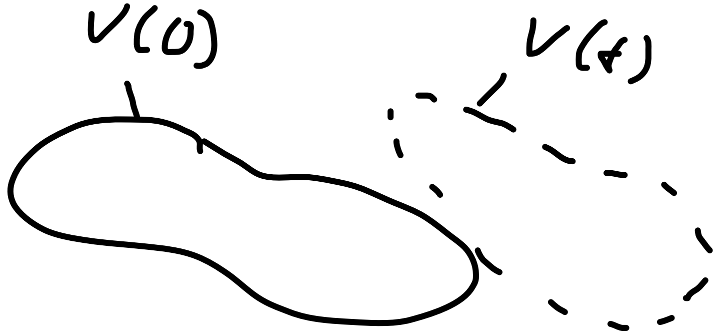
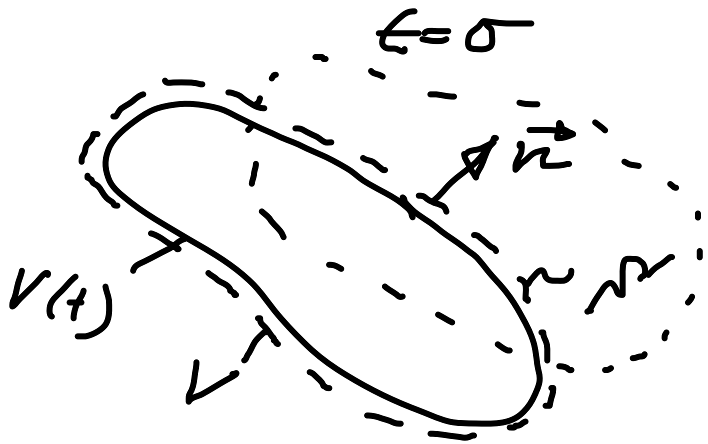
$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$




$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

$$\int_V \frac{D\rho}{Dt}\, dV + \int_V \rho \underbrace{\frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt}}_{\mathrm{div}\,\vec{u}}\, dV = 0$$

$$\int_V \frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}\,\vec{u}\; dV = 0$$




$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

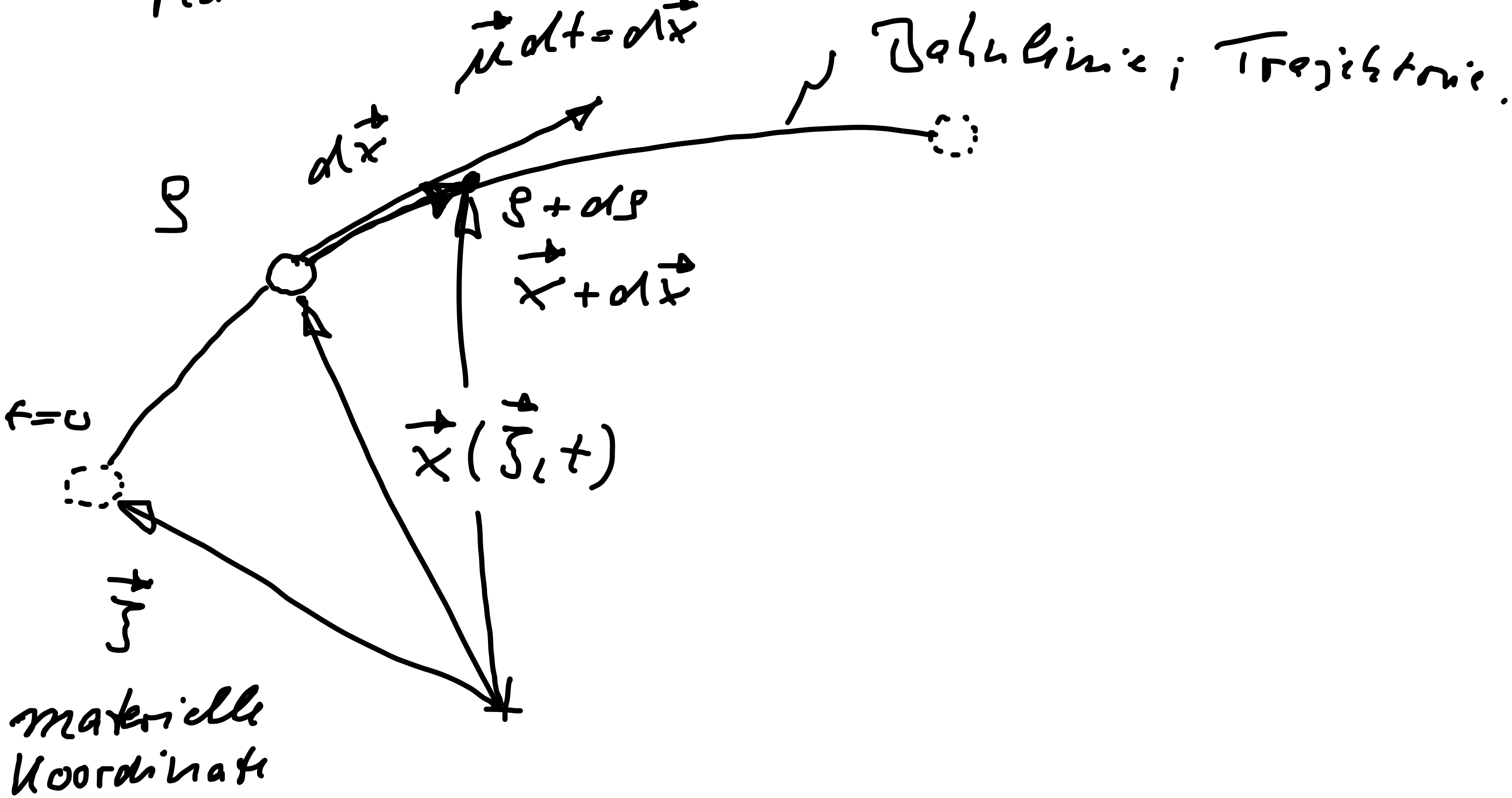
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$\boxed{\frac{D\varrho}{Dt} = ?}$$

