Kontigleichung für eine Stromröhre

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

Ziel:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \longrightarrow \dfrac{\partial p}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial t} \longrightarrow \dfrac{\partial p}{\partial t} \end{array}\right\}$$

Dichte, Fläche durch Druckänderung ersetzen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 8

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = \frac{\partial \rho}{\partial t} A + \rho \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} A + \rho \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial t} \rho A \overbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}} + \underbrace{\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p}} \right)}^{\varkappa_{eff.}}$$

Zugang über Zustands- änd

Elastostatik TM II

oder

TM III, wenn die Wand Massebehaftet ist

$$= \frac{\partial p}{\partial t} \rho A \, \varkappa_{eff.}$$

Effektive Nachgiebigkeit der Stromröhre setzt sich additiv aus einem thermodynamischen Anteil

$$\mathcal{H}_\rho := \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}; \qquad [\mathcal{H}_\rho] = \frac{L^2}{F}$$

und einem elastostatischen Anteil

$$\mathcal{H}_A := \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Zusammen:

$$\mathcal{H}_{eff} := \mathcal{H}_\rho + \mathcal{H}_A.$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Einsetzung in Konti:

$$\int_0^L \frac{\partial p}{\partial t} \, \rho A \, K_{eff} \, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

Zwei Spezialfälle

1) 0D - Spezialfall (Hydrostatik)

2) 1D - Spezialfall (Wellenausbreitung)

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

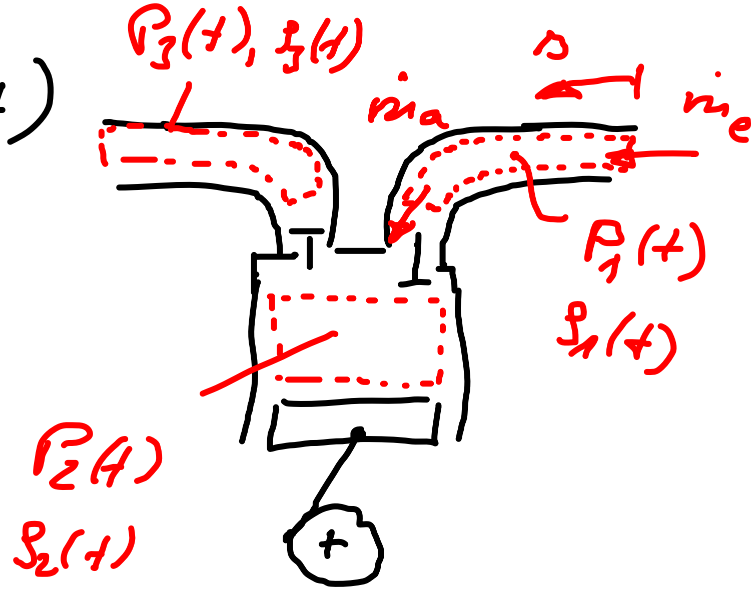
Zu 1) Hydrostatik

Was ist Hydrostatik?

Alle thermodynamischen Größen (Druck, Dichte) sind homogen im Raum und sind nur von der Zeit abhängig.

$p(t)$; $\rho(t)$

z.B. Verbrennungsmotor.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

Kontigleichung für die hydrostatische Spezialfall

allg. $\int_0^L \frac{\partial p}{\partial t}\, \rho A\, \mathcal{K}_{eff}\, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$

spez. $\frac{dp}{dt}\, \rho V \mathcal{K}_{eff} - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$

$$\boxed{\frac{dp}{dt}\, \underbrace{V \mathcal{K}_{eff}}_{C_H} - \dot V_1 + \dot V_2 = 0}$$

Druckaufbaugleichung.

$C_H = V \mathcal{K}_{eff}$ hydraulische Kapazität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Analogie zur Elektrotechnik

$I \;\hat{=}\; \dot{V}$

elektrischer Strom — Volumenstrom

$U \;\hat{=}\; p$

elektrische Spannung — hydrostatischer Druck

$C \;\hat{=}\; C_H = V K_{eff}$

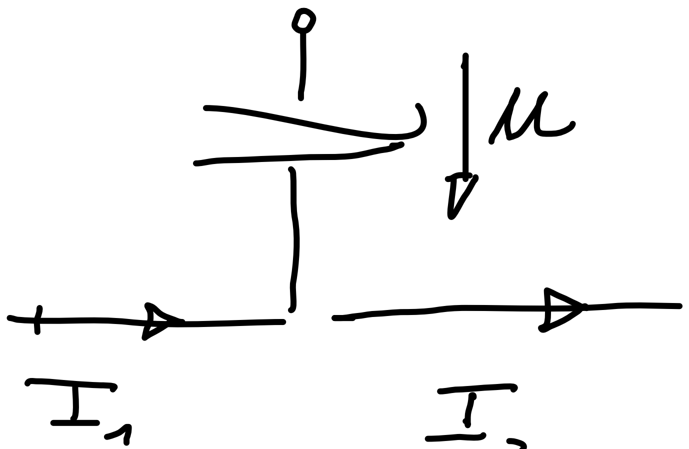
Kapazität eines Kondensat. — Kapazität einer Stromröhr.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

