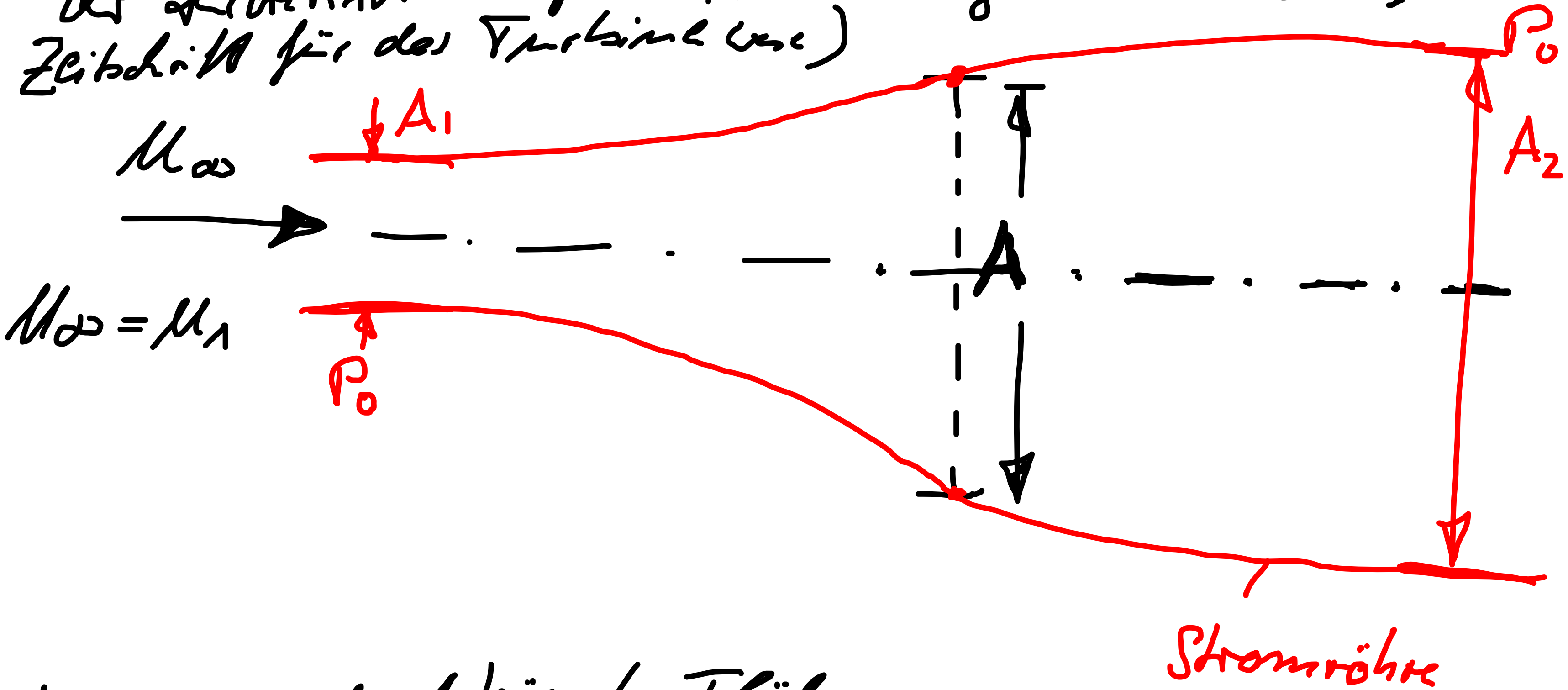
Maximale Energieausbeute aus einem Windrad. (Albert Betz 1920 Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnutzung des Windes ..., Zeitschrift für das Turbinenwesen)