~~Ma~~ zeitliche materielle Änderg der Dichte.







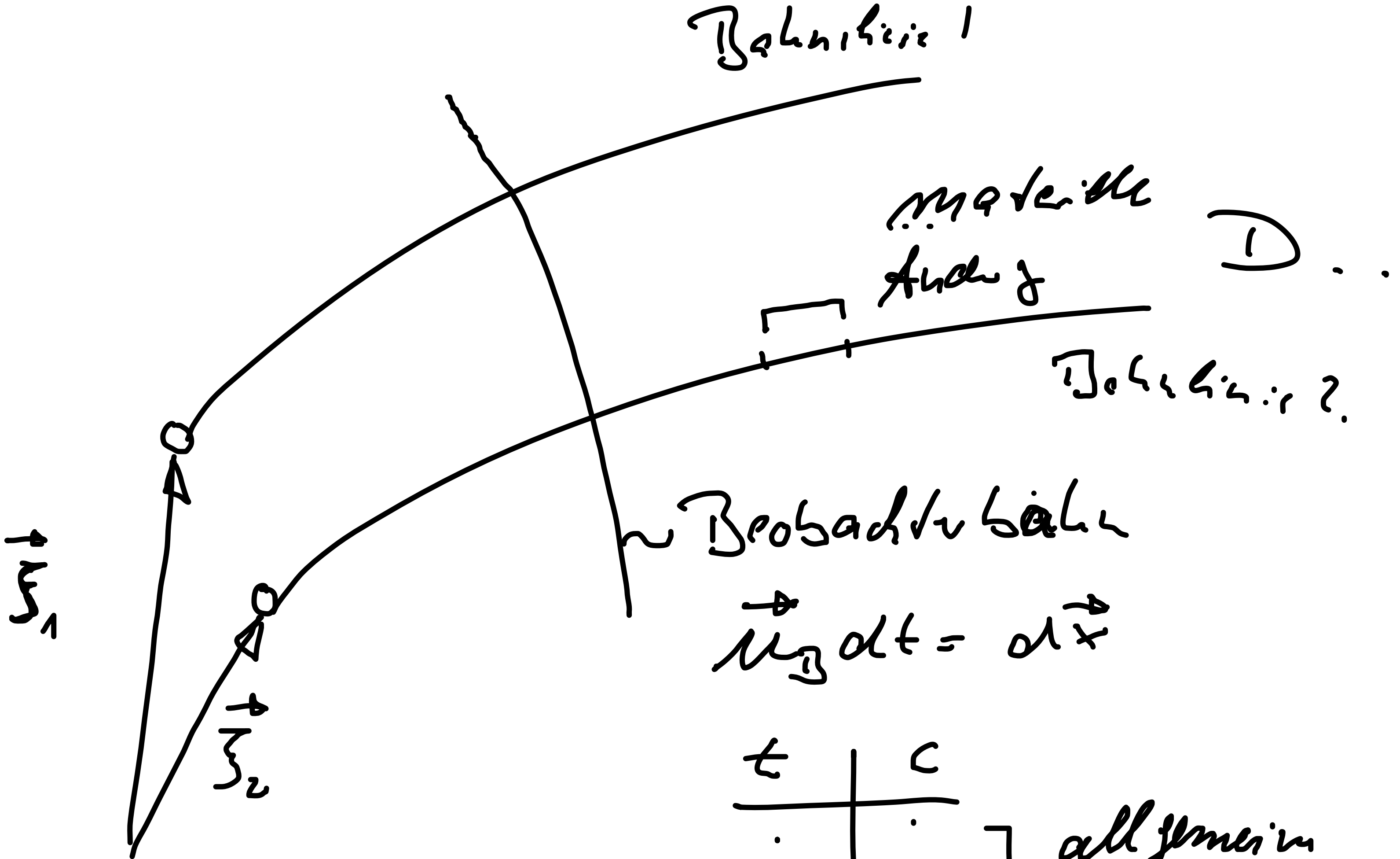
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz


Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7




$$\vec{u}_B \, dt = d\vec{x}$$

| t | c |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |

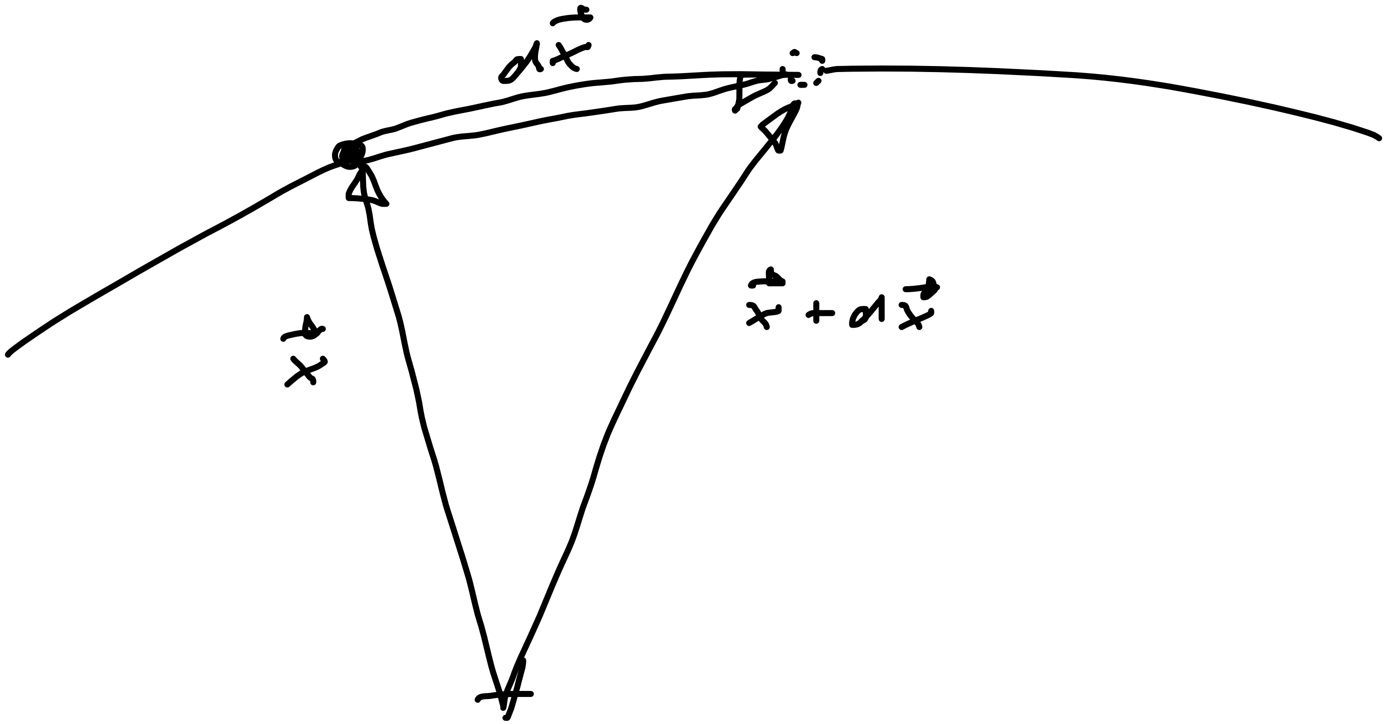
] allgemeine Änderung d...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$d\rho = \rho(\vec{x}+d\vec{x},\, t+dt) - \rho(\vec{x},\, t)$$




$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt + \nabla\rho \cdot d\vec{x} \qquad \text{Taylor-Entw.}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt + d\vec{x} \cdot \nabla \rho$$

1. Möglichkeit

Beobachter $\quad d\vec{x} = \vec{u}_B \, dt$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt + \vec{u}_B \cdot \nabla \rho \; dt$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}_B \cdot \nabla \rho$$

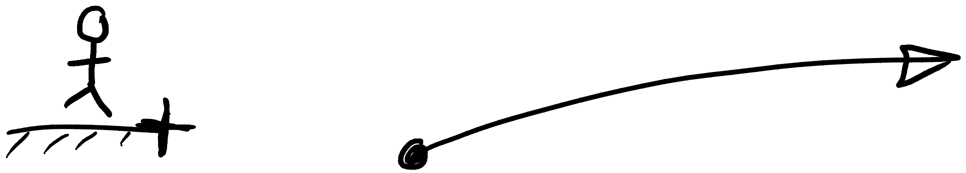
2. Möglichkeit

Beobachter = Bahn $\quad d\vec{x} = \vec{u}\, dt$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho$$

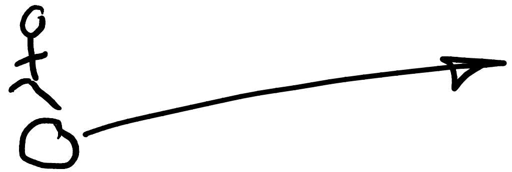
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

## Eulersches Bezugssystem



$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{lokale Änder.}} + \underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\phi}_{\text{konvektive Änd.}}$$

## Lagrange



$$\frac{D\phi}{Dt} \quad \checkmark$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

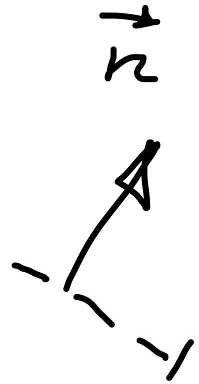
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\, \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \, \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{u})} \, dV = 0$$

$dA$



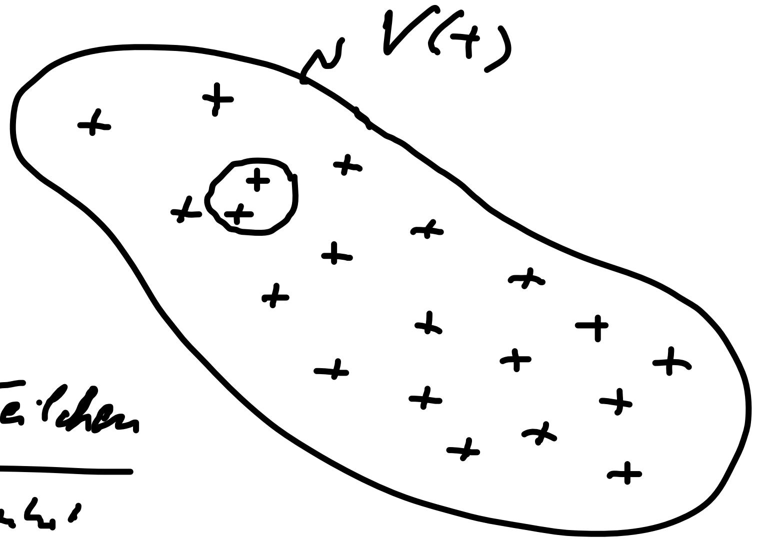

$$\text{Gauß} \quad \nabla \cdot (\vec{\phi}) \, dV = \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, dA$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV + \oint_S \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