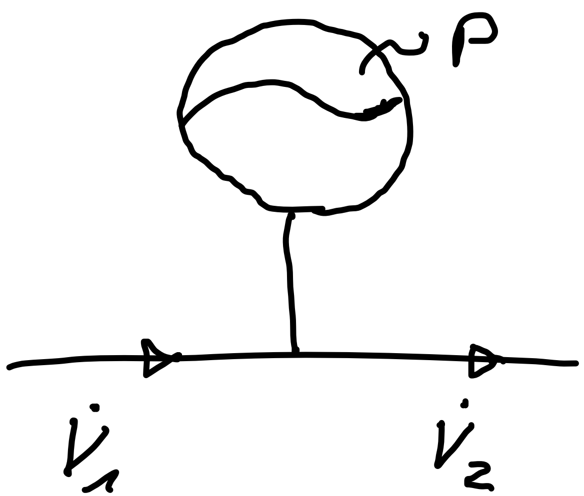
$$\frac{dU}{dt} C - I_1 + I_2 = 0$$

Kondensator



$$\frac{dp}{dt} C_H - \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0$$

Druckspeicher



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

Hydraulische Kapazität $C_H = \kappa_{eff} V$

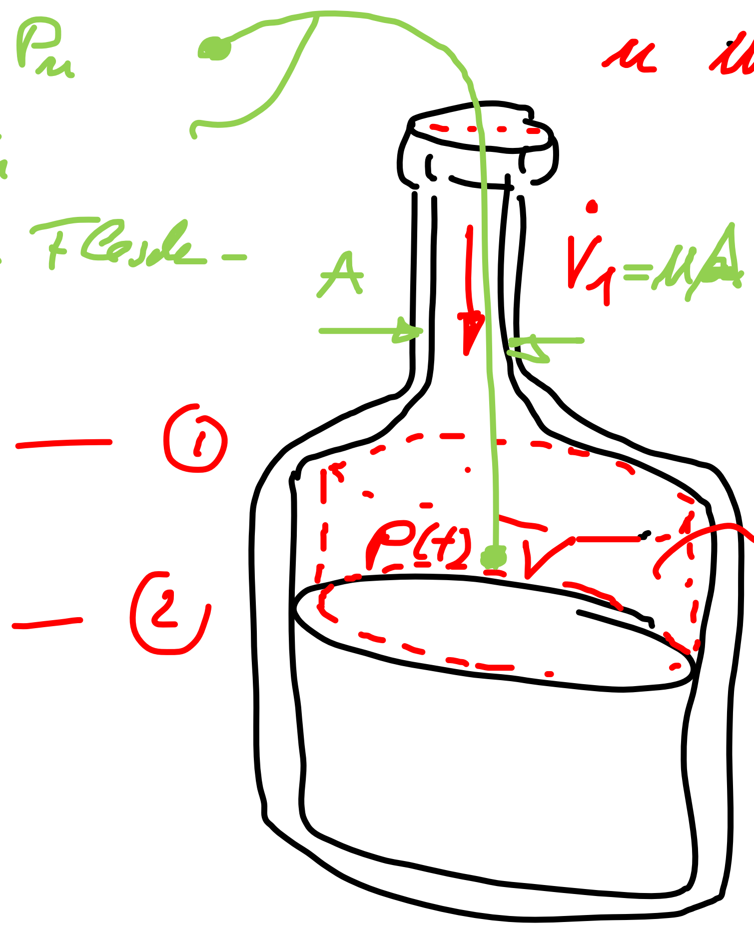
a) im System enthalten

z.B. ~~Hochblech~~ | Rotweinflasche

$u \approx 0$ $\quad p_u$

beschleunigte Strömung im Flaschenhals.

u Umgebung ∞ große Stromröhre



$$\kappa_H V \dot p - \dot V_1 = 0$$

hydraulische Kapazität.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

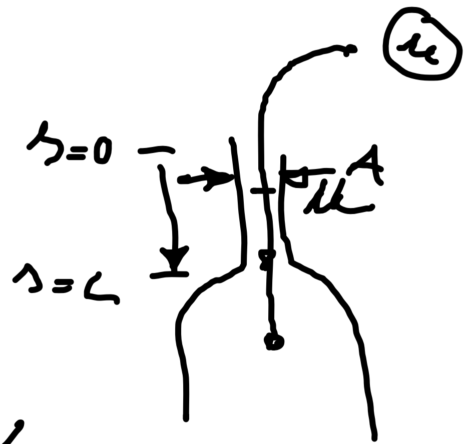
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

1. Gleichung $\qquad \dot p \, K_{eff} V = u A$

Konti

2. Gleichung

Bernoulli (keine Dichteänderung im Flaschenhals)



$$p_u = p + \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, ds$$

$$= p + \rho \dot u L$$

$$p_u - p = \rho \dot u L \qquad \rho L \text{ hydraulische Induktivität}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 8

$$\dot{p}\,\kappa_{eff} V = u A$$ Konti:

$$p_u - p = \varrho L \dot{u} \quad \Big| \frac{d}{dt}$$ Bernoulli:

$$-\dot{p} = \varrho L \ddot{u}$$

$$\ddot{u}\,\varrho L \kappa_{eff} V + u A = 0$$

$$\ddot{u} + \underbrace{\frac{A}{\varrho L \kappa_{eff} V}}_{\omega^2} u = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{\rho L \kappa_{eff} V}}$$ Eigenfrequenz.

$$\kappa_{eff} := \cancel{\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$$

Frage: Ist die Zustandsänderung isentrop ($s = const$) oder isotherm ($T = const$)?

isentrop: typische Zeit $\ll$ Diffusionszeit für die Temp $\frac{L^2}{a}$

isotherm: typische Zeit $\gg$ Diffusionszeit $\frac{L^2 \rho c_p}{\lambda}$

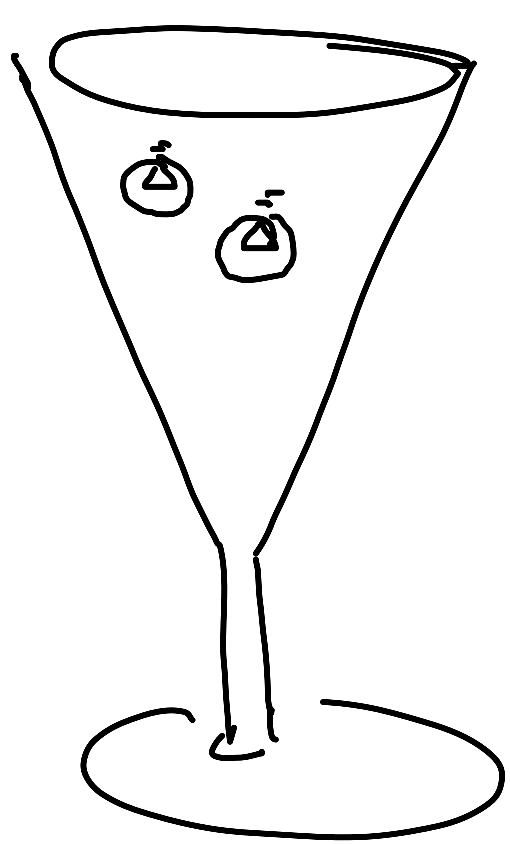
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

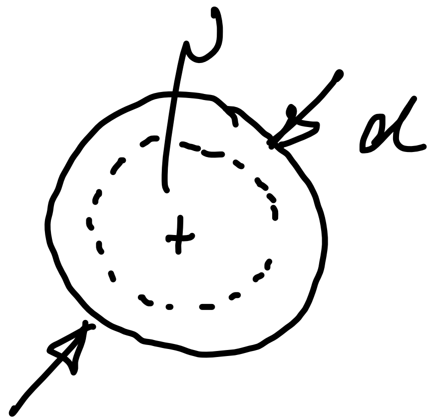
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



isotherme Zustandsänderung.



$f \gg \frac{a}{d^2}$ isentrop

$f \ll \frac{a}{d^2}$ isotherm

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

Für den isentropen Fall gilt
($s = \text{const}$)

$$\frac{1}{\varrho} \gg \frac{a}{c^2},$$

dann gilt die isentrope Zustandsgleichung

$s = \text{const}$: $$p = p(\varrho, \underset{\text{const.}}{\underset{\shortparallel}{s}}) = \underbrace{p(\varrho)}_{\text{barotrope Zustandsgleichung.}} = C \varrho^{\gamma}$$

Isentropen-exponent.
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = \frac{7}{5} \text{ für ein}$$

zweiatomiges Gas.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\left.\begin{aligned} \kappa_{eff} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} \\ p &= C\rho^{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \kappa_{eff} = \frac{1}{\gamma p} \qquad s = \text{const.}$$

Für den isothermen Fall

$$T = \text{const} \qquad p = p(\rho, \underbrace{T}_{\text{const}}) = p(\rho) = \underbrace{RT}_{\text{const}}\,\rho$$

$$\kappa_{eff} = \frac{1}{p} \qquad T = \text{const.}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Eigenfrequenz für die Rotweinflasche.

$$\omega = \sqrt{\frac{A\,\gamma\,p}{\varrho\,L\,V}}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma R T\,A}{L\,V}}$$

$$= a\sqrt{\frac{A}{L\,V}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

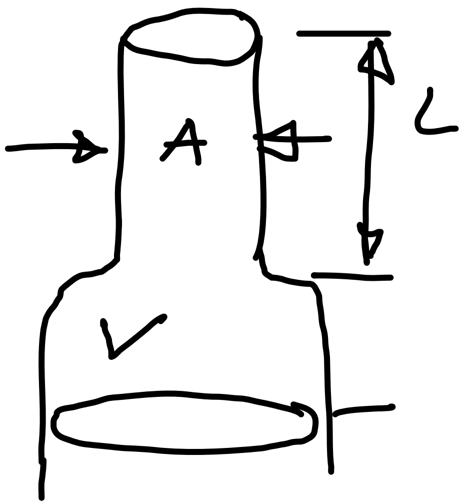
$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

Schallgeschwindigkeit für ein ideales Gas.

$$\omega = a\sqrt{\frac{A}{L V}}$$

Eigenfrequenz des Helmholtzresonators.

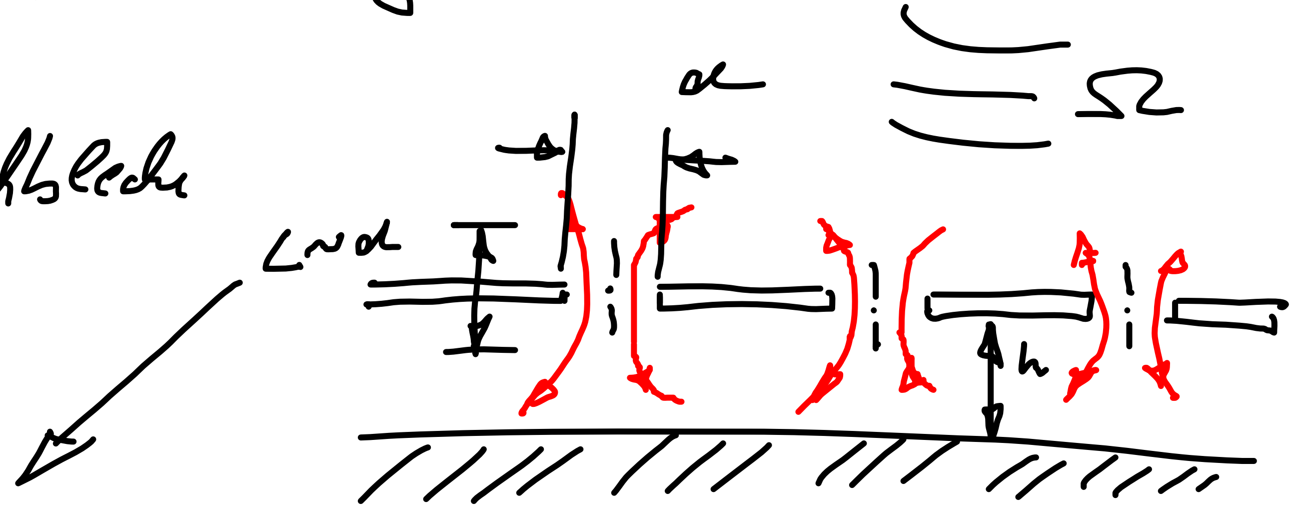
Helmholtzresonator.



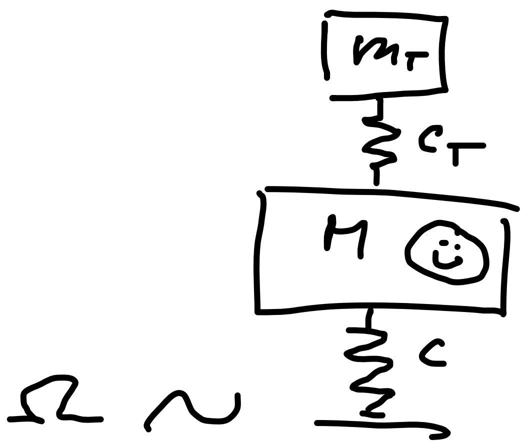
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Technische Anwendung für Helmholtzresonatoren.

