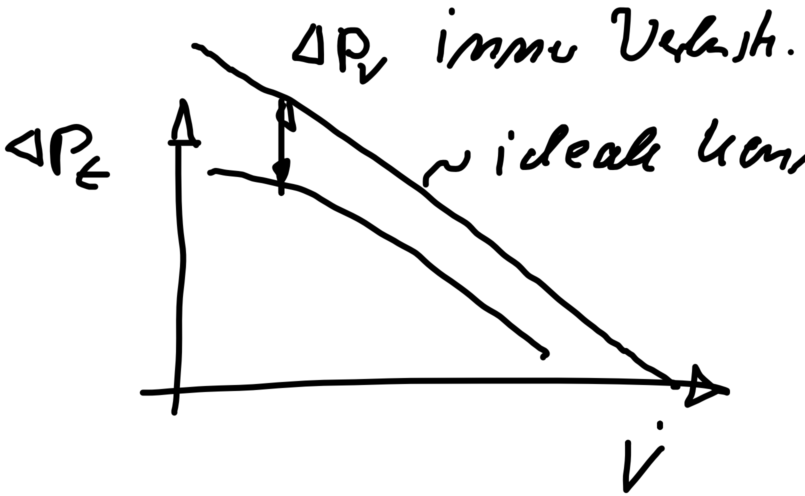
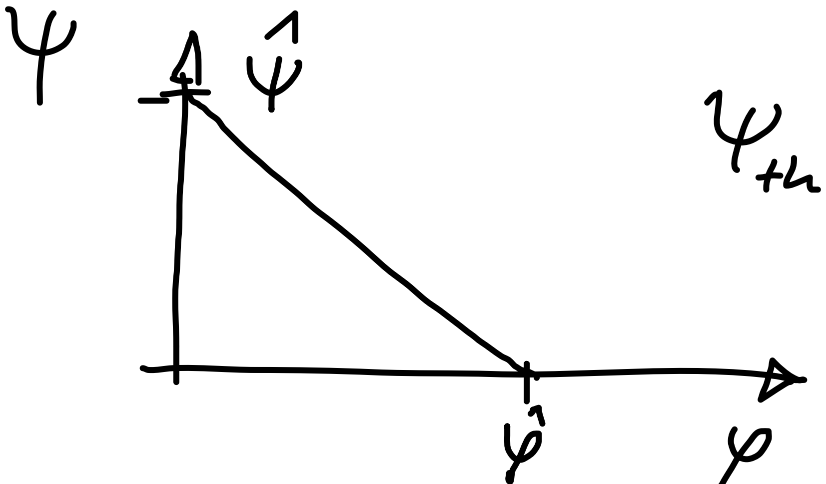
Drallsatz + Energiegleichung → Kennlinie der Maschine.




Euler-Kennlinie einer Turbomaschine.