$V$ = Kontrollvolumen

$S$ = geschlossene Oberfläche des Kontrollvolumens




Verallgemeinerung

Skalare Größe

z.B. Konzentration

$$c = \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{\text{Volumeneinheit}}$$

$$\{c\} = \frac{mol}{m^3}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

gesamt Teilchenzahl    Stoffmenge

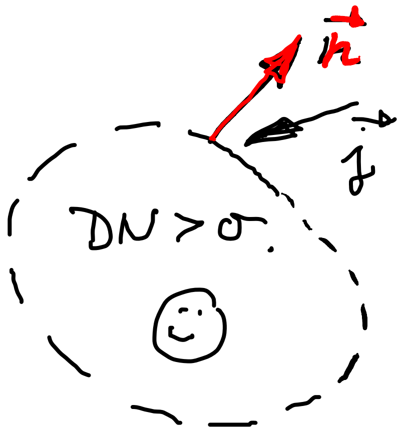
$$N = \int_{V(t)} c \, dV$$

Reaktionsrate pro Volumeneinheit    Stoffstromvektor.

$$\frac{DN}{Dt} = \int_V r \, dV - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

$\vec{n}$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} c \, dV = \dots\dots$$





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz


Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 7

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Reynoldsche Transporttheorem.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} c\,dV = \ldots$$

lokal, momentane Änd + Fluß von c über die Oberfläche

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} c\,dV + \oint_{S} c\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \ldots$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{c}$$

lokale Änd  konvektive Änd.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

Reynoldssches Transporttheorem

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \vec{\phi}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{\phi}\, dV + \oint_S \vec{\phi}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \vec{\phi}\, \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \int_V \frac{D\vec{\phi}}{Dt}\, \rho\, dV$$

$$\frac{D\, dm}{Dt} \underset{\text{Konti}}{=} 0$$


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

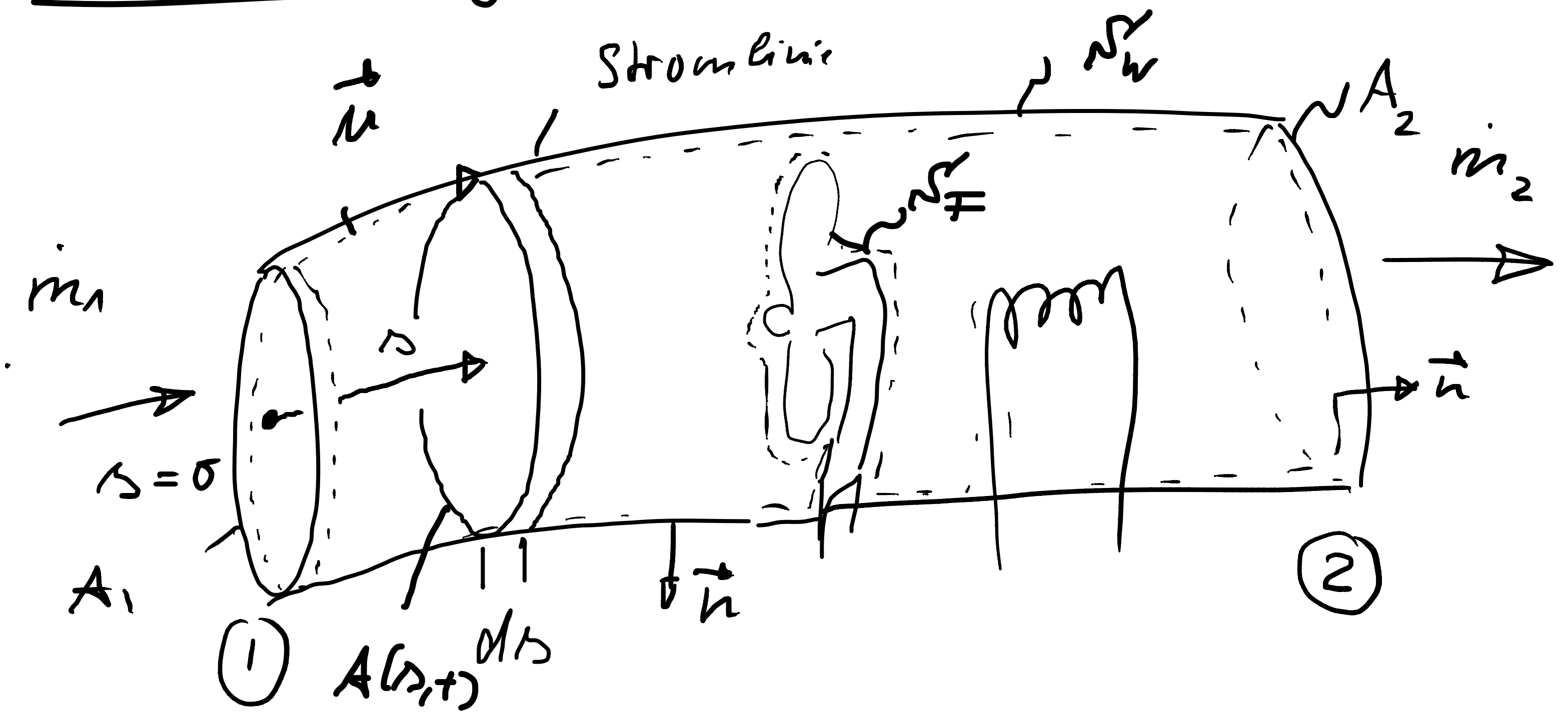
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

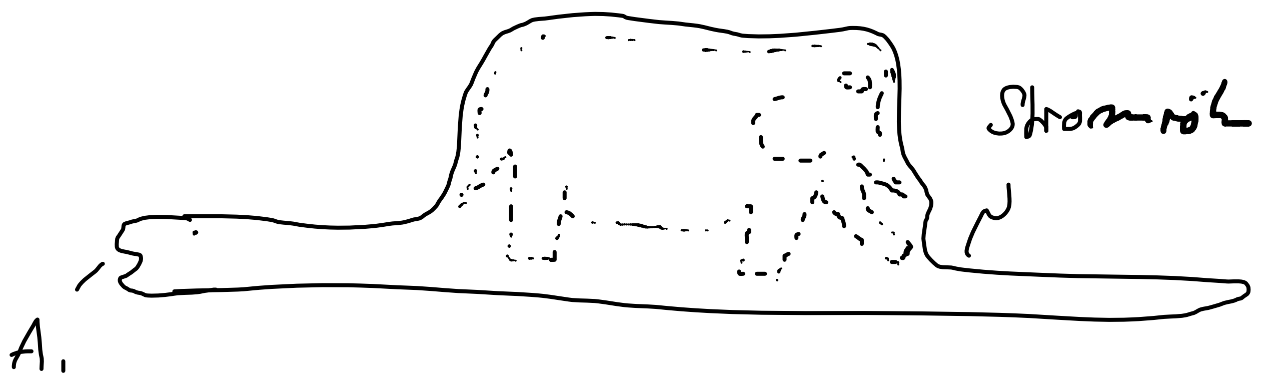

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 7

# Kontigleichg für eine Stromröhre.




TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

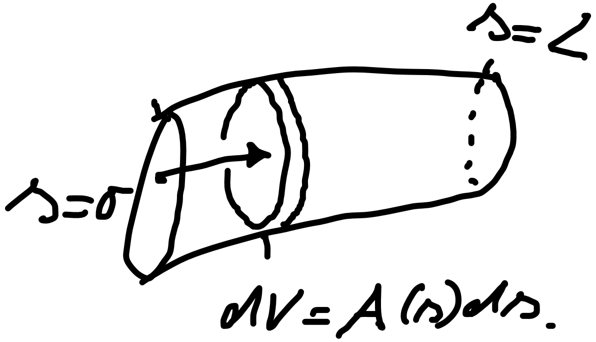
geschlossene Fläche

$$S = A_1 + A_2 + S_W + S_F$$

$S_W$ = äußere Wandfläche

$S_F$ = innere bewegte Fläche

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$




V, S sind zeitlich fix

$$dV = A(s)\,ds$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

Ziel: 3D → quasi 1D

0D

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{s=0}^{L} \rho \underbrace{A(s)\,ds}_{dV} = \int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial t} A(s,t)\,ds$$

