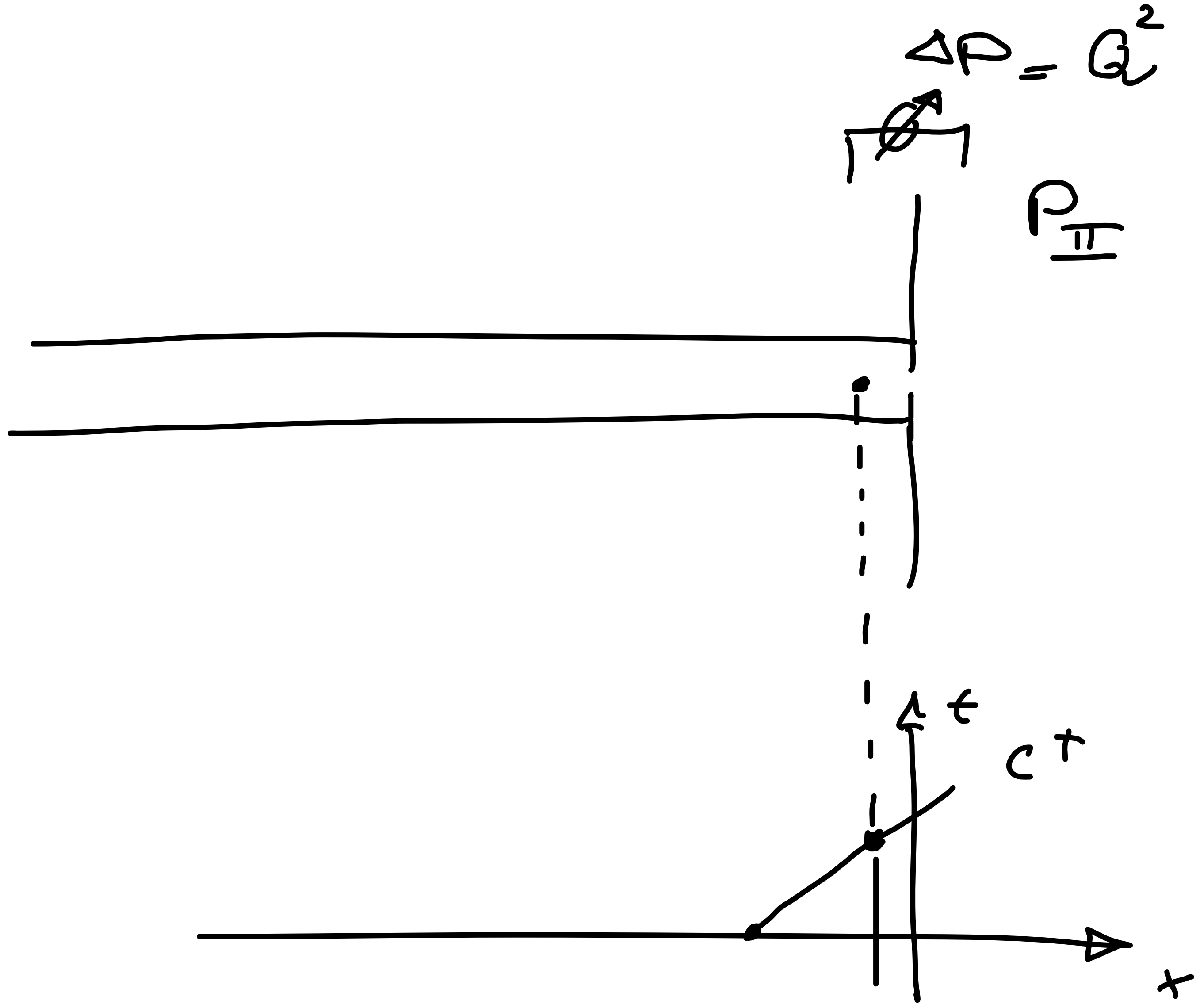
⇝ C^- Charakteristik

⇒ $\bar{u}$ am Einströmrand.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

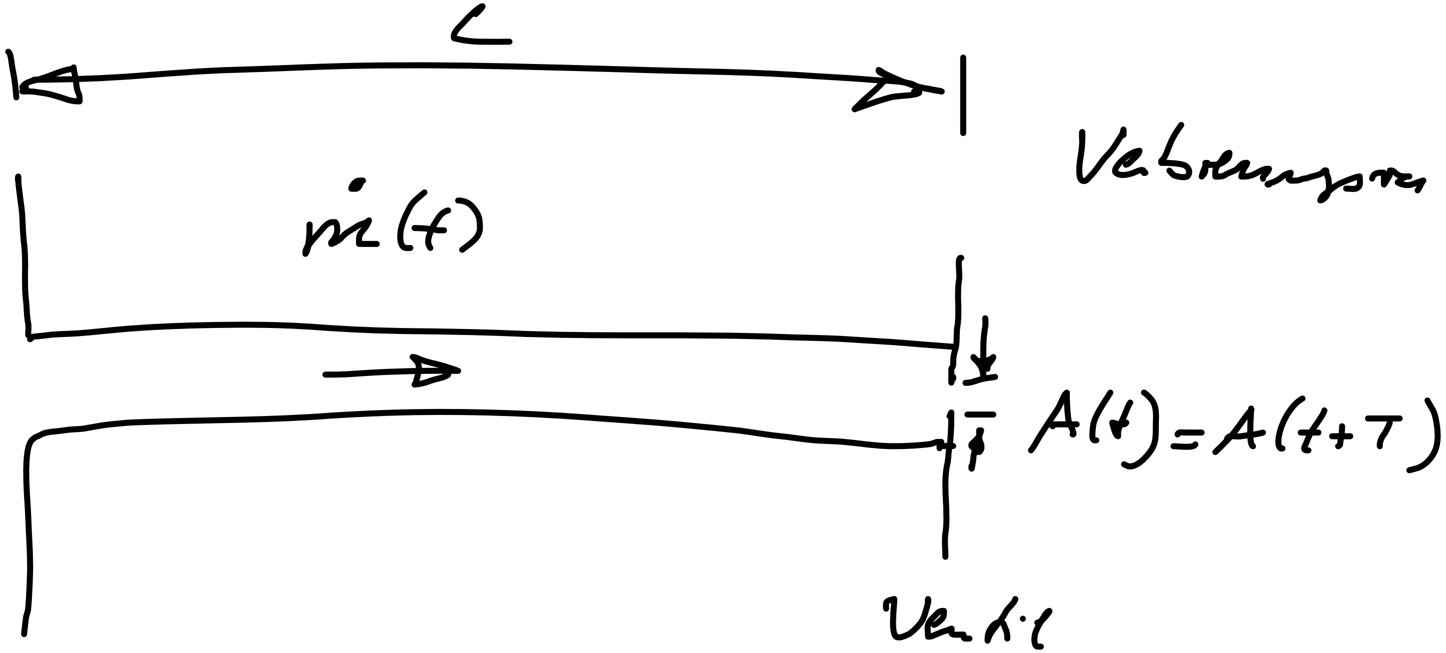


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 10



Aufgabe.

Prinzip einer Resonanzaufladung eines Verbrennungsmotors.

$T \sim \frac{L}{a_0}$ → Maximum im Massendurchsatz.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Alternative zum Charakteristikenverfahren

Wellengleichung

∇ nicht $\bar{u}^2$, wenn kein Verlustterm ist

Δ

Impulssatz

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\lambda}{2}\frac{\bar{u}|\bar{u}|}{d}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \cancel{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial s} = -\cancel{\frac{\lambda}{2}\frac{\bar{u}|\bar{u}|}{d}}$$

linearisierte Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial s} = 0. \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Kont. $$\frac{1}{\rho a_E}\frac{Dp}{Dt} + a_E \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t} + a_0^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial s \, \partial t} = 0$$ Bew.

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^2}{\partial t \, \partial s} + a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} = 0 \quad -$$ Kont.

$$a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$ Wellengleich.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung für den Druck.

⇝ Umrechnung von Druckänderung zu Geschwindigkeitsänderung erfolgt über die Impedanz.

z.B. Geschwindigkeitsänderung Δu

⇝ Druckänderung $\qquad \underline{\Delta p = \Delta u \, \rho_0 a_0}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 10