$\psi_{th}(\varphi)$ $\quad \eta = 1$



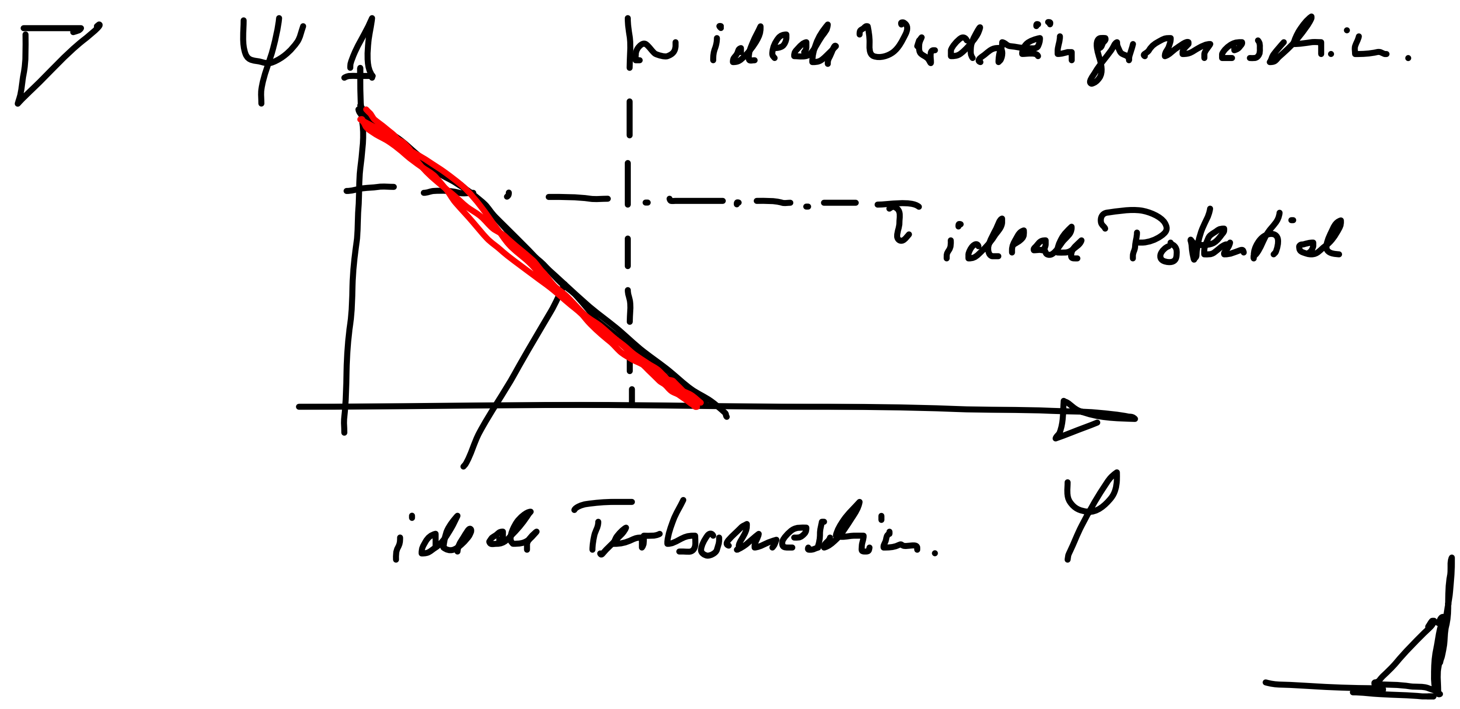

$$\psi_{th} = \hat{\psi}\left(1 - \frac{\varphi}{\hat{\varphi}}\right)$$

$\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$ dimensionslose Maschinenparameter, die allein durch die Gestalt der Maschine festgelegt sind.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10







Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

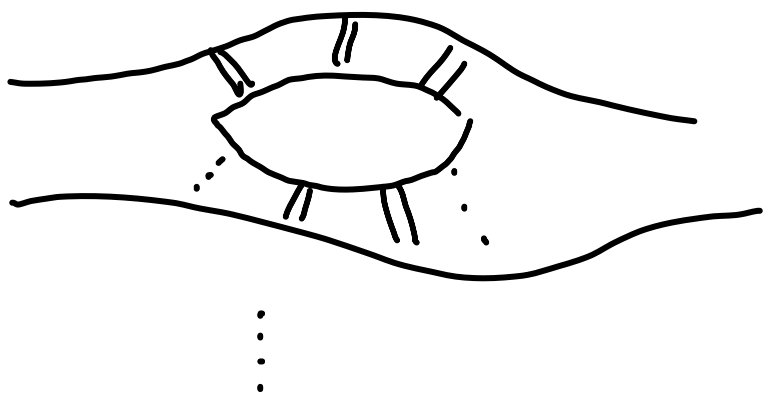
**Drallsatz**: Die zeitliche Änderung des Dralles eines materiellen Volumens/Körpers ist gleich dem Moment auf den materiellen Körper.

**Leonhard Euler 1775**

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k}$$ Euler Gleichung für reibungsfrei

↳ Eulersche Turbinengleichung

↳ Begründung der Diskreten Mechanik.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

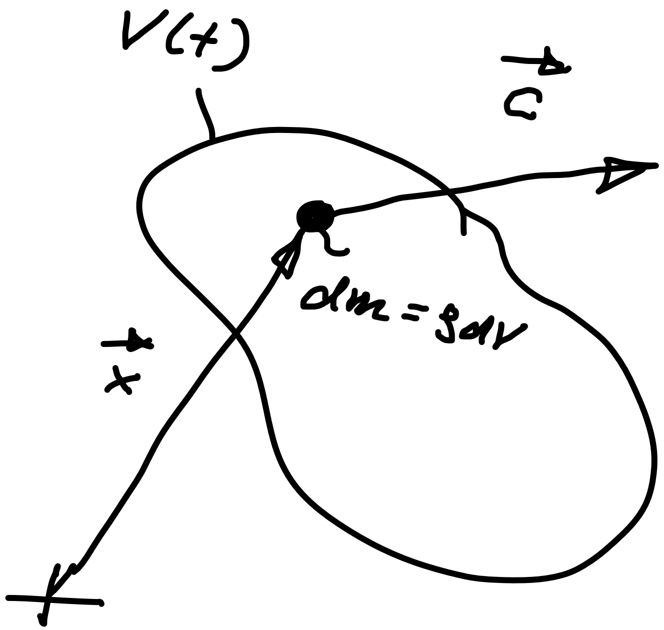
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

- Drallsatz ist für deformierbare Medien (Flüssigkeit) unabhängig vom Impulssatz.