Kontrollvolumen und zeitlich fix!

$$\oint \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \underbrace{\int_{A_1} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{-\dot m_1} + \underbrace{\int_{A_2} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{+\dot m_2} +$$

$S = A_1 + A_2 + S_W + S_F$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

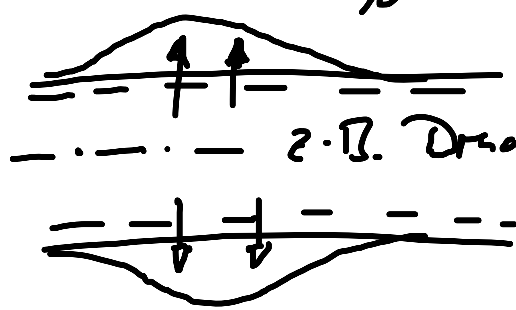
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$+\underbrace{\int_{S_F} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{=0} + \underbrace{\int_{S_W} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\neq 0 \text{ bei}}$$

nachgiebiger Rohrleitung.

$\vec{u}\cdot\vec{n} > 0.$

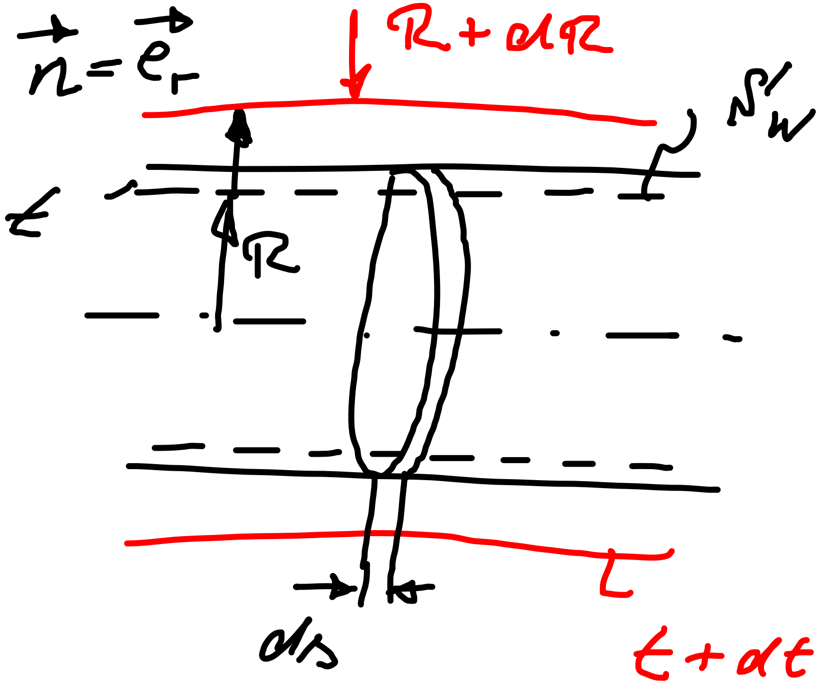


z.B. Druckwelle im nachgiebigen Rohr.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7




$$V \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV = \int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial t} A \, ds \qquad \Delta$$

Volumenintegral

$\infty$

$\|$

Oberflächenintegral

$$\int_{S'_W} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{=\frac{dR}{dt} = \dot{R}} \underbrace{dS'}_{dS' = 2\pi R \, ds} = \int_0^L \rho \underbrace{\dot{R}\, 2\pi R}_{\frac{\partial A}{\partial t}} ds = \int_0^L \rho \frac{\partial A}{\partial t} ds$$

$$A = \pi R^2 \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = 2\pi R \dot{R}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 7

$$\underbrace{\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0}_{\text{Kontigleich. für eine Stromröhr.}}$$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz