TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Kont:

$$\frac{Dm}{Dt} = \sigma \qquad \text{Erfahrung.}$$

$$m = \int_{V(t)} \varrho \, dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \varrho \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \varrho \, dV + \oint_{S} \varrho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

Reynoldsches Transporttheor.

(Kinematischer Satz)

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 5

Zur materiellen Zeitableitung $\frac{D}{Dt}$

Die zeitliche Änderung, die ein Flüssigkeitsteilchen längs seiner Bahn erfährt.

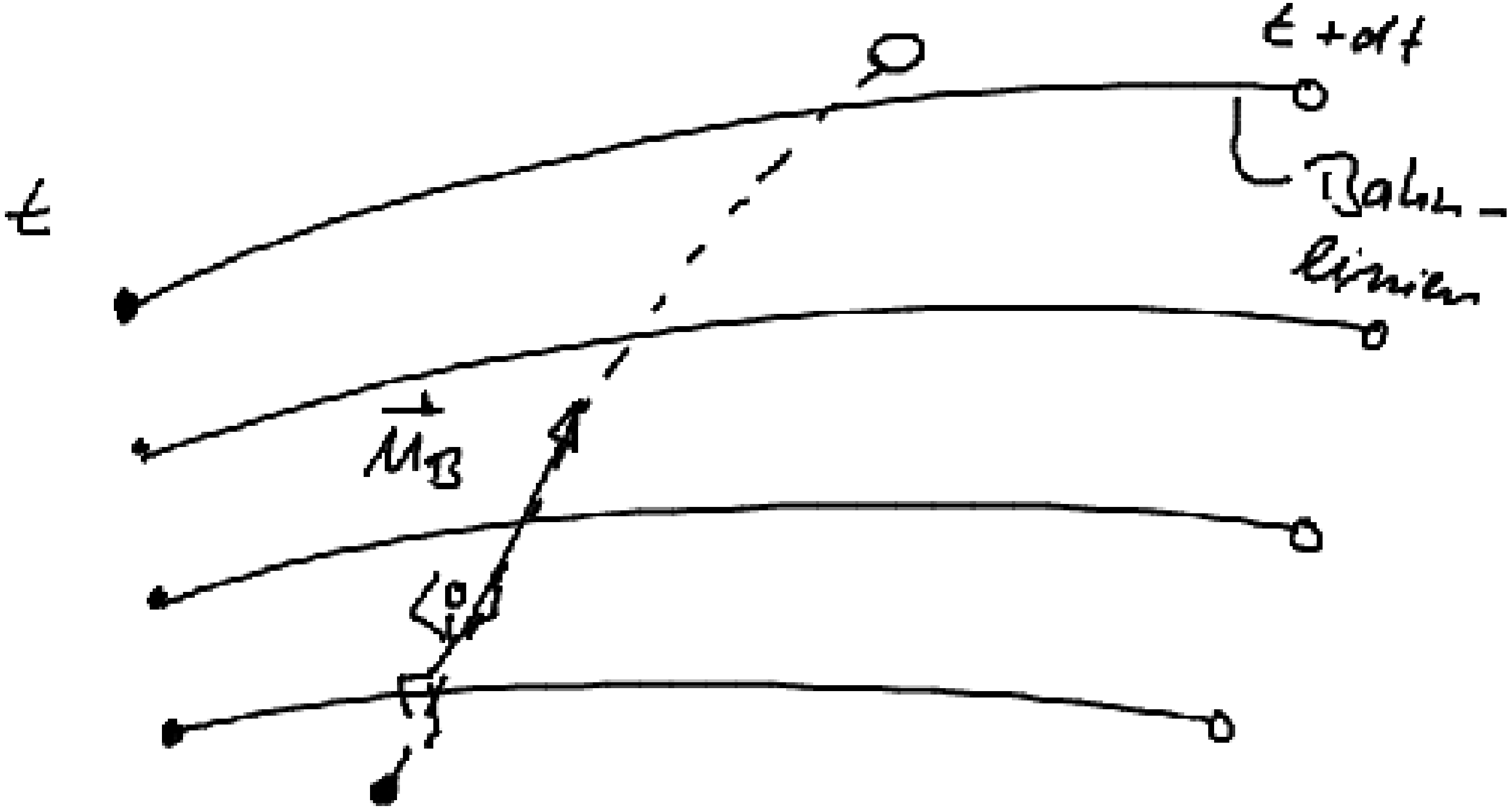
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \quad \text{Strömungsgeschw.}$$

Zur allgemeinen Zeitableitung $\frac{d}{dt}$

Zeitliche Änderung, die ein Beobachter feststellt, wenn er sich gemäß der Geschwindigkeit $\vec{u}_B$ durch das Feld bewegt.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}_B \quad \text{Beobachtergeschw.}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



Änderung der Temperatur, Konzentration, ...

T $\qquad\qquad$ c

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \nabla T \cdot d\vec{x} \quad \Big| \frac{1}{dt}, \text{ mit } \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}_B$$

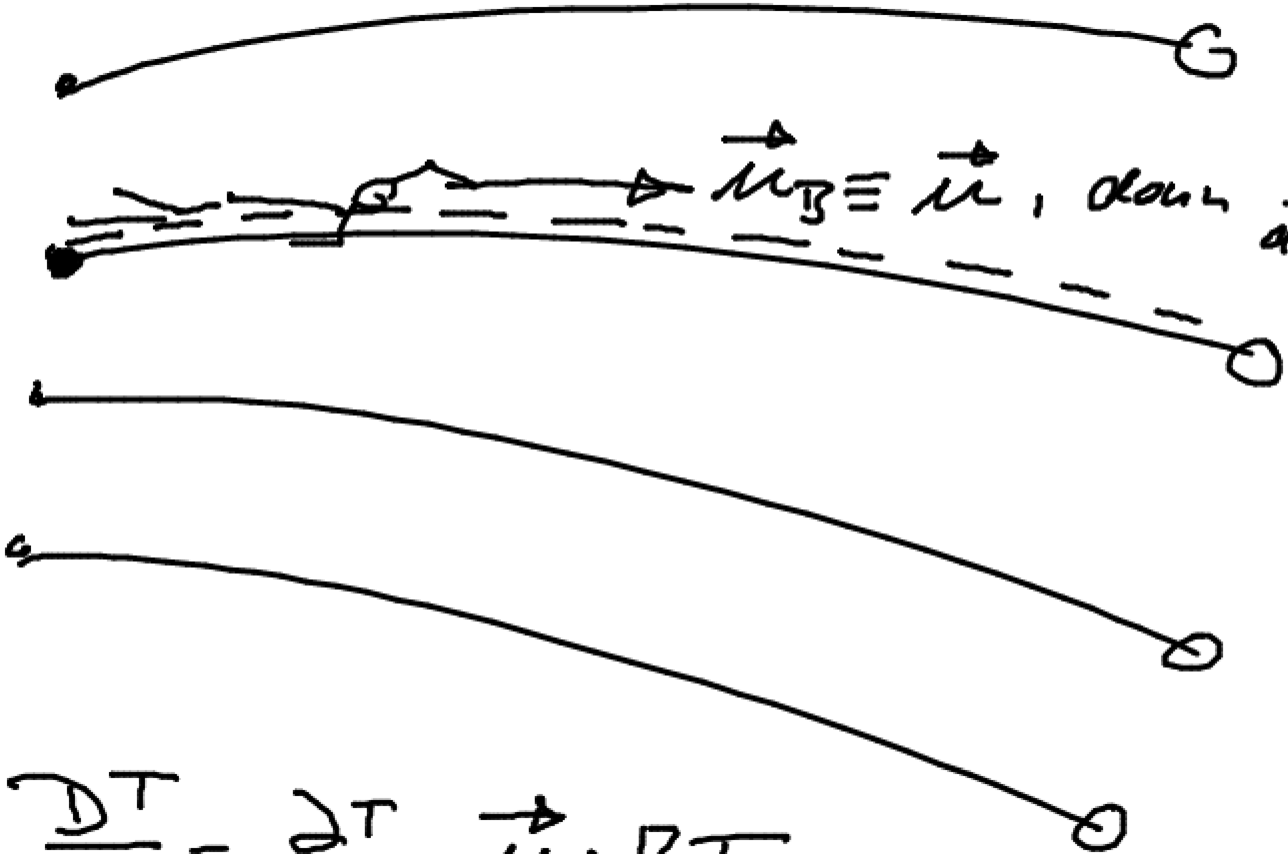
$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}_B \cdot \nabla T}$$ allgemein Zeitabl. Q.L.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

materielle Zeitabl.



$\vec{u}_B \equiv \vec{u}$, dann $\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T$$

Materielle Zeitableitung Spezialfall der allgemeinen Zeitabl.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 5

$$\boxed{\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} = \operatorname{div}\vec{u}} \qquad \boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}}$$

Volumenänderungsrate eines Teils.

$\vec{\omega}$ ist die Drehgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens

$$\operatorname{div}\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u_i = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$ in kartesischen Koordinaten.

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$ in Zylinderkoordinaten.

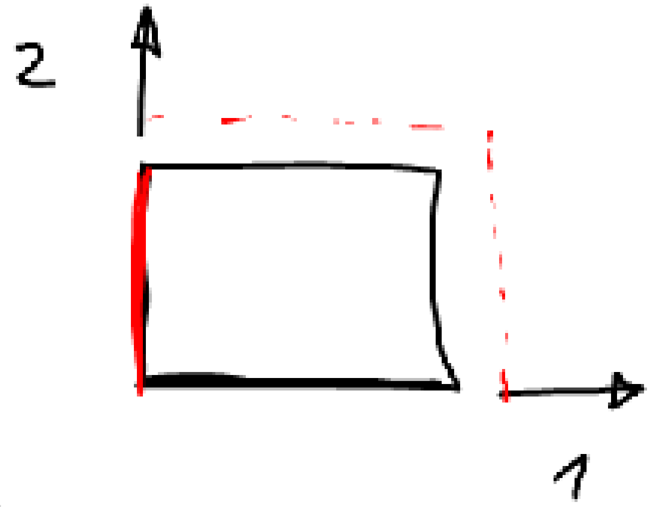
Bitte immer nachschlagen!

In allen Büchern über Kontinuumsmechanik.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5



$$\frac{1}{dx_1}\underbrace{\frac{D(dx_1)}{Dt}}_{du_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{1}{dx_2}\underbrace{\frac{D(dx_2)}{Dt}}_{du_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\frac{1}{dx_1}\frac{D(dx_1)}{Dt} + \frac{1}{dx_2}\frac{D(dx_2)}{Dt} = \operatorname{div}\vec{u}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

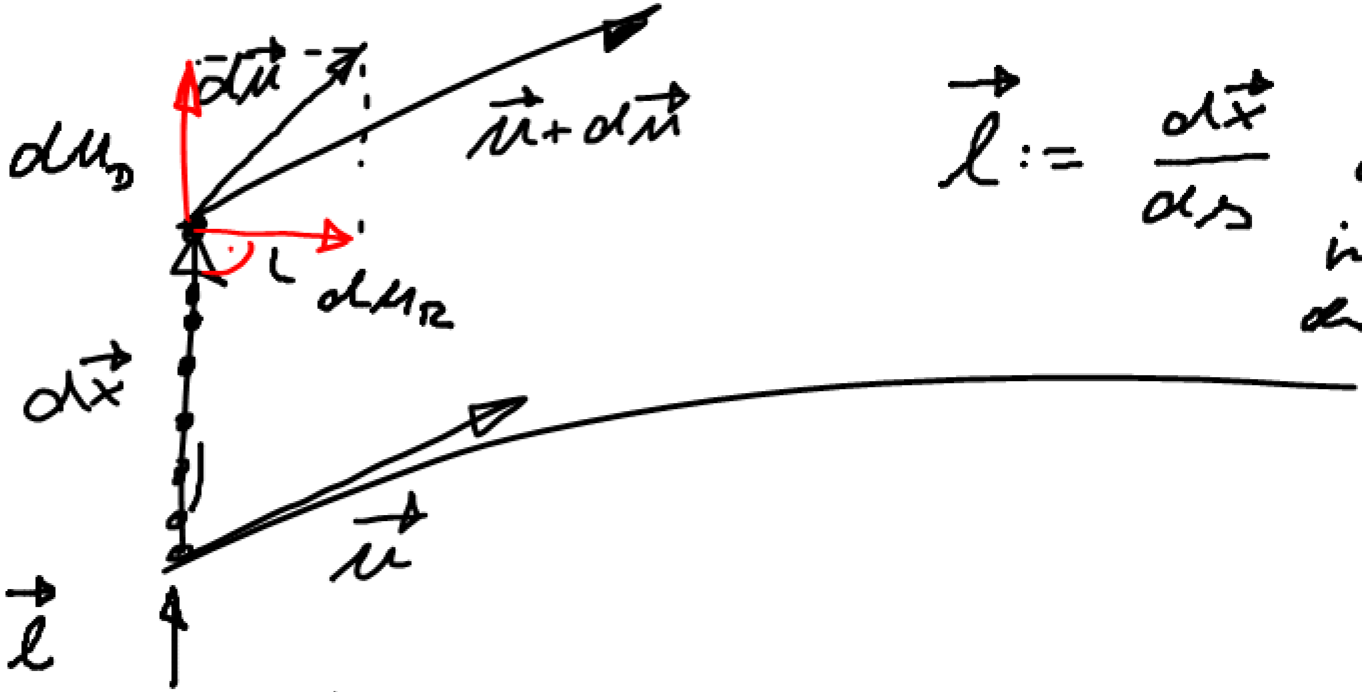
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 5



$$\vec{l} := \frac{d\vec{x}}{ds}$$ Einheitsvektor in Richtung des Teilchens der Länge ds.

Die Differenzgeschwindigkeit zwischen oberen und unteren Ende des materiellen Elements $\hat{=}$ $d\vec{u}$ hat eine Komponente du_D, die das Linienelement dreht, und eine Komponente du_R, die das Linienelement dehnt.

$$d\vec{u} = \nabla\vec{u} \cdot d\vec{x}$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

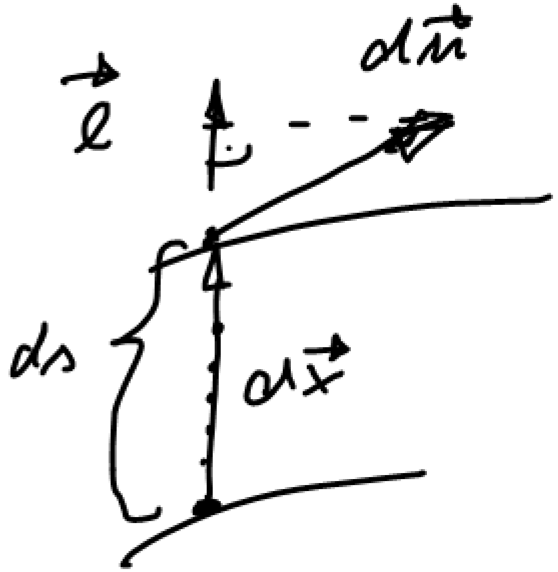
Keine Entwicklung in der Zeit, da nur momentane Deformation betrachtet wird.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

~~Abstand~~ Dehnrate der Teilchen



$$\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt} = \frac{d\vec u}{ds}\cdot\vec l$$

$$= \frac{du_i}{ds}\frac{dx_i}{ds}$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{ds}\frac{dx_i}{ds}$$

Taylorentwickl.

$$d\vec u = \nabla\vec u\cdot d\vec x$$

Geschwindigkeitsgradient: $$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= e_{ij} + \Omega_{ij}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

$e_{ij} = e_{ji}$ symmetrischer Tensor

Deformationsgeschwindigkeiten

$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ antisymmetrischer Tensor

Rotationsgeschwindigkeiten.

$$\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt} = \left(e_{ij} + \Omega_{ij}\right)\frac{dx_j}{ds}\frac{dx_i}{ds}$$

$$= e_{ij}\frac{dx_j}{ds}\frac{dx_i}{ds}.$$

da $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$.

$$\boxed{\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt} = e_{ij}\, l_j\, l_i}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

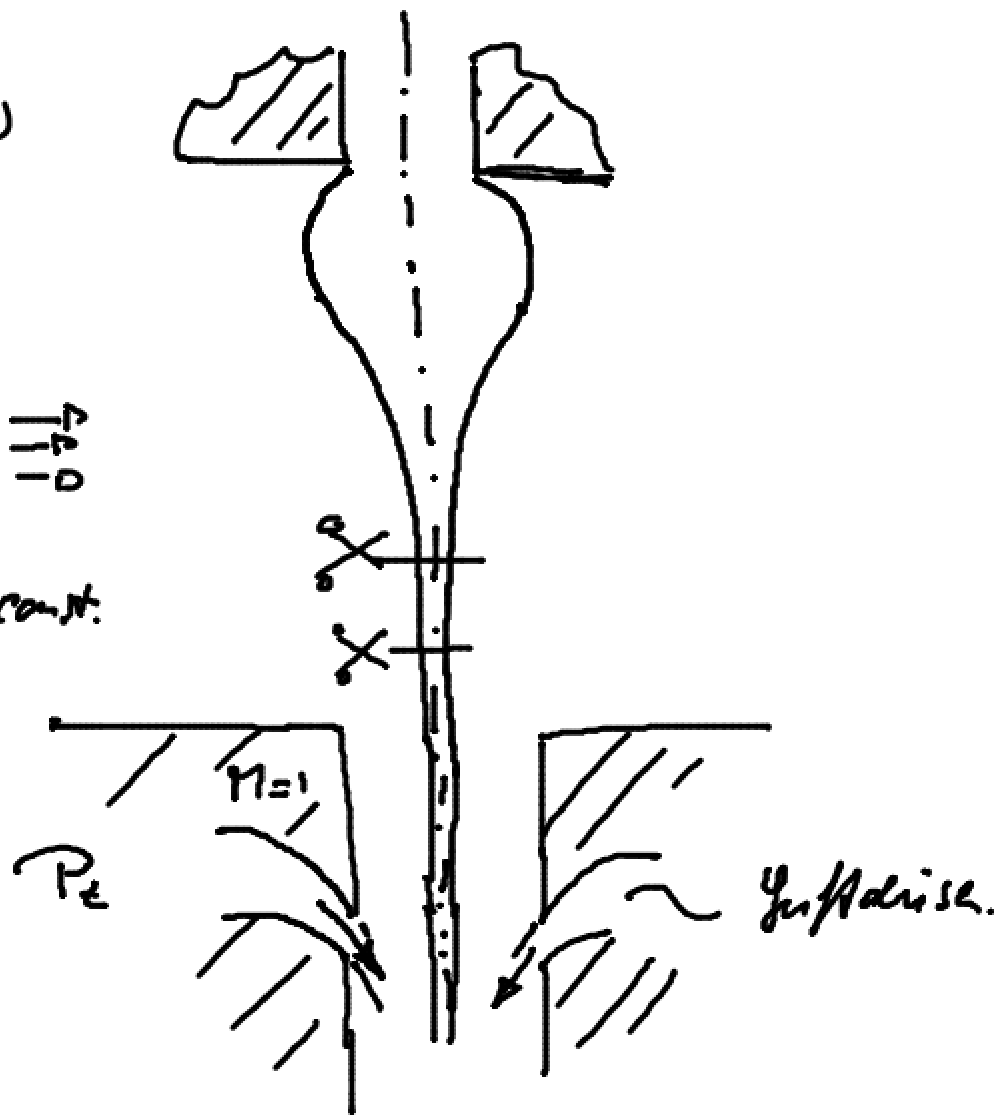
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

Reine Dehnströmung $\Omega_{ij} \equiv 0$ $e_{ij} \neq 0$.

- Spinnprozess

Dehnströmung

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = e_{zz} = \text{const.}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

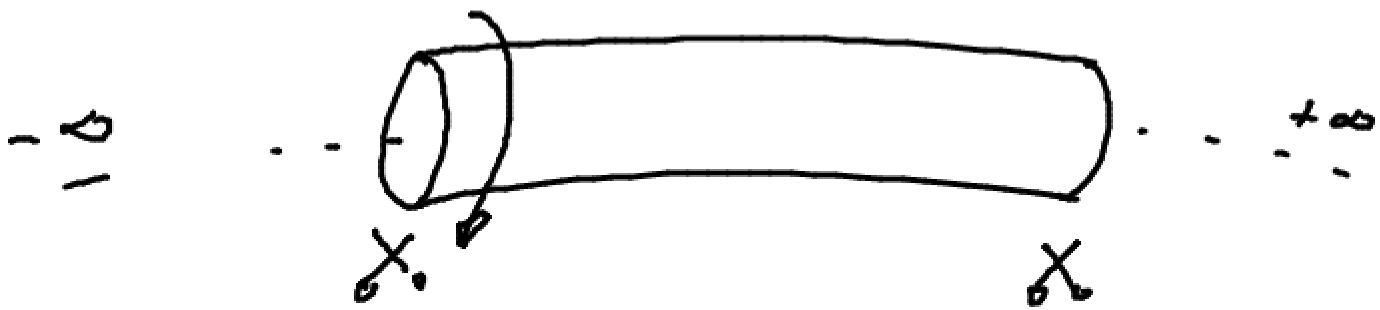
FLUID SYSTEM TECHNIK

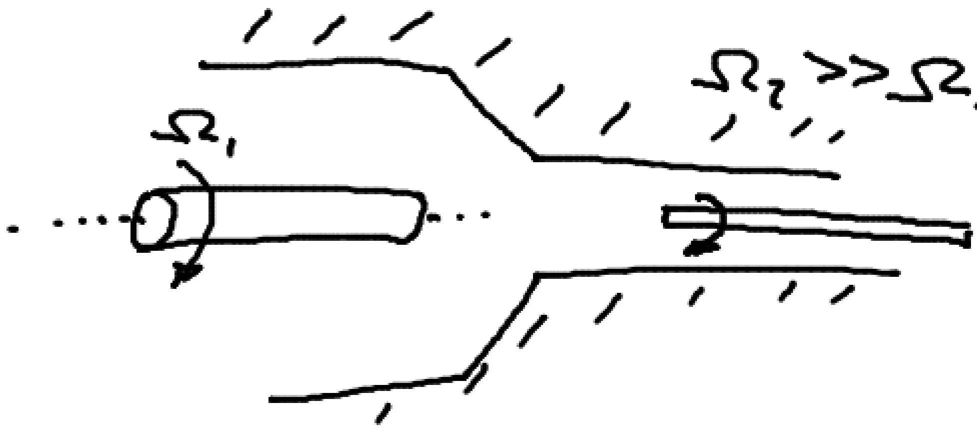
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

- Turbulenz

Wirbelfäden.

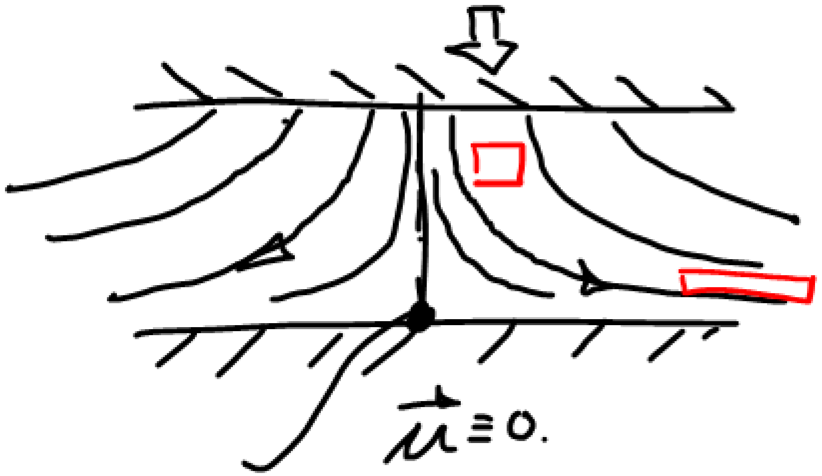




$\Omega_2 \gg \Omega_1$ infolge Drallsatz..

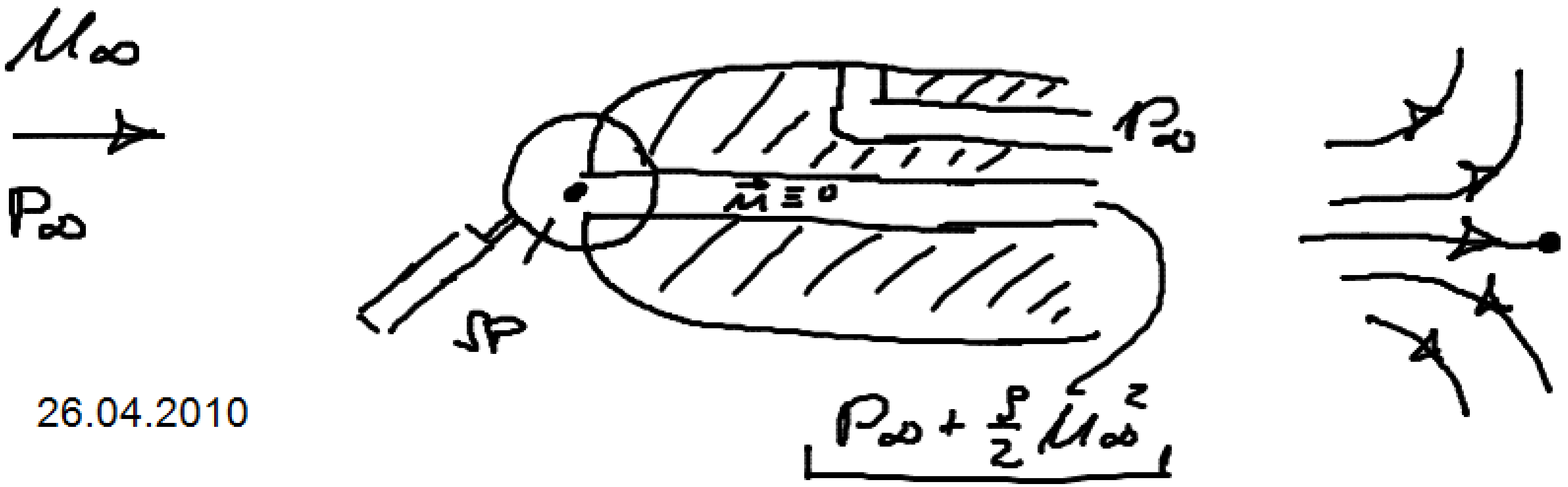
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

- Staupunktströmung ist eine reine Dehnströmung.



Staupunkt.

Pitot.



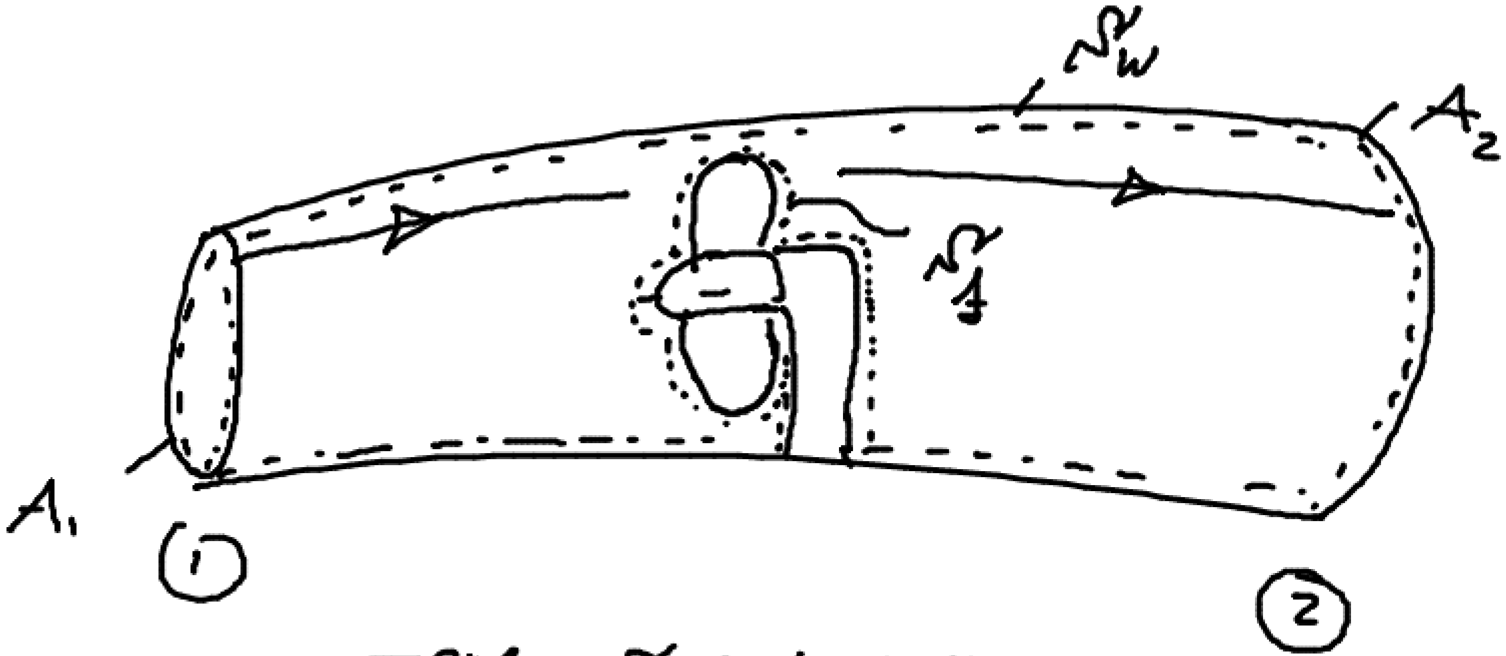
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Wichtig!

Kontigleichung für eine Stromröhre.



geschlossene Fläche S des Kontrollvolumens

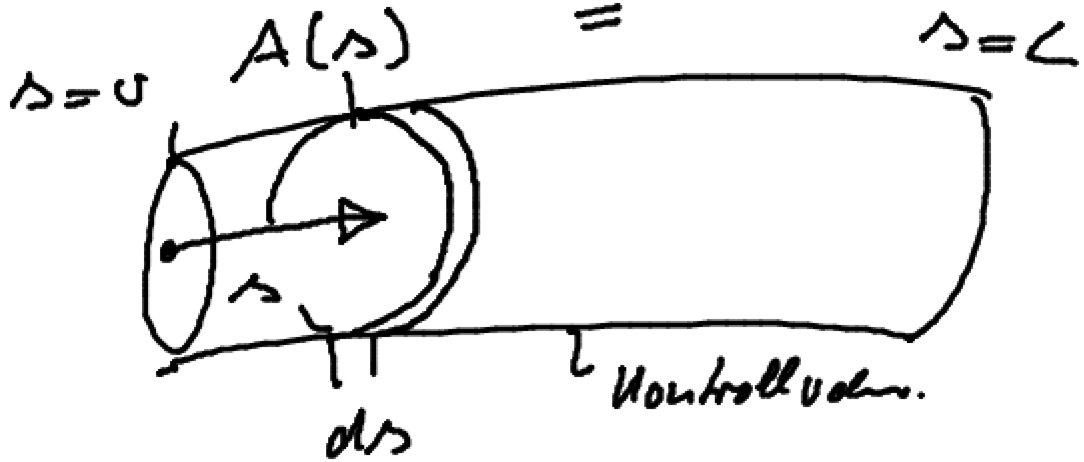
$$S = A_1 + A_2 + S_W + S_4$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

Konti: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\underline{\underline{V}}} \rho \, dV + \oint_{\underline{\underline{S}}} \rho \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS = 0.$

V, S sind zeitlich fest



$$dV = A(s)\,ds$$

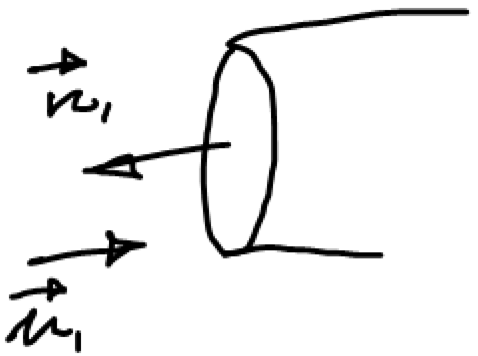
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{s=0}^{s=L} A(s)\,\rho \, ds = \int_{s=0}^{L} \frac{\partial \rho}{\partial t} A \, ds$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

$$\oint_S \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \underbrace{\int_{A_1} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{-\dot m_1} + \underbrace{\int_{A_2} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{+\dot m_2} + \underbrace{\int_{S_f} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{=0} + \underbrace{\int_{S_W} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\neq 0 \text{ bei bewegten } S_W.}$$



A_1: $$\int_{A_1} \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = -\dot m_1 ,$$

da gilt

$$\dot m := \left| \int_A \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS \right|$$

Definition des Massenstroms.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

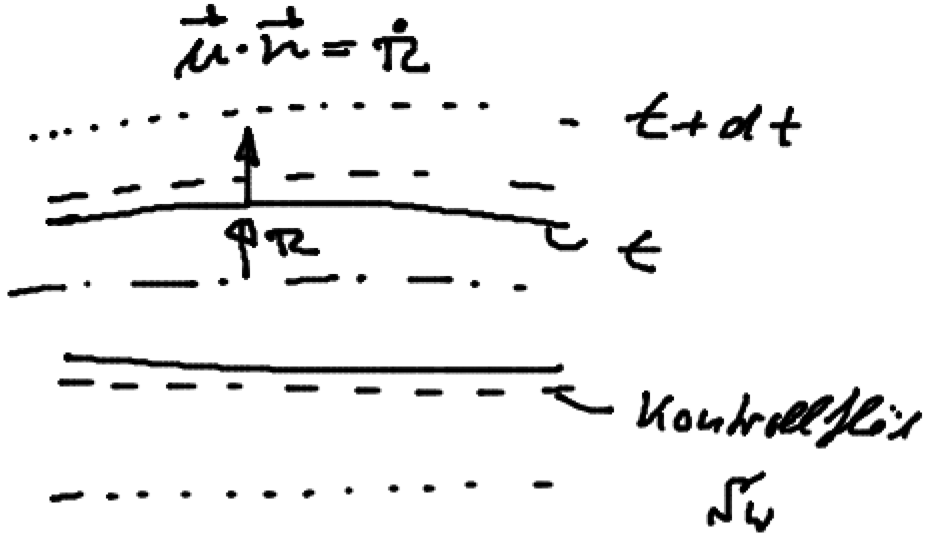
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

$$\int_{S_W} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{\dot{R}}\, dS,$$

Wenn $R(t)$ die bewegte Wand ist.



$$dS = 2\pi R\, ds$$

$$\int_{S_W} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \int_0^L \rho\, \dot{R}\, 2\pi R\, ds$$

$$A = \pi R^2 \rightsquigarrow \frac{\partial A}{\partial t} = 2\pi R \dot{R}$$

$$\int_{S_W} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, ds = \int_0^L \rho \frac{\partial A}{\partial t}\, ds$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5

Kontigleichung für eine Stromröhre

$$\underbrace{\int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial t} A\, ds}_{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV} + \underbrace{\int_0^L \rho \frac{\partial A}{\partial t} ds}_{\int_{S_W} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dA} - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0.$$

$$\boxed{\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0}$$

☺

Bei einem im zeitlichen Mittel stationären Vorgang ist $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. $\rightsquigarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 5