- ⇝ Trägheiten, Dichte $\rho$ sind wichtig für den Drallsatz.

$$\underbrace{\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M}}$$



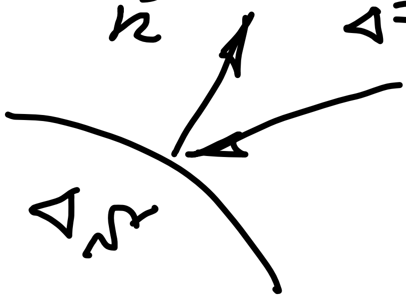

$$\vec{D} = \int d\vec{D} = \int_{V(t)} \underbrace{\vec{x} \times \rho \vec{c}\, dV}_{\text{Drall eines Flüssigkeitsteilchens}}$$

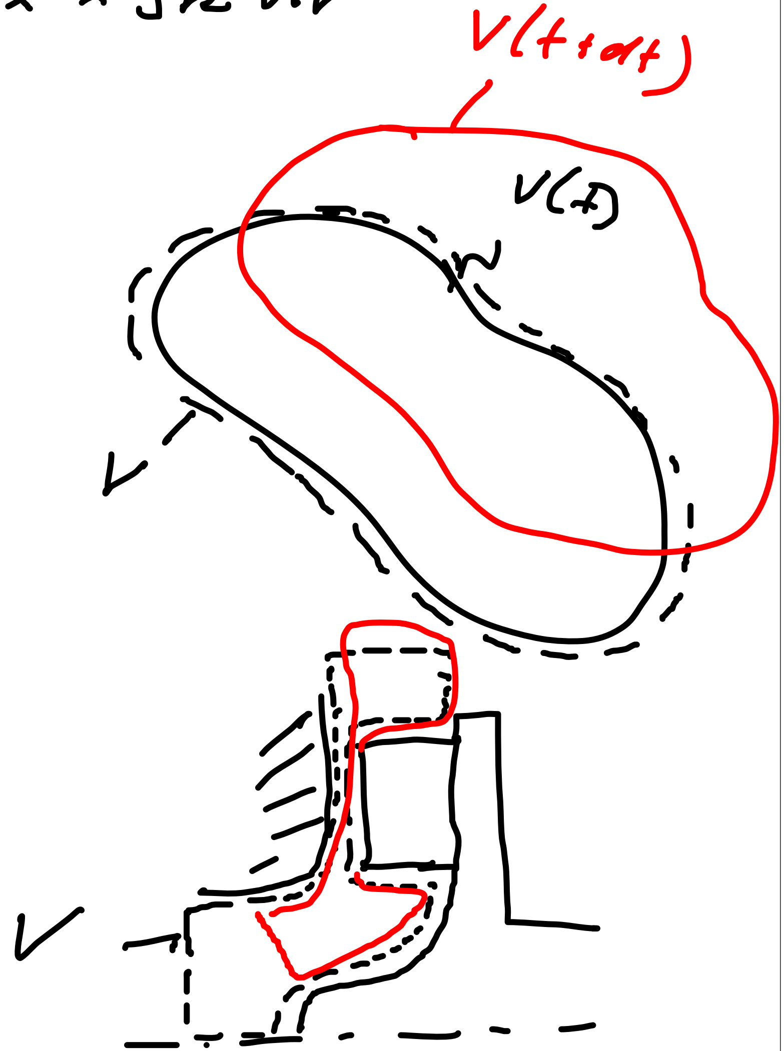
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

$$\vec{M} = \oint_{S} \vec{x} \times \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{x} \times \rho \vec{k}\, dV$$

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$ Spannungsvektor.

$$\Delta \vec{F} = \vec{t}\, \Delta S$$




$$\rho \vec{k} = \vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$$

$\vec{f} = \rho \vec{k}$ Volumenkraft.

$\vec{k}$ Massenkraft.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

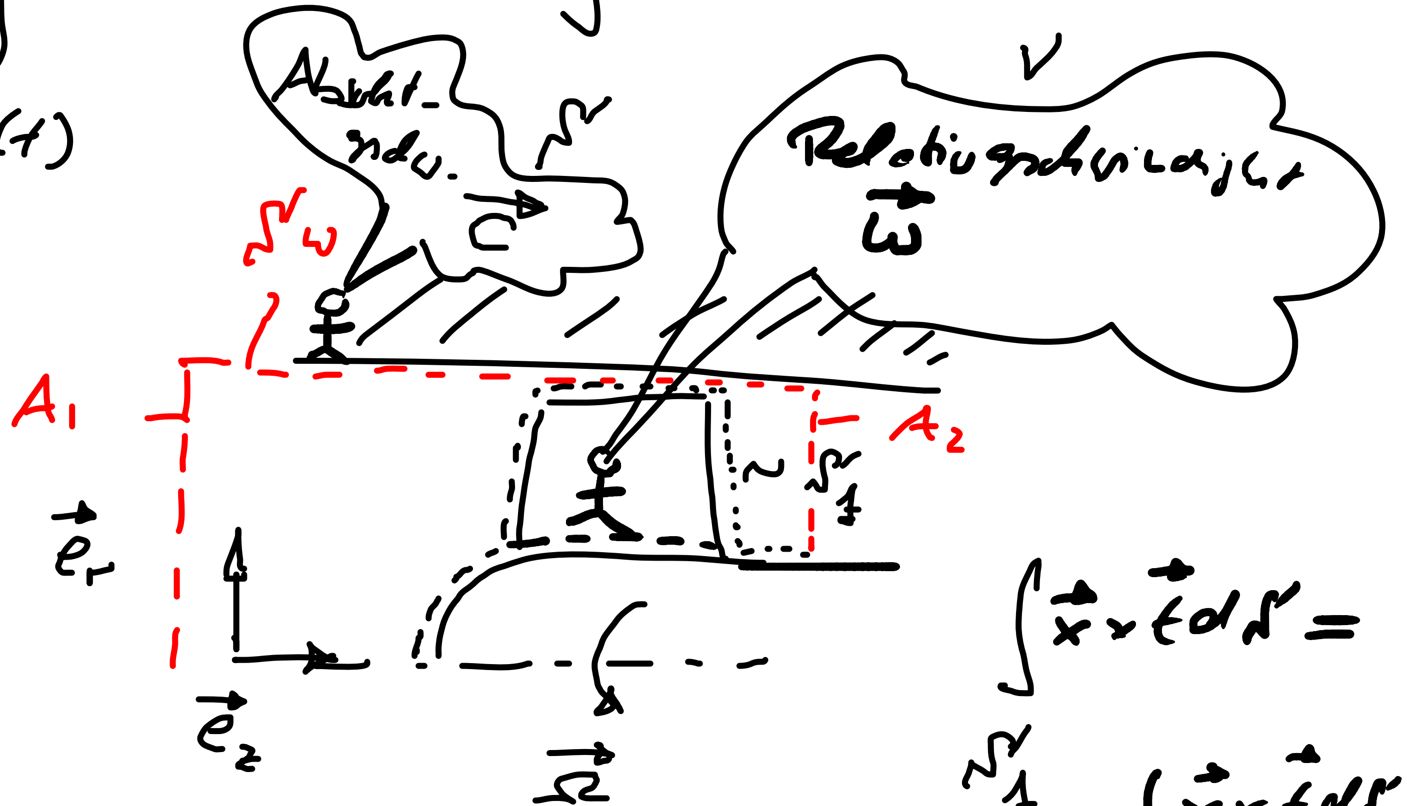

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz


Sommersemester 2011

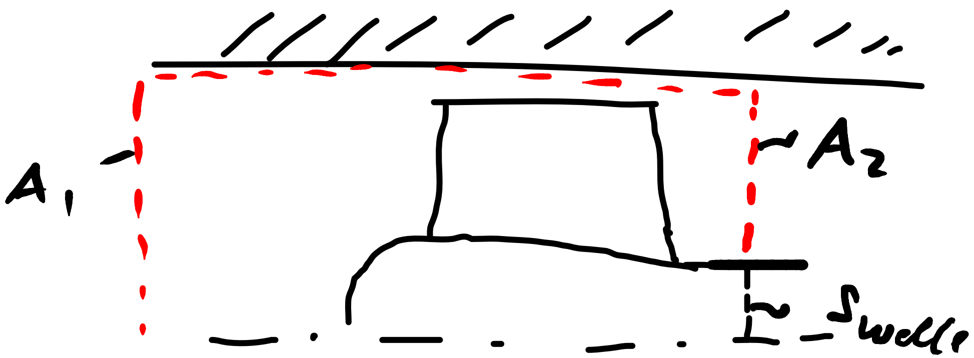
Fluidenergiemaschinen

Vorlesung 10

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c}\, dV = \oint_S \vec{x} \times \vec{t}\, dS + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k}\, dV$$




$$\int_{S_1} \vec{x} \times \vec{t}\, dS = \int_{S_{Welle}} \vec{x} \times \vec{t}\, dS = \vec{M}_{M \to Fl}.$$




TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

Absolutgeschwindigkeit $\vec{c}$

Relativgeschwindigkeit $\vec{w}$

Umfangsgeschwindigkeit $\vec{u} = \Omega r \vec{e}_\varphi$

Führungsgeschwindigkeit $\vec{v}$

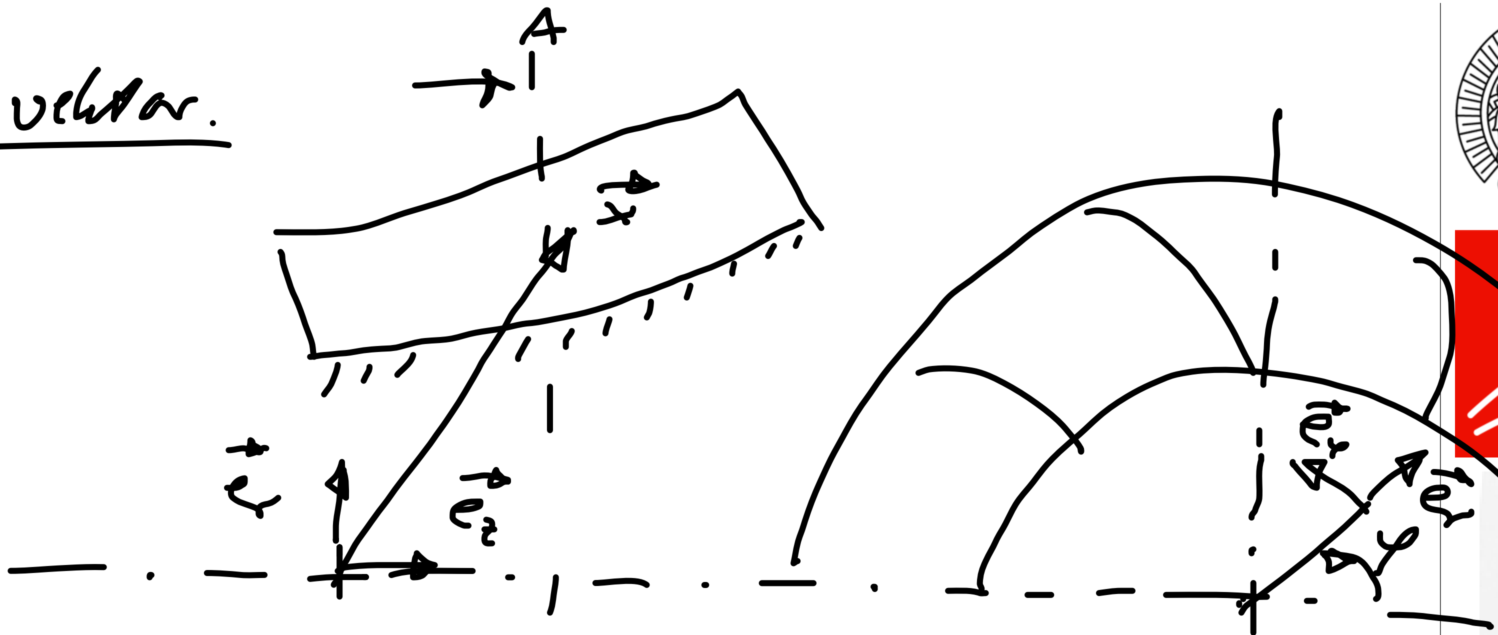
$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \left( + \vec{v} \right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Ortsvektor.




In Zylinderkoordinaten $\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

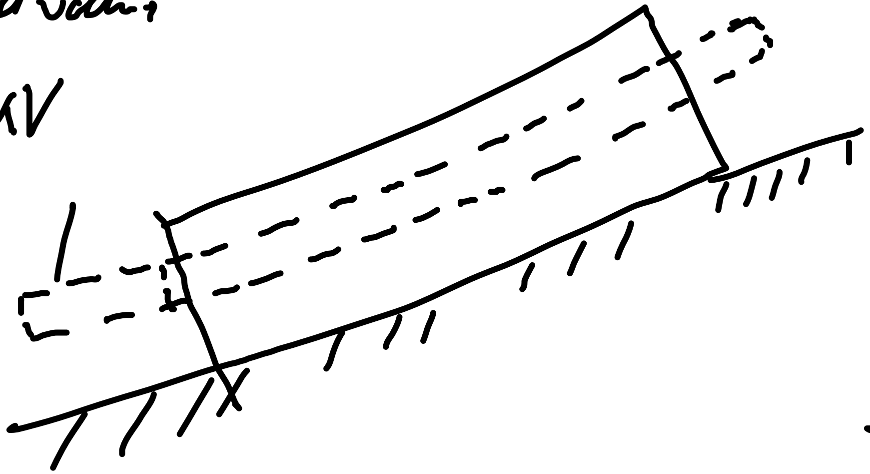
$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$$
$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

Anmerkung $\vec{c} = c_\varphi \vec{e}_\varphi + c_r \vec{e}_r + c_z \vec{e}_z$

"u" "u" „Umfang".

Kontrollvolumen

KV



$$P_A = \vec{M}_{M\to Fl} \cdot \vec{\Omega} = \underline{\underline{M_z \Omega}}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z .$$

$$\vec{M}_{M\to Fl} = M_z \vec{e}_z + \underbrace{M_r \vec{e}_r + M_\varphi \vec{e}_\varphi}.$$


$M_r$ und $M_\varphi \neq 0$ für

Drallkomponente in r und φ-Richt.

↳ Unwucht oder Teilbeaufschlagung

einer Maschine.


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

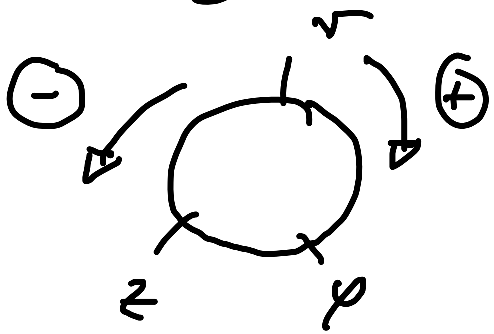
Sommersemester 2011

Fluidenergiemaschinen

Vorlesung 10

Nur die axiale Komponente des Drallsatzes ist für die Strömungsmaschine wichtig!

$$(\vec{x}\times\vec{c})\cdot\vec{e}_z = \left[(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)\times(c_r\vec{e}_r + c_\varphi\vec{e}_\varphi + c_z\vec{e}_z)\right]\cdot\vec{e}_z$$



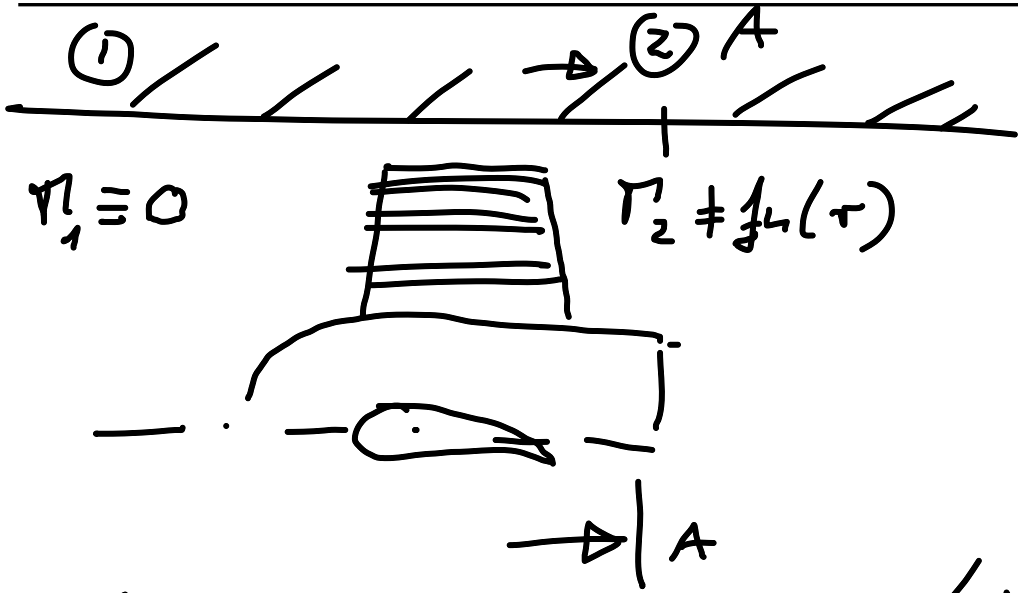

$$= r c_\varphi$$

$$\Gamma = \oint \vec{c}\cdot d\vec{x} = 2\pi r c_\varphi$$

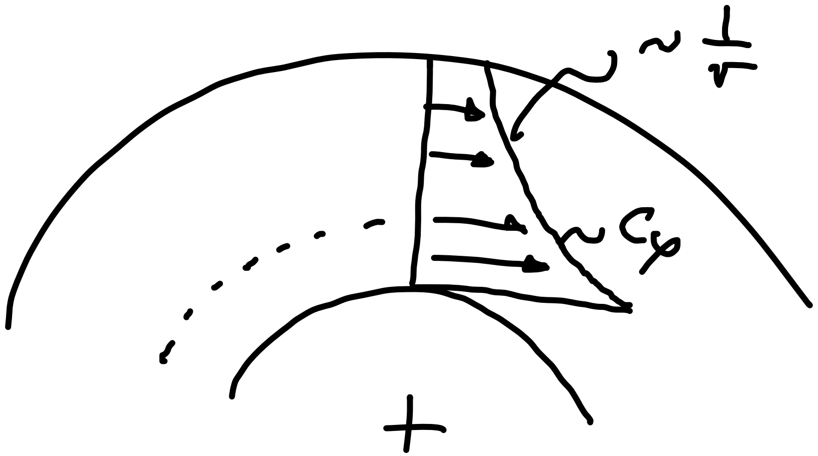
Massenspez. Drall eines Flüssigkeitsteilchens!

$$r c_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10




Schnitt A-A




## Auslegungsphilosophie:

Konstanter Drall nach dem Laufrad.

↳ $\boxed{\text{Wirbelflußmaschinen}}$

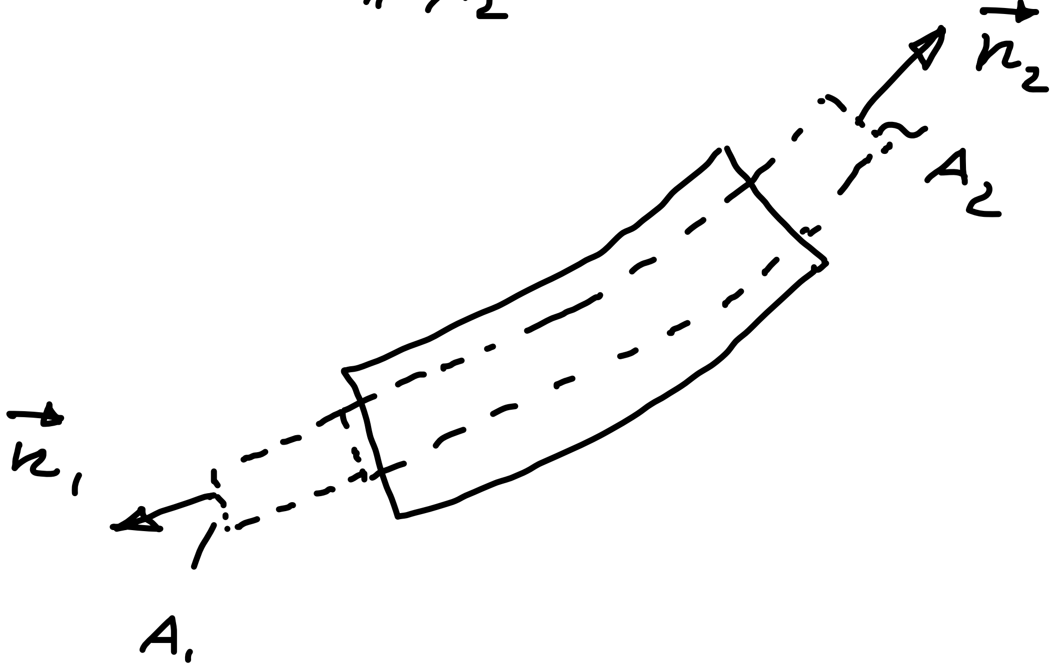
▷ über die Schaufellänge homogener Arbeitsumsatz.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, r\, c_u \, dV = M_z + \overbrace{\int_{A_1+A_2} \left[\vec{x} \times (-p\vec{n})\right]\cdot \vec{e}_z \, dA}^{=0,\ \text{da}\ n_\varphi = 0.}$$




$$\vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_z \vec{e}_z$$


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, c_u\, r \, dV = M_z .$$

Erhaltungsgröße $\vec{\Phi}$ .

- Drall $\vec{D}$
- Impuls $\vec{I}$

$$\equiv$$

$$\left[\frac{D\vec{\Phi}}{Dt}\right]_{\text{Inertialsyst.}} = \left[\frac{D\vec{\Phi}}{Dt}\right]_B + \vec{\Omega}\times\vec{\Phi} .$$

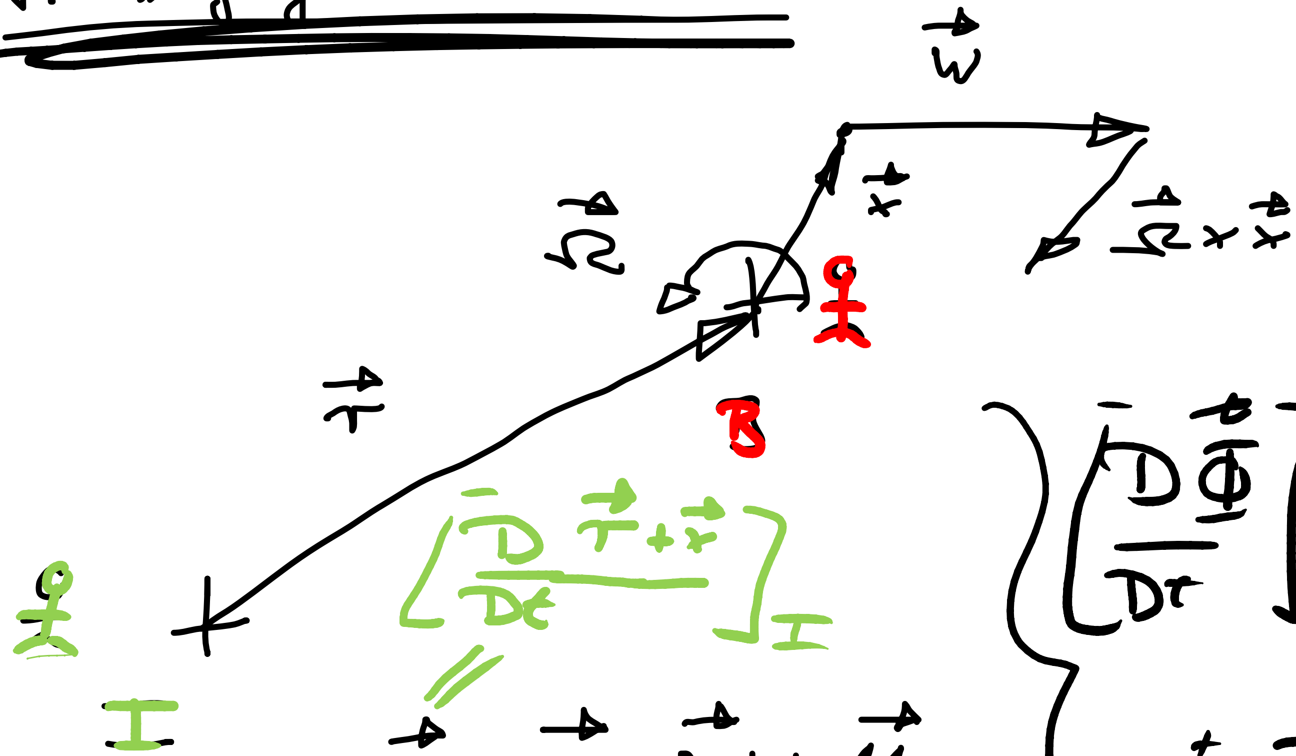
Zeitliche Änderung im Inertialsystem = Zeitliche Änd. im beschleunig +

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

## Herleitung für den Ortsvektor



$$\left[\frac{D(\vec r+\vec x)}{Dt}\right]_I = \vec c = \vec w + \vec v + \vec u$$

$$\vec u = \vec\Omega\times\vec x$$

$$\left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_B = \vec w \qquad \left[\frac{D\vec r}{Dt}\right]_I = \vec v$$

$$\left[\frac{D\vec\Phi}{Dt}\right]_I = \left[\frac{D\vec\Phi}{Dt}\right]_B + \vec\Omega\times\vec\Phi$$

$$\cancel{\left[\frac{D\vec r}{Dt}\right]_I} + \left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_I = \left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_B + \cancel{\left[\frac{D\vec r}{Dt}\right]_I} + \vec\Omega\times\vec x$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

$$\left[\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho c_u r \, dV\right]_I$$

Reynolds'sche Transportth.

Formuliert im Inertialsyst.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c_u r \, dV + \oint \rho c_u r \, \vec{c}\cdot\vec{n} \, dS = M_z$$

$I_{T\Omega}$ für eine Starrkörper.

## Im quasistationären Betrieb

$$\int_{A_1+A_2} \rho c_{u} r \, \vec{c}\cdot\vec{n} \, dS = M_z$$

Homog. Durchstr.

$$\left[(c_u r)_2 - (c_u r)_1\right]\dot{m} = M_z \, .$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

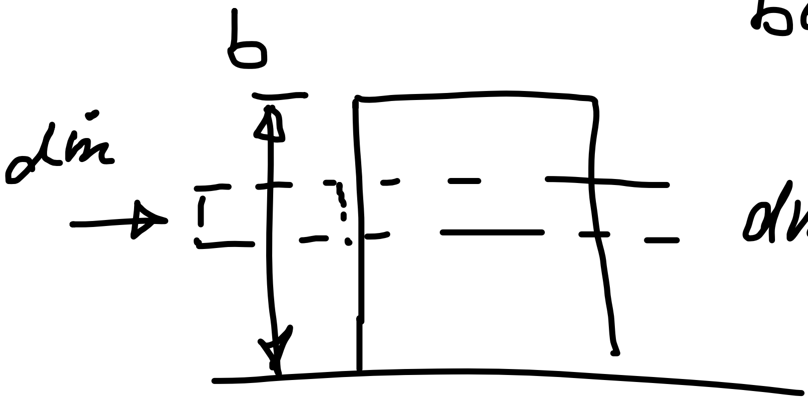
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Fluidenergiemaschinen

Vorlesung 10

bei inhomogenen Drall.




$$d\dot m \left(c_{u2} r_2 - c_{u1} r_1\right) = dM_z$$

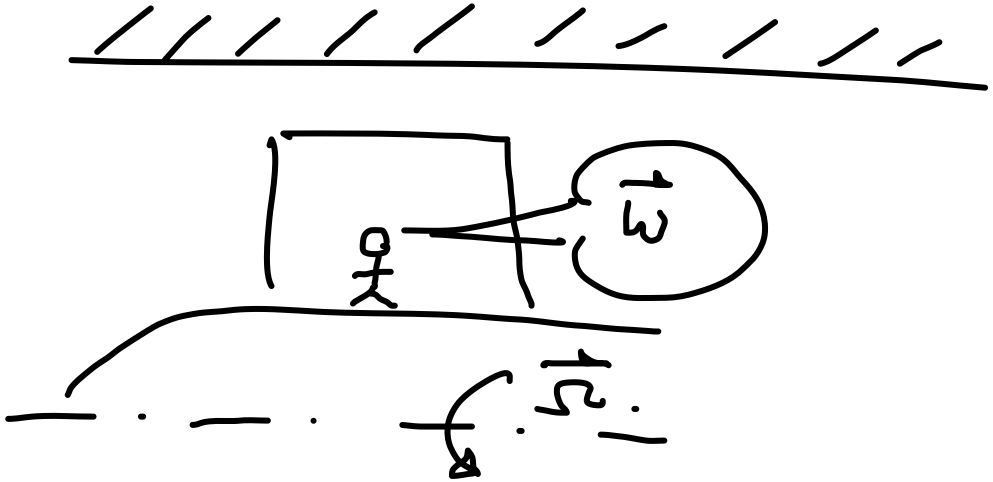
$$\boxed{\frac{dM_z}{d\dot m} = c_{u2} r_2 - c_{u1} r_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)}$$

Eulersche Turbinengleichung

gilt für stationären Betrieb.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK




$$\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{D\vec{D}}{Dt}\right]_B + \vec{\Omega} \times \vec{D} = \vec{M}.$$

$\vec{D} = D_z \vec{e}_z$ für eine gleichmäßige Rotation.

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{DD_z}{Dt}\right]_B = M_z.$$


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c_u r \, dV + \int_{\partial V} \rho c_u r \, \underline{\underline{\vec{w}\cdot\vec{n}}} \, dS = \Gamma_z .$$

$$\left[\frac{\mathfrak{D} D_z}{Dt}\right]_B$$

$$\dot{m} = \int \vec{c}\cdot\vec{n}\,\rho \, dA = \int \vec{w}\cdot\vec{n}\,\rho \, dA$$

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \qquad \vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_z \vec{e}_z$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 10