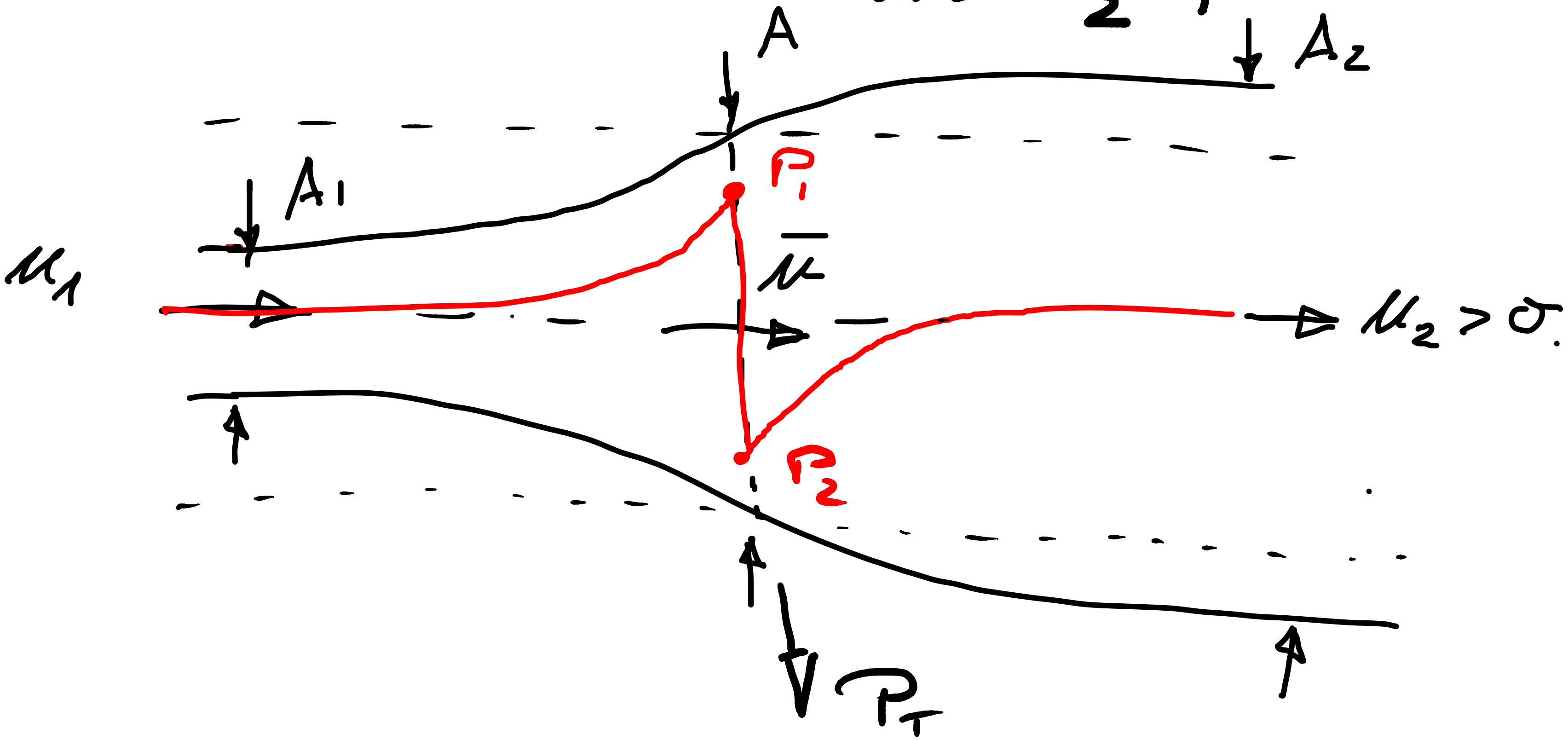
A ist die durchströmte Fläche

Siehe FST-Homepage A. Betz 1959
Einführung in die Theorie der Strömungsmaschine.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Geg: $A,\ u_1 = u_\infty,\ \rho \ \rightsquigarrow\ P_{avail} := \frac{\rho}{2} u_1^3 A$



Da inkompressible Strömung, homogene Dichte $\rho = const$

$p_0 \equiv 0$ (da nur Differenzdrücke relevant sind)

Bei kompressibler Strömung muß mit dem Absolutdruck gerechnet werden!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

<u>Definition</u> der verfügbaren Leistung

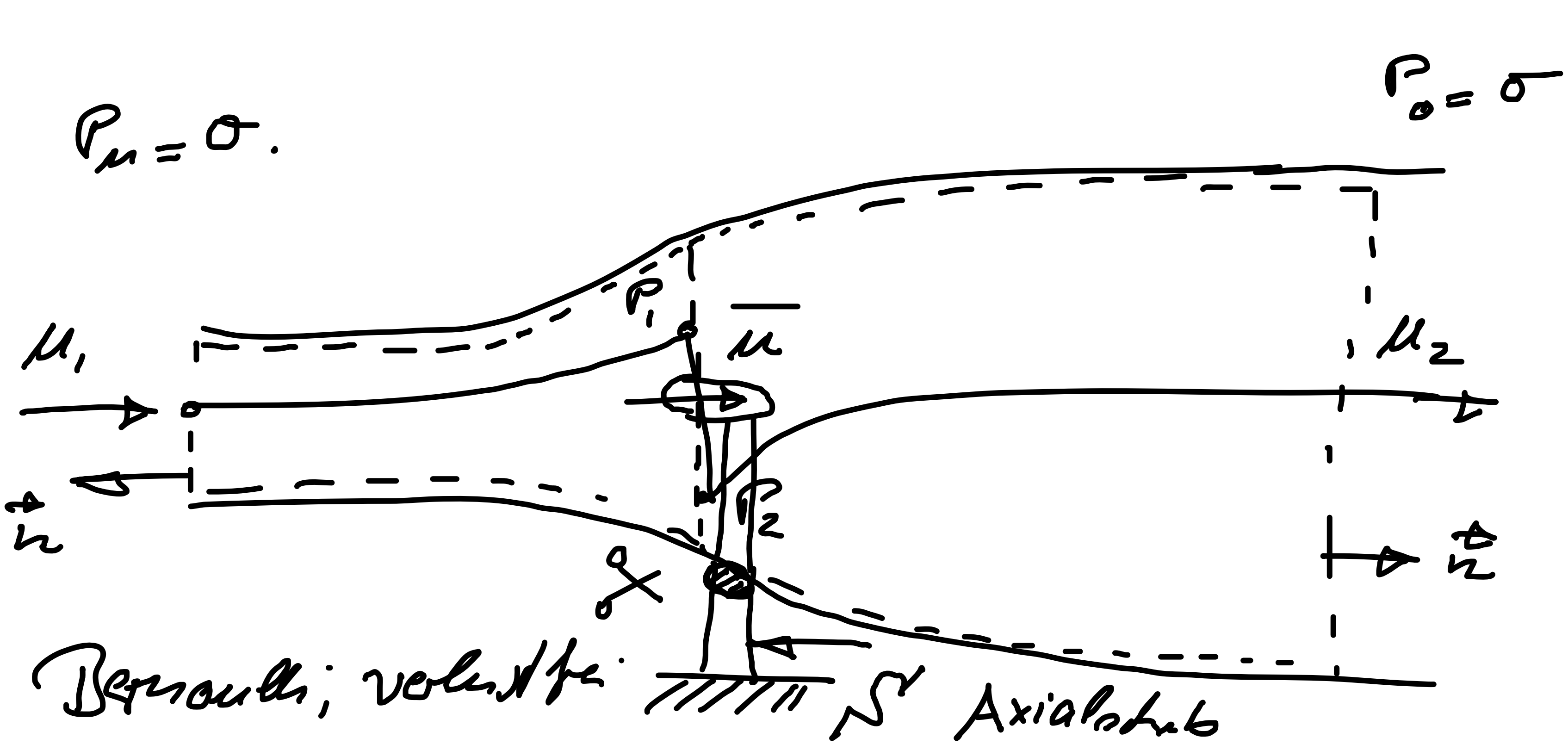
$$P_{avail} := \frac{\rho}{2} u_1^3 A$$

<u>Definition</u> des Erntefaktors (CoP Coefficient of Performance)

$$c_P := \frac{P_T}{P_{avail}}$$ Systemeigenschaft.

$$c_{P_{max}} = \eta \frac{16}{27} = \eta \; 0.59$$ Betzsche-Gesetz.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



$$\frac{\rho}{2} u_1^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \qquad p_2 + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 = \frac{\rho}{2} u_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(u_1^2 - u_2^2\right)$$
$$= \frac{\rho}{2}\left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 + u_2\right)$$

Annahme:
Die Strömung nach dem Windrad hat keine Umfangskomponente

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Bestimmung des Axialschubs über Impulssatz

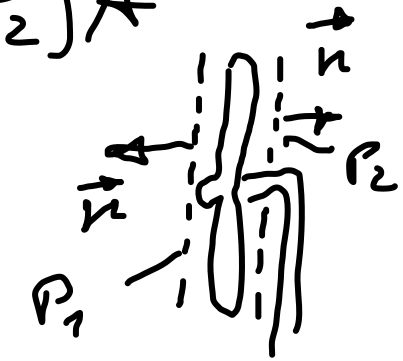
$$-\;\rho u_1 u_1 A_1 + \rho u_2 u_2 A_2 = -\vec{S} \cdots \int -p_0 \vec{n}\, dA$$

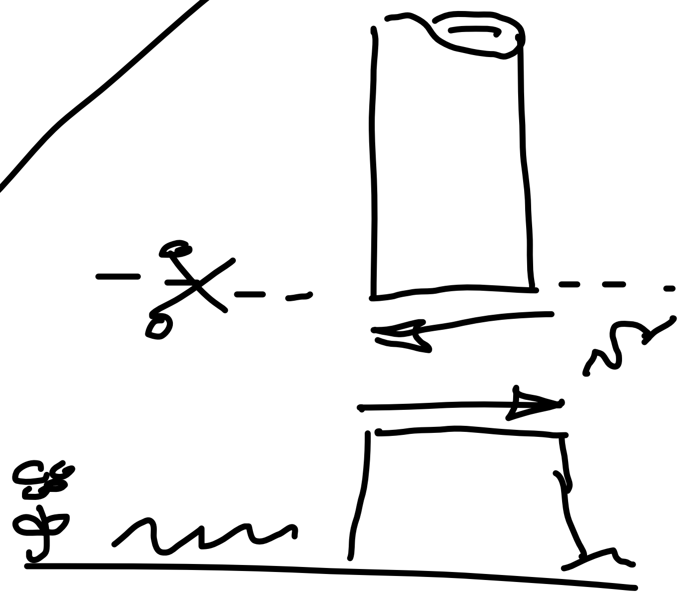
A-Absch.

$$\vec{S} = \int \vec{t}\, dA$$

$A_{Säule}$

$$\vec{S} = (p_1 - p_2) A$$





Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Konti: $u_1 A_1 = \bar{u} A = u_2 A_2$

Aus dem Impulssatz

$$S = \rho u_1^2 A_1 - \rho u_2^2 A_2$$

$$= \rho \cdot \bar{u} A \left(u_1 - u_2 \right)$$

$$S = \underbrace{\left(p_1 - p_2 \right)}_{\text{Bernoulli}} A = \frac{\rho}{2} \left(u_1 + u_2 \right) \left(u_1 - u_1 \right) A$$

$\Rightarrow$ Axiale Geschwindigkeit am Windrad

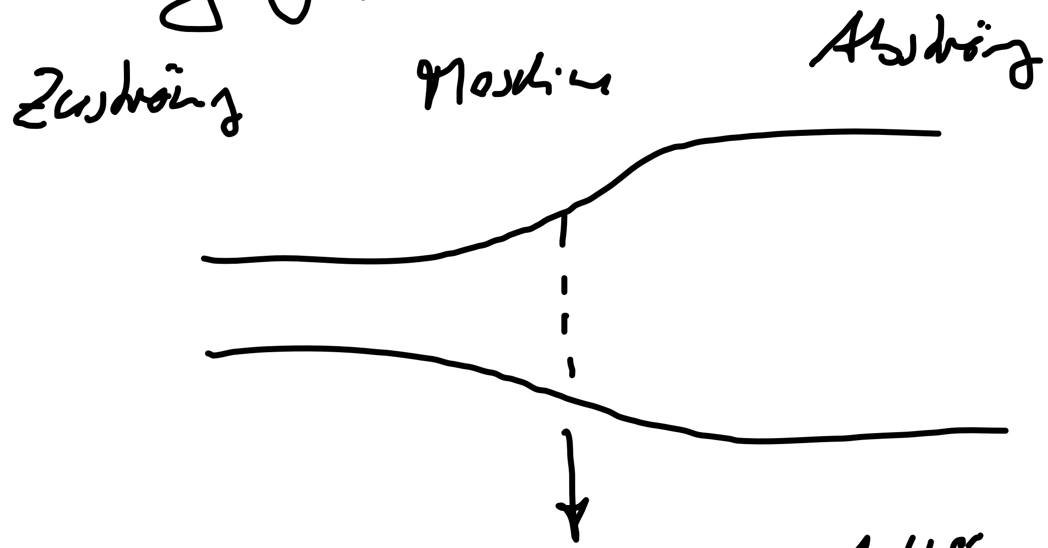
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

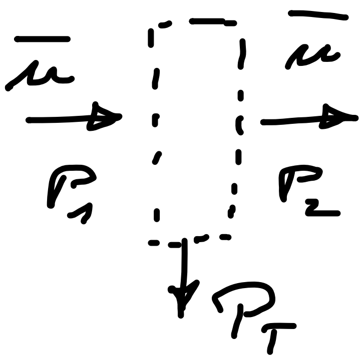
$$\rightsquigarrow \quad \bar{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Leistung folgt aus dem ersten Hauptsatz.



System

1. HS.



Modell.

$$\varrho \bar{u} A (e_2 - e_1) = -P_T + (p_1 - p_2)\,\bar{u} A$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Historie Bernoulli: Euler ≙ Impuls ohne dissipative Kraft.

$$\varrho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \varrho \vec{k} \quad \Big| \cdot d\vec{x}$$

$$d\vec{x} = \vec{u}\, ds$$

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + \psi + \int \cancel{\varrho} \frac{\partial u}{\partial t}\, ds = C$$ mechanische Energie.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

$$P_T = \bar{u} A (p_1 - p_2) - \rho \bar{u} A (e_2 - e_1)$$

$$P_T := \eta \, \bar{u} A (p_1 - p_2) \quad \checkmark$$

η ist der Aerodynamische Wirkungsgrad des Windrades.

$$P_T = \eta \, \bar{u} A \frac{\rho}{2} (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)$$

$$= \eta \frac{\rho}{4} A (u_1 + u_2)^2 (u_1 - u_2) = \eta \frac{\rho}{4} A u_1^3 * (1 + u_2/u_1)^2 (1 - u_2/u_1)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$C_p := \frac{P_T}{P_{avail}} = \frac{\eta \frac{\cancel{\rho}}{4} \cancel{A}\, \cancel{u_1^3} \left(1+\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)}{\frac{\cancel{\rho}}{2} \cancel{u_1^3}\, \cancel{A}}$$

$$C_p = \eta \frac{1}{2} \left(1+u_{2+}\right)^2 \left(1-u_{2+}\right)$$

$u_{2+} := \dfrac{u_2}{u_1}$ dimensionslose Abström-geschwindigkeit.

$u_{2+} = 1 \rightsquigarrow u_2 = u_1$ kein Windrad vorhanden.

$\rightsquigarrow C_p \equiv 0.$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\frac{d\, c_p}{d\, \mu_{2+}} \overset{!}{=} 0 \quad \text{im Systemoptimum.}$$

Annahme $\eta \neq fu(\mu_{2+})$

$$2(1+\mu_{2+})(1-\mu_{2+}) - (1+\mu_{2+})^2 \overset{!}{=} 0.$$

$$2 - 2\mu_{2+} - 1 - \mu_{2+} \overset{!}{=} 0.$$

$$1/3 = \mu_{2+}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

$\rightsquigarrow$ Optimaler Aufstau

$$c_p = c_{p\,max} \quad \text{für} \quad u_2 = \frac{1}{3} u_1$$

$$c_{p\,max} = \frac{1}{2} \eta \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \eta \, \frac{16}{9} \, \frac{\cancel{2}}{3} = \eta \, \frac{16}{27} = \eta \; \underline{\underline{0.59}}$$

Betz'sche Grenze.

$$\overline{u}_{opt} = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_{2opt}\right) = \frac{2}{3} u_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

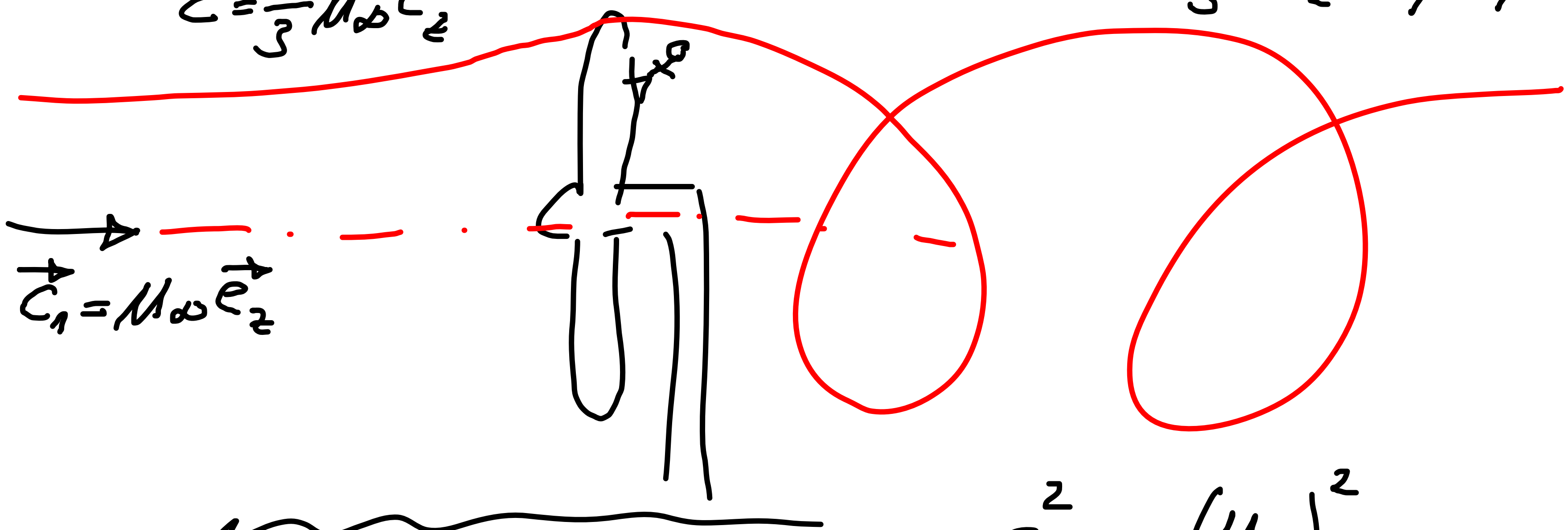
FLUID SYSTEM TECHNIK

Annahmen:

1. Drallfreie Strömung ~~St~~ stromab des Windrades

$$\vec{c} = \frac{2}{3} u_\infty \vec{e}_z$$

$$\vec{c}_2 = \frac{u_\infty}{3} \vec{e}_z + c_\varphi \vec{e}_\varphi$$



$$\vec{c}_1 = u_\infty \vec{e}_z$$

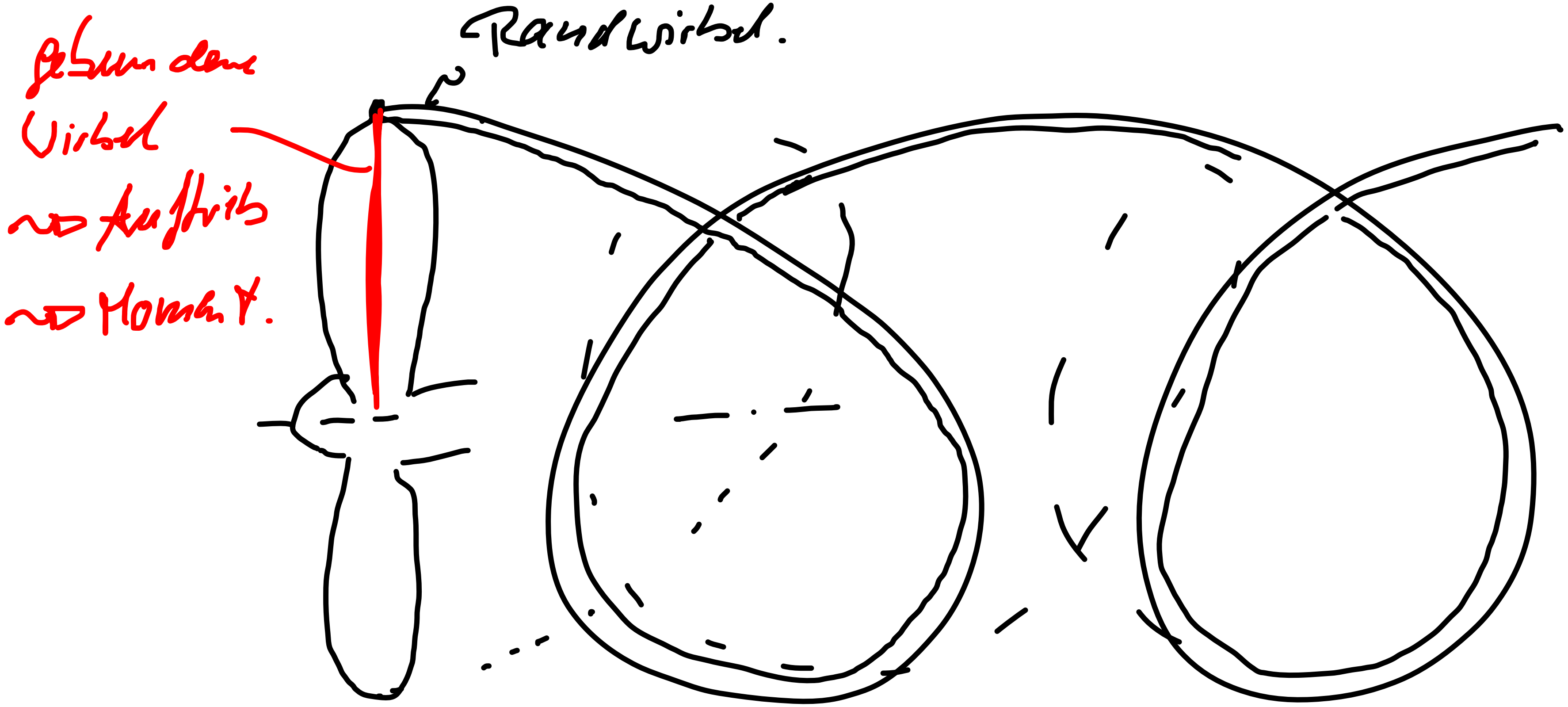
$$c_\varphi^2 \ll \left(\frac{u_\infty}{3}\right)^2$$

Annahme im Bernoulli.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Bei einem Schiffspropeller ist die Randspirale sichtbar.

→ Spitzenwirbelkavitation



Helmholtzscher Wirbelsatz.

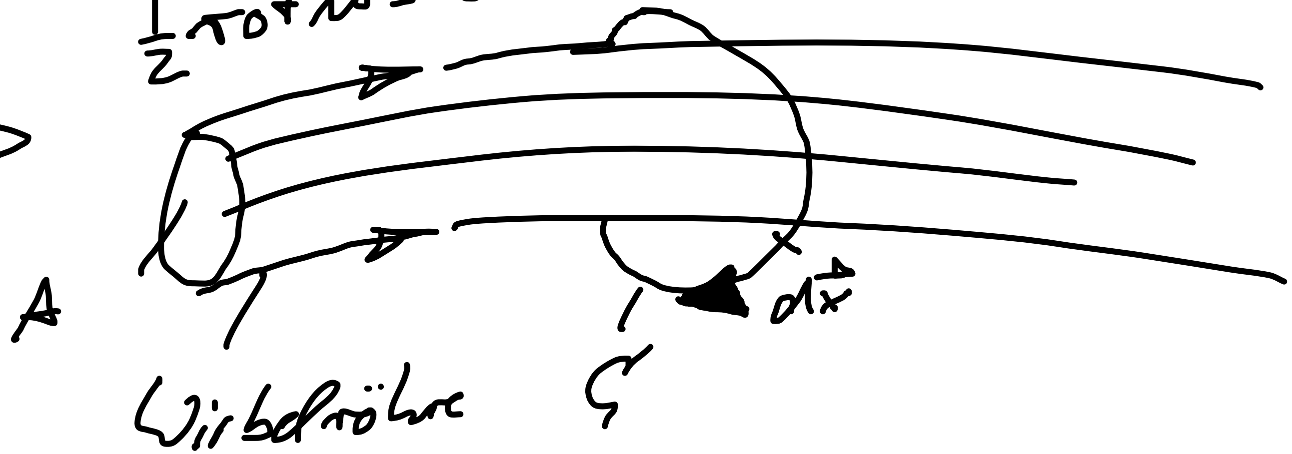
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Die Zirkulation einer Wirbelröhre
~~ist räumlich konstant.~~

$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{w}$

$\rightsquigarrow$



Stärke der Wirbelröhre

$\rightsquigarrow$ Zirkulation $\Gamma = \oint_S \vec{u} \cdot d\vec{x}$

$= \int \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

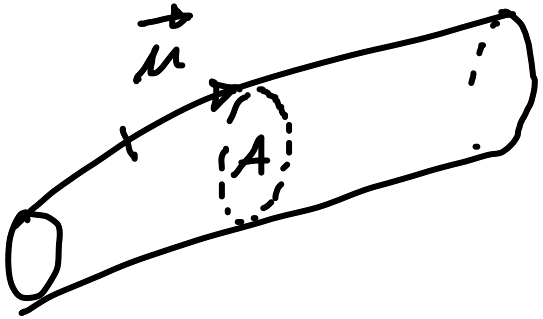
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Stromröhre

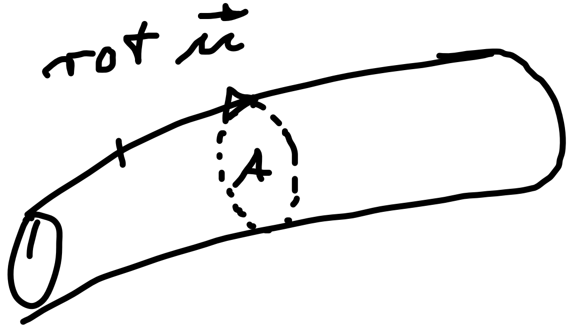


Volumenstrom

$$\dot{V} = \int_A \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$

⇝ Kontigleichung

Wirbelröhre



Zirkulation

$$\Gamma = \int_A \mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$= \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

⇝ Helmholtzsche Wirbelsätze

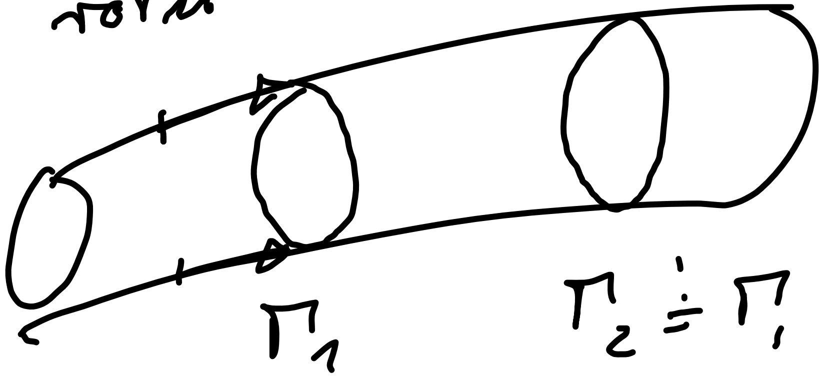
⇝ Kelvinsche Wirbelsätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

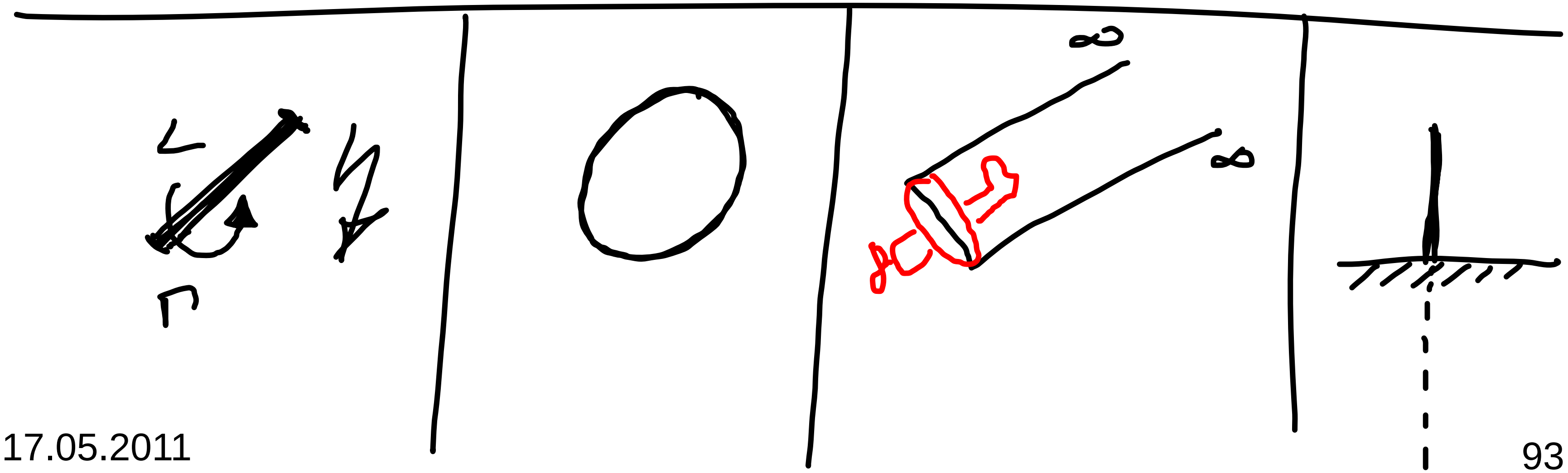
FLUID SYSTEM TECHNIK

Helmholtzsche Wirbelsatz

$\mathrm{rot}\,\vec{u}$



$\rightsquigarrow$ Wirbelfaden kann nicht endlich sein.



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

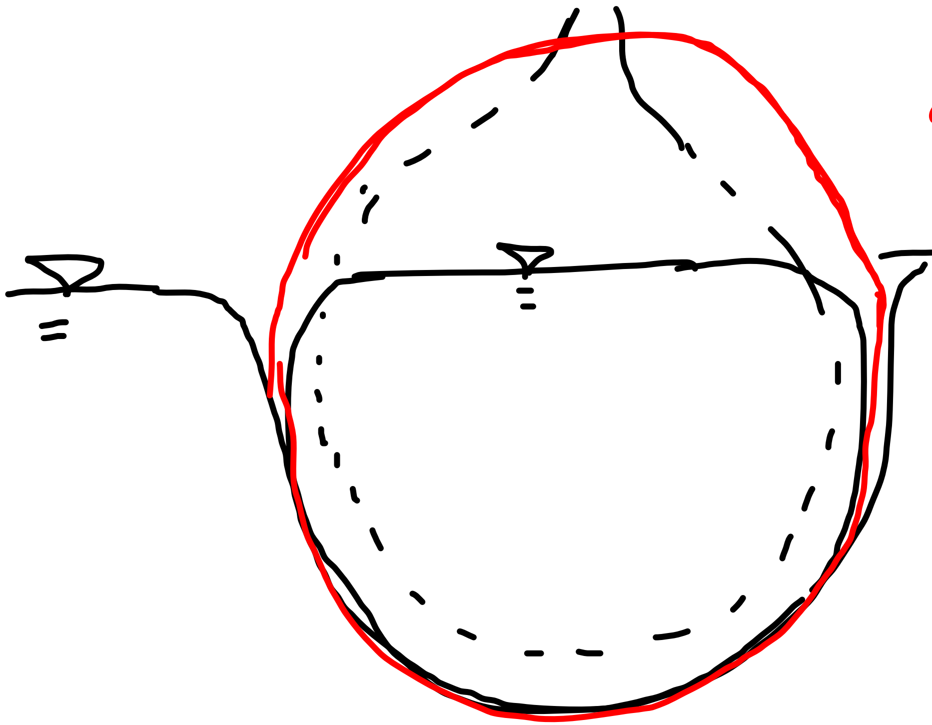
Sommersemester 2011

Fluidenergiemaschinen

Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



An Trennflächen wird ein Wirbel gebildet.

Schnitt

Draufsicht

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5