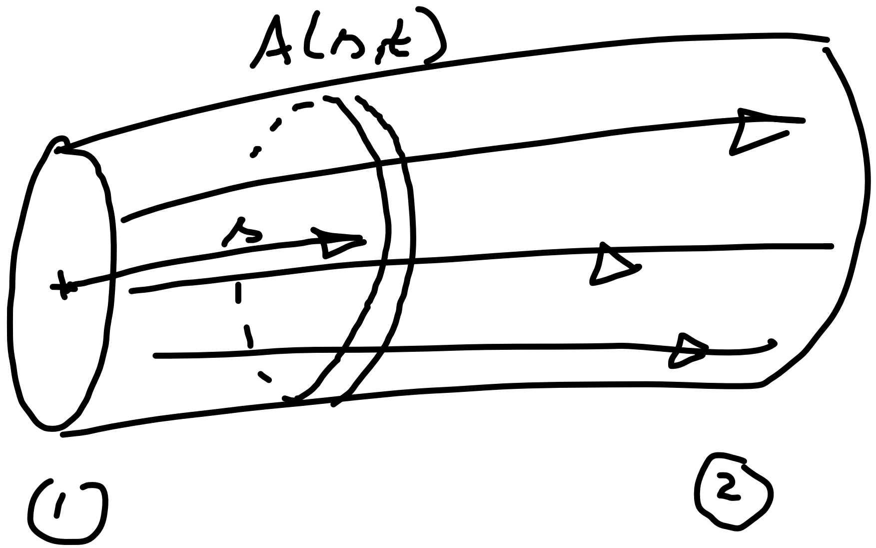


$s = 0$ $\qquad$ $s = L$

$$\underbrace{\int_{s=0}^{L} \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0}$$

Kontigleichung für die Stromröhre ,

$$\dot{m}_{1,2} = \left| \int_{A_{1,2}} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA \right|$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Ziel

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t}$$

p ist eine gut handhabbare (messbare) dynamische Größe.

$$\int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial t} A + \frac{\partial A}{\partial t} \rho \, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{\rho} \rho A + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{A} \rho A \, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$$

$$\int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right)}_{:= K_{eff}} \frac{\partial p}{\partial t} \rho A \, ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

$:= K_{eff}$ effektive Nachgiebigkeit

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

$$\int_0^L \mathcal{K}_{eff}\,\rho A \frac{\partial p}{\partial t}\,ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

Wichtiger Spezialfall: Hydrostatik.

Alle Zustandsgrößen sind nur Funktion der Zeit, d.h. der Zustand ist räumlich homogen.

$$\int_0^L \mathcal{K}_{eff}\,\rho A \frac{\partial p}{\partial t}\,ds + \int_{A_1} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{A_2} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

Nach Voraussetzung

$$\rho = \rho_1 = \rho_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt}$$

$$Q_{1,2} := \left| \int_{A_1, A_2} \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS \right|$$

Volumenstrom

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 6

$V := \int_0^L A \, ds$ Volumen der Stromröhre.

$$\boxed{K_{Hyd} V \frac{dp}{dt} - Q_1 + Q_2 = 0}$$

Druckaufbaugleichung = Kontigleichung für die Hydrostatik

$\left(p, \rho \neq fn(\vec{x})\right)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

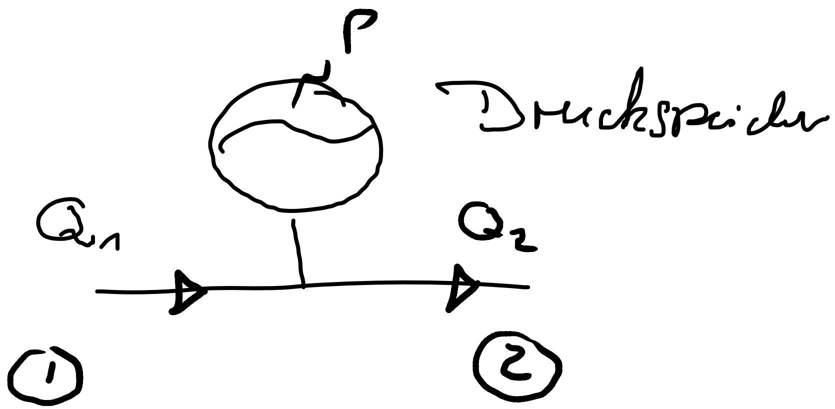
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

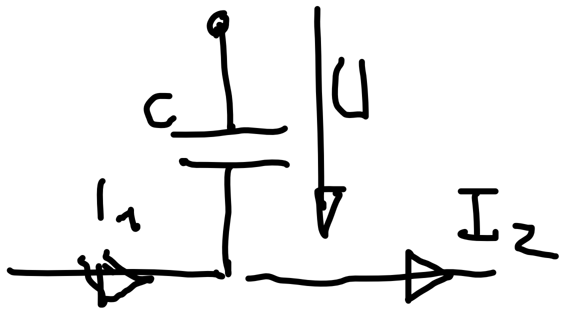
Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 6

Analogie zur Elektrotechnik.





$$\underbrace{V \kappa_{eff}}\, \dot{p} - Q_1 + Q_2 = 0 \qquad C\dot{U} = I_1 + I_2 = 0$$

$V \kappa_{eff}$ wird hydraulische Kapazität genannt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

Zur effektiven Nachgiebigkeit.

$$\mathcal{H}_{eff} := \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Die effektive Nachgiebigkeit ergibt sich als Summe der Einzelnachgiebigkeiten.

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_{\varrho} + \mathcal{H}_{A}$$

$\mathcal{H}_{\varrho} := \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial p}$ Nachgiebigkeit der Flüssigkeit

$\mathcal{H}_{A} := \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial p}$ Nachgiebigkeit der Stromröhre.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

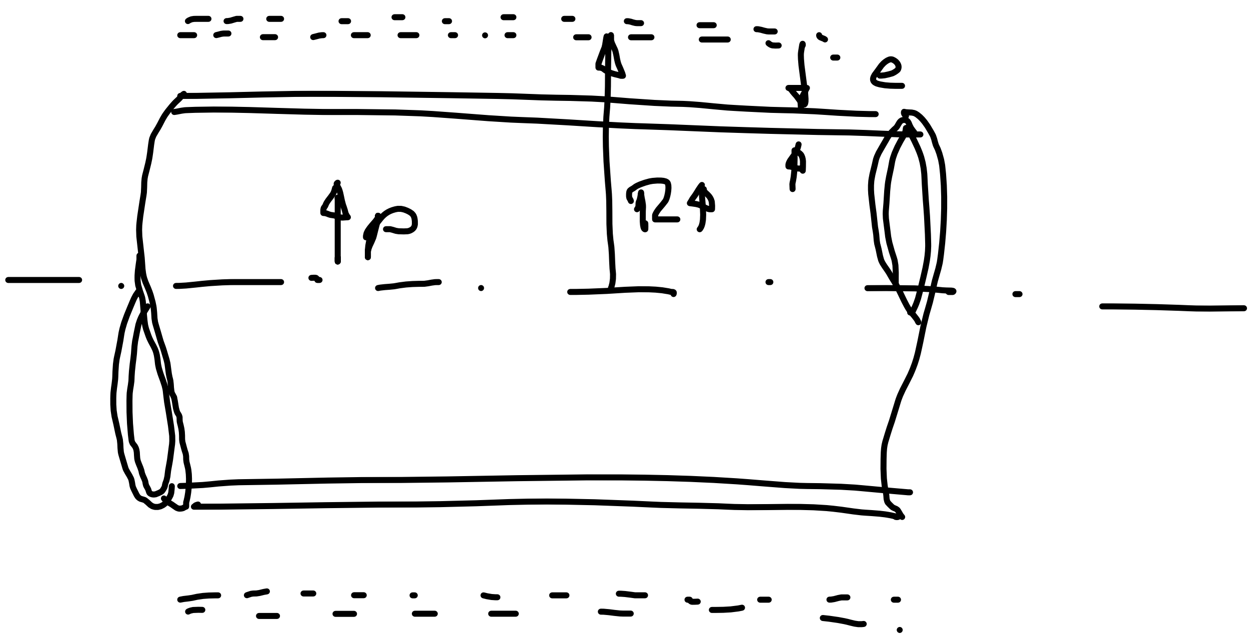
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 6

Nachgiebigkeit der Stromröhre ist i.d.R. eine elastostatische Eigenschaft der Stromröhre.



Beispiel: dünnwandiges Rohr ($e/R \ll 1$) unter Innendruck.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

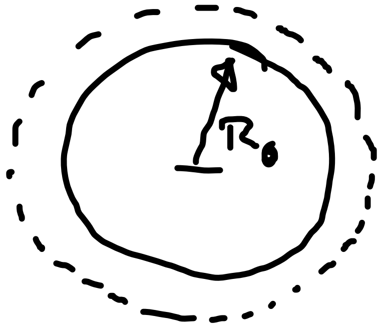
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

$$\mathcal{K}_A := \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Linearisieren im Betriebspunkt

$$\mathcal{K}_{A0} := \frac{1}{A_0}\frac{\partial A}{\partial p}\Big|_0$$



$$A = \pi R^2 \,, \qquad A_0 = \pi R_0^2$$

Umfangsdehnung $\varepsilon_\varphi = \dfrac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \dfrac{R - R_0}{R_0}$

Änderung der Umfangsdehnung mit dem Druck

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dp} = \frac{1}{R_0}\frac{dR}{dp}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

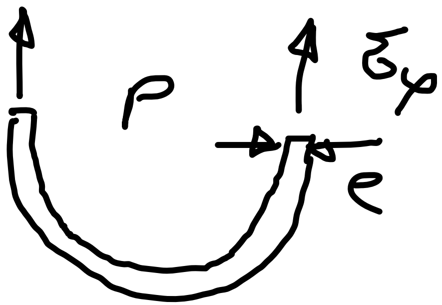
Zusammenhang zwischen Umfangsdehnung und der Umfangsspannung σ_φ

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu\,\sigma_x\right) \quad \text{Hooksches Gesetz}$$

$\sigma_x = 0$, wenn das Rohr nicht eingespannt ist

$$\sigma_\varphi = p\,\frac{R}{e}$$

Gleichgewichtsbeziehung



$$\Rightarrow \quad \varepsilon_\varphi = \frac{p}{E}\,\frac{R}{e}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

$$\mathcal{H}_{A_0} = \frac{1}{\pi R_0^2} \frac{\partial}{\partial p}\left(\pi R^2\right)\Big|_0 \qquad R = \cancel{R(p)}$$

$$= \frac{1}{R_0^2}\, 2 R_0 \frac{\partial R}{\partial p}\Big|_0$$

$$= \frac{2}{R_0} \frac{\partial R}{\partial p}\Big|_0 = 2 \frac{d \varepsilon_\varphi}{d p}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E}$$

$$= 2 \frac{1}{E} \frac{d \sigma_\varphi}{d p}\Big|_0$$

$$\sigma_\varphi = p \frac{R}{e}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{A_0} = 2 \frac{1}{E} \frac{R_0}{e_0} \quad \text{für} \quad \frac{R_0}{e_0} \gg 1}$$

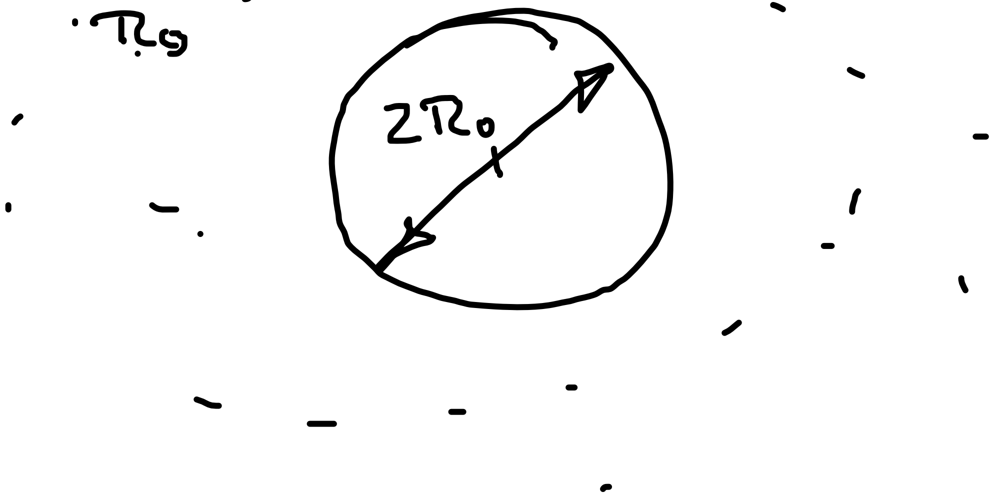
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

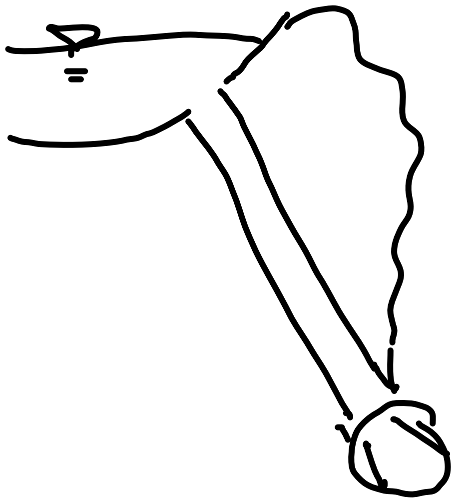
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

$\frac{\rho}{R_0} \to \infty$

E, ν





	$\mathcal{H}_A$	E	R_0	ν
F	-1	+1	0	0
L	2	-2	1	0

	$\mathcal{H}_A E$	E	R_0	ν
~~F~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~L~~	~~0~~	~~-2~~	~~1~~	~~0~~

$$E\,\mathcal{H}_A = f_n(\nu) \neq f_n(R_0)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

Effektive Schallgeschwindigkeit

$$\kappa_{eff} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Schallgeschwindigkeit ist eine thermodynamische Zustandsgröße, die definiert ist als

$$a^2 := \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=const}$$

a^2 ist gleich der Änderung der ~~Dichte~~ Drucks mit der ~~Druck~~ bei konstant Entropie.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

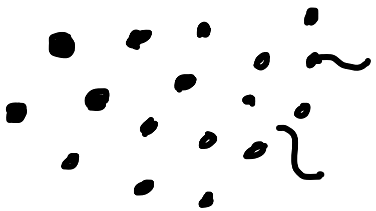
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 6

$$\mathcal{K}_{eff} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{a^2} + \mathcal{K}_A$$

$$\boxed{a_{eff}^2 := \frac{1}{\rho_{eff}\,\mathcal{K}_{eff}}}$$

ρ_{eff} ist die effektive Dichte der Flüssigkeit.



s solid

g gas

Suspension

$$\rho_{eff} = \frac{m}{V} = \frac{m_s + m_g}{V}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Volumenanteil Feststoff

$$\phi := \frac{V_s}{V}$$

$$\rho_{eff} = \frac{m_s}{V} + \frac{m_g}{V}$$

$$= \frac{m_s}{V_s}\,\frac{V_s}{V} + \frac{m_g}{V_g}\,\frac{V - V_s}{V}$$

$$\underline{\underline{\rho_{eff} = \rho_s\,\phi + \rho_g\,(1-\phi)}}$$