Lochbleche



Lord Rayleigh: Theory of Sound

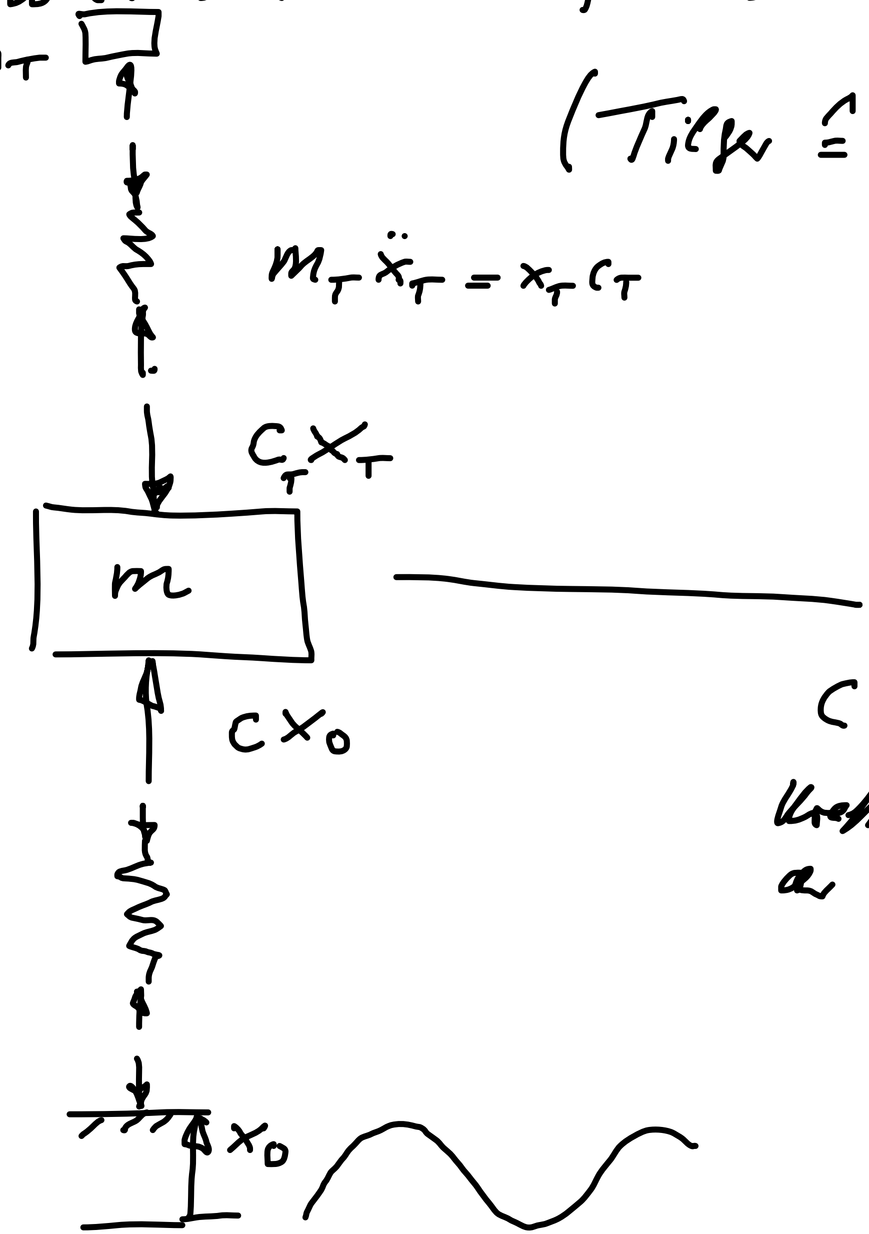


$$\omega_T = \sqrt{\frac{c_T}{m_T}} = \Omega$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

Helmholtzresonator ≙ Fluidtechnischer Tilger

(Tilger ≙ dynamic absorber)



$$m_T \ddot{x}_T = x_T c_T$$

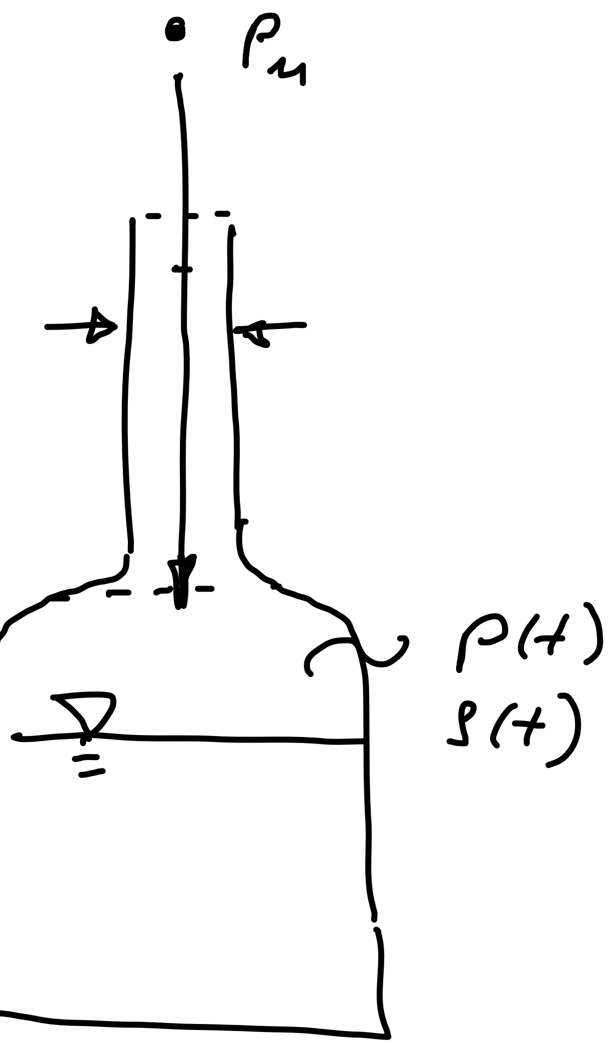
$$c x_0 = c_T x_T$$

Kräftegleichgewicht an der Masse m.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8



Dichtebeständige Strömung im Flaschenhals.

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = 0}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

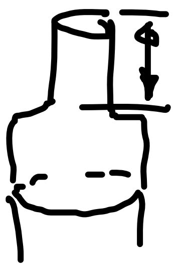
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 8

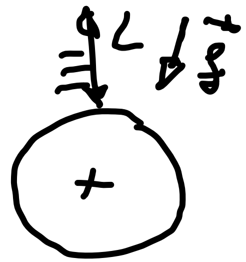
Drei Bedingungen für $\frac{D\rho}{Dt} = 0$:

1.) $\left(\frac{u}{a}\right)^2 \ll 1$ $\quad Ma = \frac{u}{a}$ Machzahl.

2.) $\left(\frac{f L}{a}\right)^2 \ll 1$ $\quad$ Wichtig bei schwingenden Systemen insbes. Akustik.



3.) $\frac{g L}{a^2} \ll 1$ $\quad$ Wichtig in der Meteorologie



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

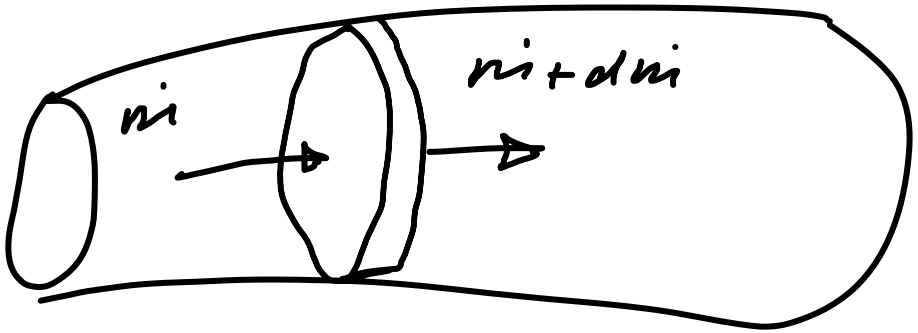
Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 8

2. 1D-Modell

$$\int_0^L \frac{\partial p}{\partial t} \kappa_{eff} \rho A \, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$$



$$ds \quad \frac{\partial p}{\partial t} \kappa_{eff} \rho A - \cancel{\dot m} + \cancel{\dot m} + d\dot m = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} \kappa_{eff} \rho A + \frac{d\dot m}{ds} = 0}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz