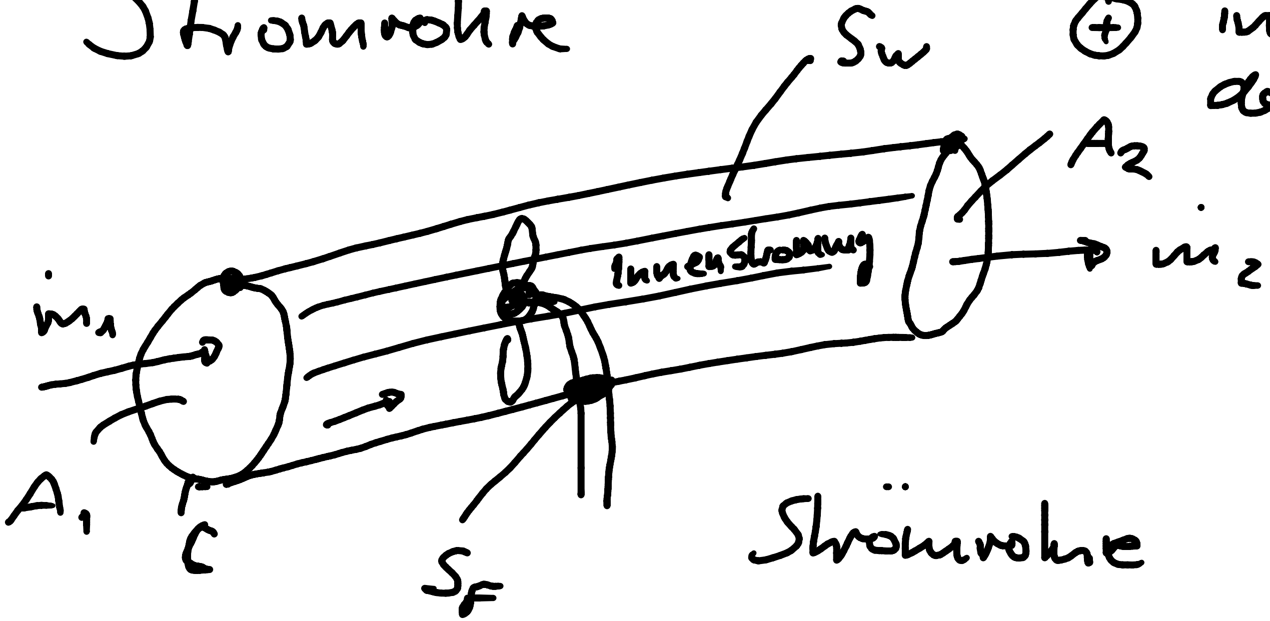
Strömröhre

⊕ Mathe einfach

⊕ integrale Form der Erhaltungssätze



Strömröhre

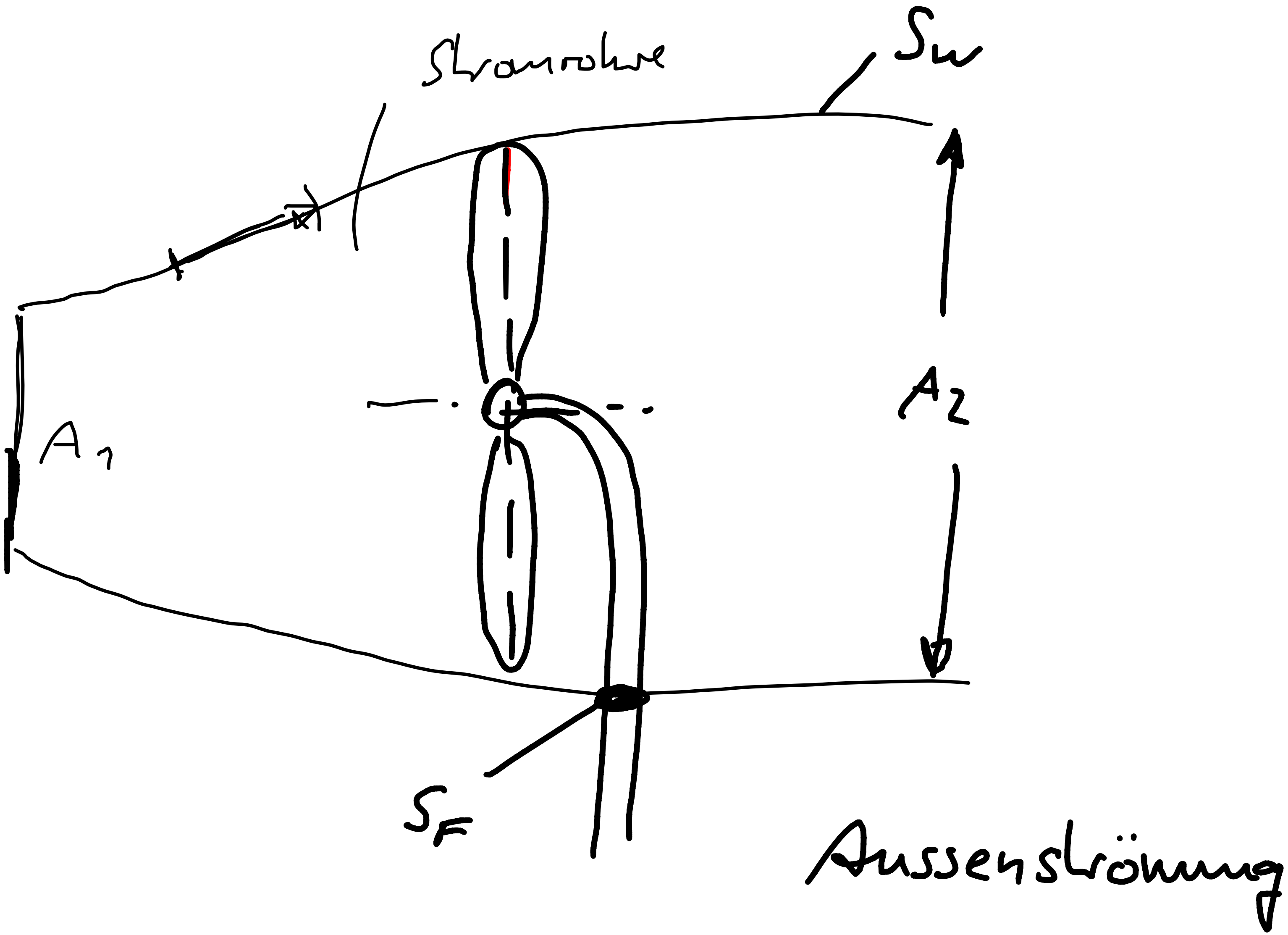
= Schar von Stromlinien, die von einem geschlossenen Linienzug ausgeht

⊕ Besonders einfache Darstellung der Erhaltungsgl. in dem 1D-Gebilde Strömröhre

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

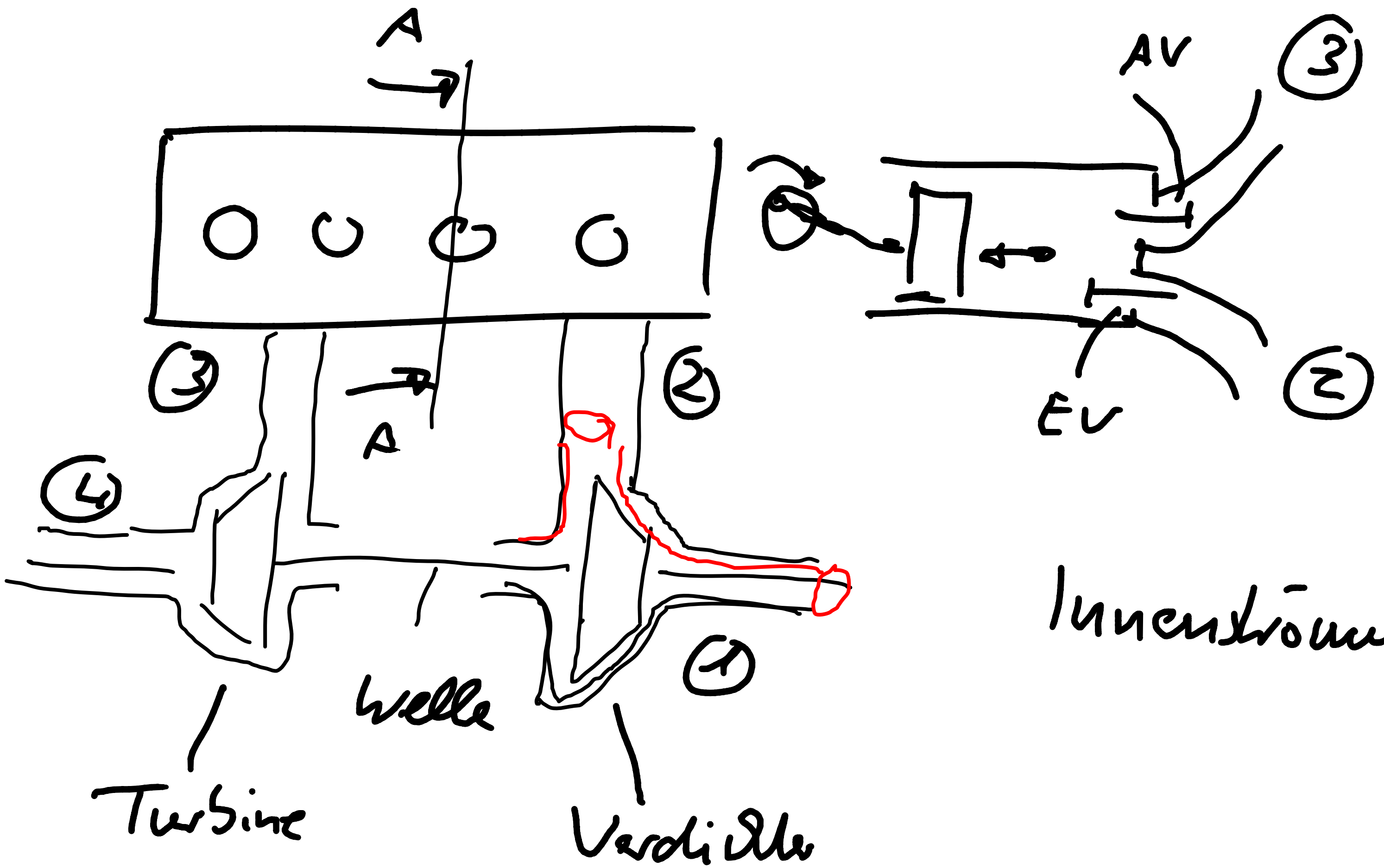


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

Verbrennungsmotor mit Turbolader

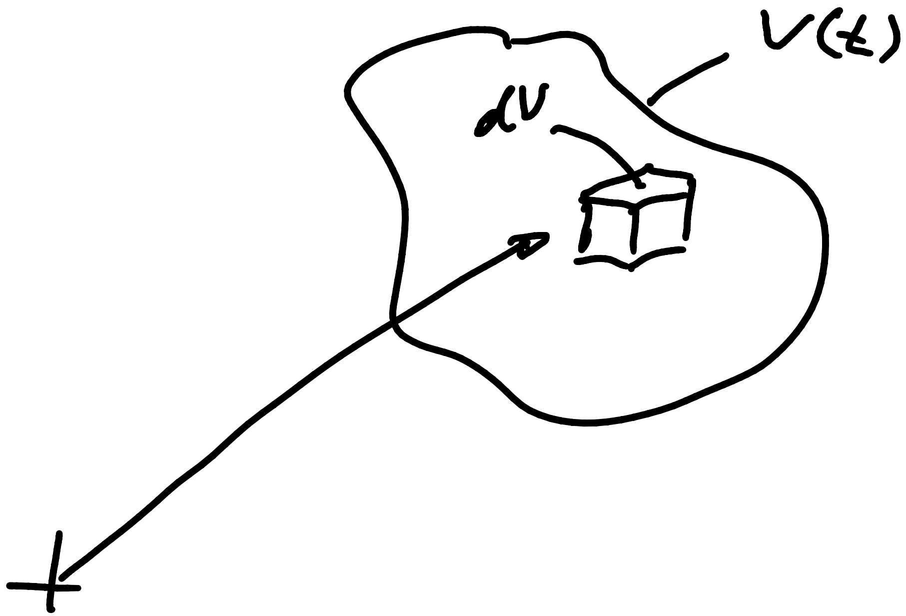


Innenströmung

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

Kontinuitätsgleichung

Die Masse eines materiellen Körpers ist konstant



$$dm = \rho \, dV$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \qquad m = \int dm = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0 \qquad \rho = \rho(\vec{x}, t)$$

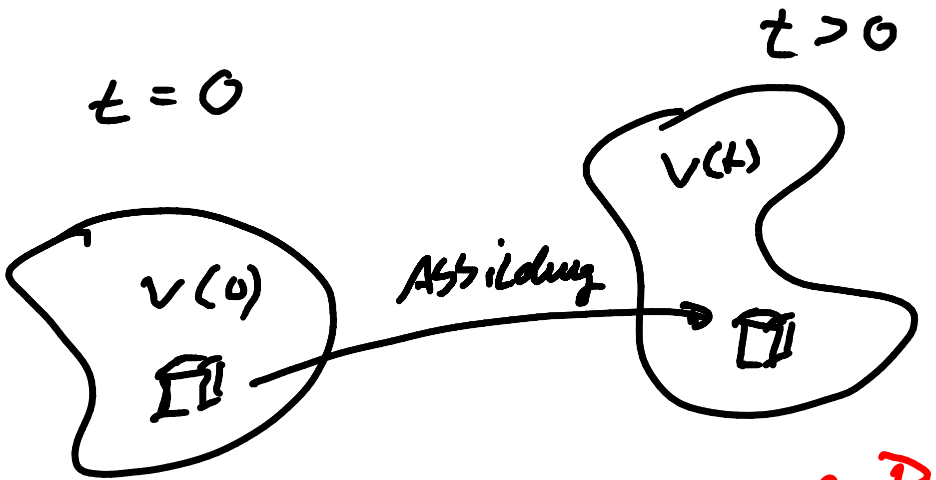
$\frac{D}{Dt}$: materielle Änderung

$\frac{d}{dt}$: allgemeine totale zeitliche Änderung

$\frac{\partial}{\partial t}$: partielle zeitliche Ableitung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5



V(0) wird auf V(t) abgebildet

$$\int \frac{D}{Dt}\left(\rho(t)\, dV(t)\right)$$

Produktregel

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, dV = \int_{V} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \underbrace{\frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt}}\right) dV$$

$V \neq V(t)$

$$\left[\frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt}\right] = \frac{1}{T}$$

relative Volumenänderungsrate eines Teilchens am Ort $\vec{x}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho(t)\, dV(t)\right) = \frac{D\rho}{Dt}\, dV + \frac{D\,dV}{Dt}\,\rho$$

$$= \frac{D\rho}{Dt}\, dV + \rho \frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt}\, dV$$

$$= \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{dV} \frac{D\,dV}{Dt}\right) dV$$

Hausaufgabe: Differential-
rechnung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

FLUID
SYSTEM
TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die
Hydrodynamik
Vorlesung 5

$\vec{u}$: Geschwindigkeit

$$\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}_{\mathrm{div}(\vec{u})}$$

Volumenänderung = Divergenz der Geschwindigkeit

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = \int_{V} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt} \right) dV = 0$$

$$= \int_{V} \left(\underbrace{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}(\vec{u})}_{=0} \right) dV = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}(\vec{u}) \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}(\vec{u}) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung in differentieller Form

- gilt für jedes differentielle Teilchen

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$ für inkompressible Strömungen

$$\Rightarrow \rho\, \mathrm{div}(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{u}) = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}(\vec{u}) \right) dV = 0$$

$\frac{D}{Dt}$: materielle Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \qquad \neq \frac{d}{dt} \; ! \; !$$

Zeitliche Änderung

Konvektive Änderung

$$= \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}}_{u_i \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

Einsteinsche Summationskonvention

Über alle in einem Ausdruck doppelt vorkommenden Indizes wird automatisch summiert

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{u} = \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}_{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \varphi$$

Produktregel $\quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)$

$$\Rightarrow \int_V \left(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\vec{u})} \right) dV = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u})$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

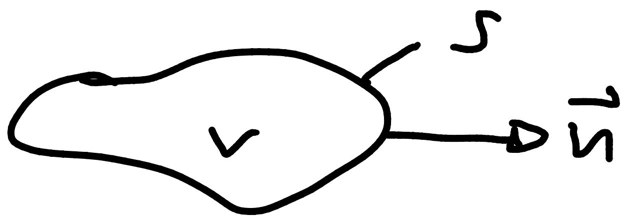
Gaußscher Integralsatz

$\varphi = T, \vec{u}, \underset{\sim}{T}$

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dV \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{(S)} \varphi n_i \, dS$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{(S)} \rho u_i n_i \, dS$$

S: orientierte Begrenzungsfläche von V



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_S \rho\, u_i n_i\, dS = 0$$

$$u_i n_i = \vec{u}\cdot\vec{n}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, dV = \int_V \overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\, dV + \int_{S} \overbrace{\rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}^{\text{Fluß über die Oberfläche}} = 0 \quad !!}$$

Die zeitliche Änderung der Masse in einem Kontrollvolumen ist gleich der Differenz der pro Zeiteinheit durch die Oberfläche ein- und ausfließenden Massen

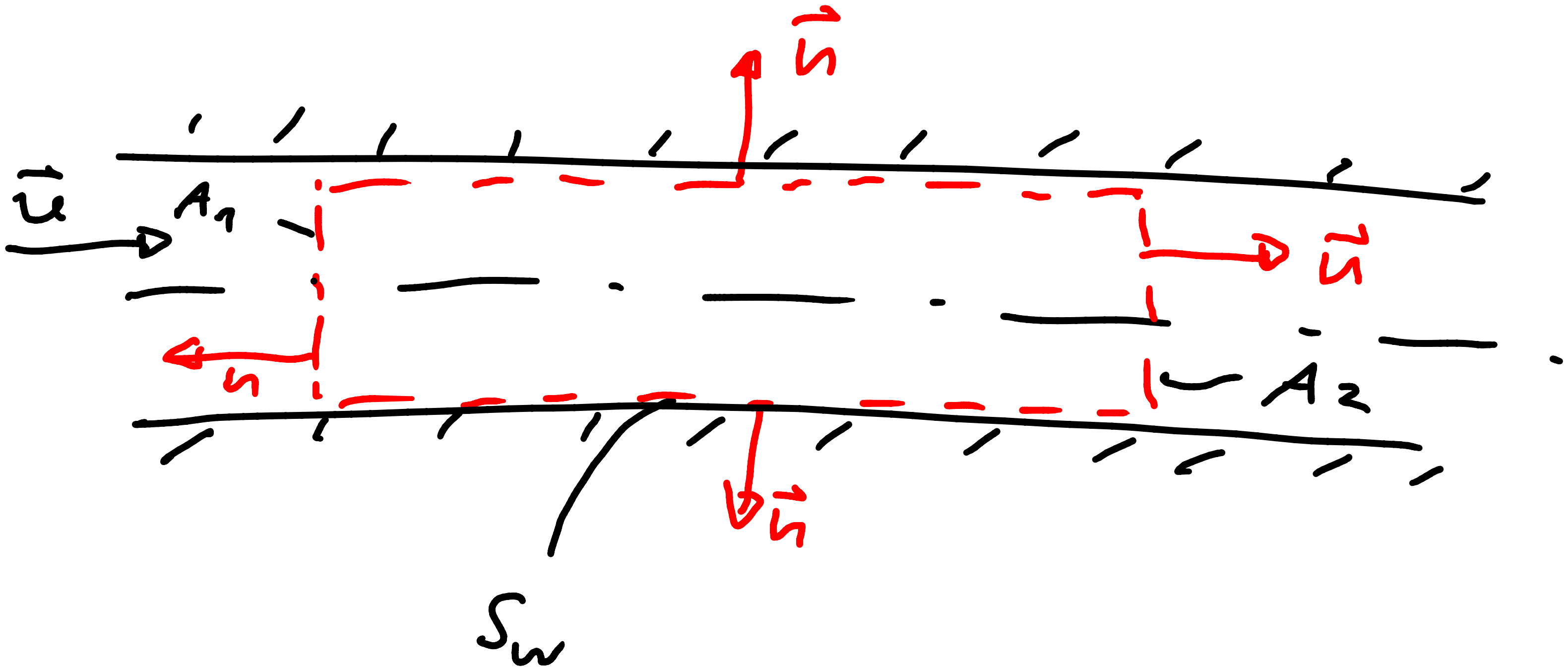
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Bsp: Rohrleitung



$$S = A_1 + A_2 + S_w$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \underbrace{\int_S \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{\int_{A_1} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dA_1 + \int_{A_2} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dA_2 + \int_{S_w} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS_w} = 0$$

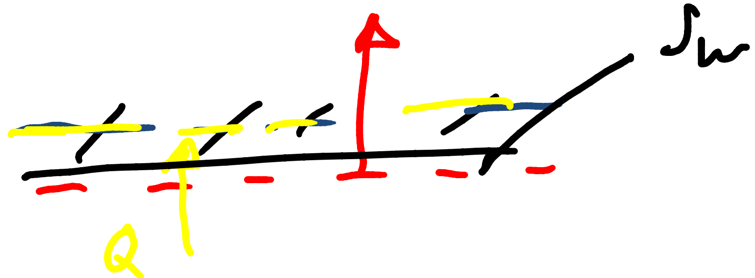
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 5

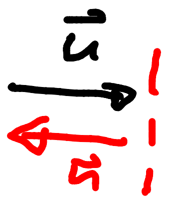
Vereinfachung: Strömung ist im zeitlichen Mittel stationär

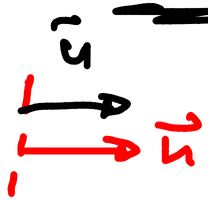
$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial}{\partial t} = 0} \Rightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0$$

Annahme:



$$\int_{S_w} \rho \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{0} \, dS_w = 0 \qquad \underline{\vec{u} \cdot \vec{n} = 0}$$





$$\Rightarrow \int_{A_1} \rho \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{-u} \, dA_1 + \int_{A_2} \rho \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{u} \, dA_2 = 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$-\underbrace{\rho u A_1} + \underbrace{\rho u A_2} = 0$$

$$-\dot m_1 + m_2 = 0$$

$$\Rightarrow \dot m_1 = \dot m_2$$

Def: $$\dot m = \int_{A_a} \rho \vec u \cdot \vec n \, dA_a = -\int_{A_e} \rho \vec u \cdot \vec n \, dA_e$$

A_a Austritt A_e Eintritt

Pause bis $15^{\underline{00}}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz