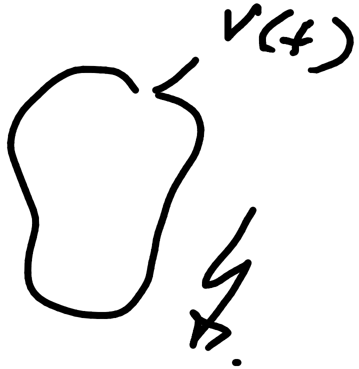
Kontigleichung

$$\frac{Dm}{Dt} \overset{!}{=} 0 \qquad m = \int_{V(t)} \rho \, dV$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

∇

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$$

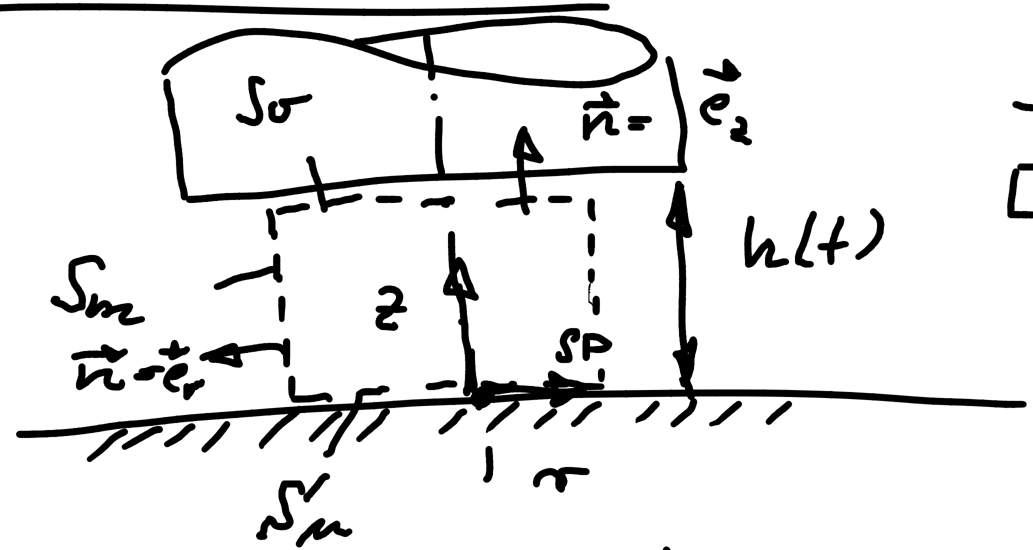
Δ

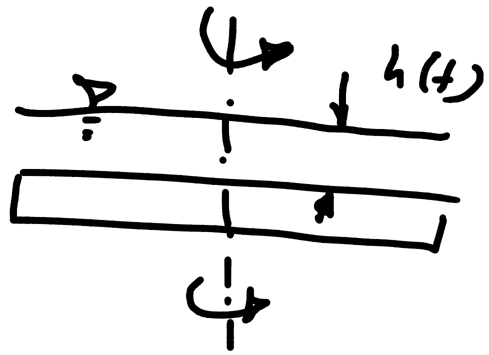
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Beispiel zur Kontinuität





$$\vec{u} = u_z \vec{e}_z + u_r \vec{e}_r \quad , \quad \varrho = \text{const.}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho \, dV}_{\equiv 0.} + \oint_S \varrho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_z = \dot{h}$$

$$\int_{S_m} \varrho \overbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}^{u_r} \, dS + \int_{S_u} \varrho \overbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}^{\equiv 0.} \, dS + \int_{S_o} \varrho \overbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}^{u_z} \, dS = 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

Impulssatz.

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}.$$

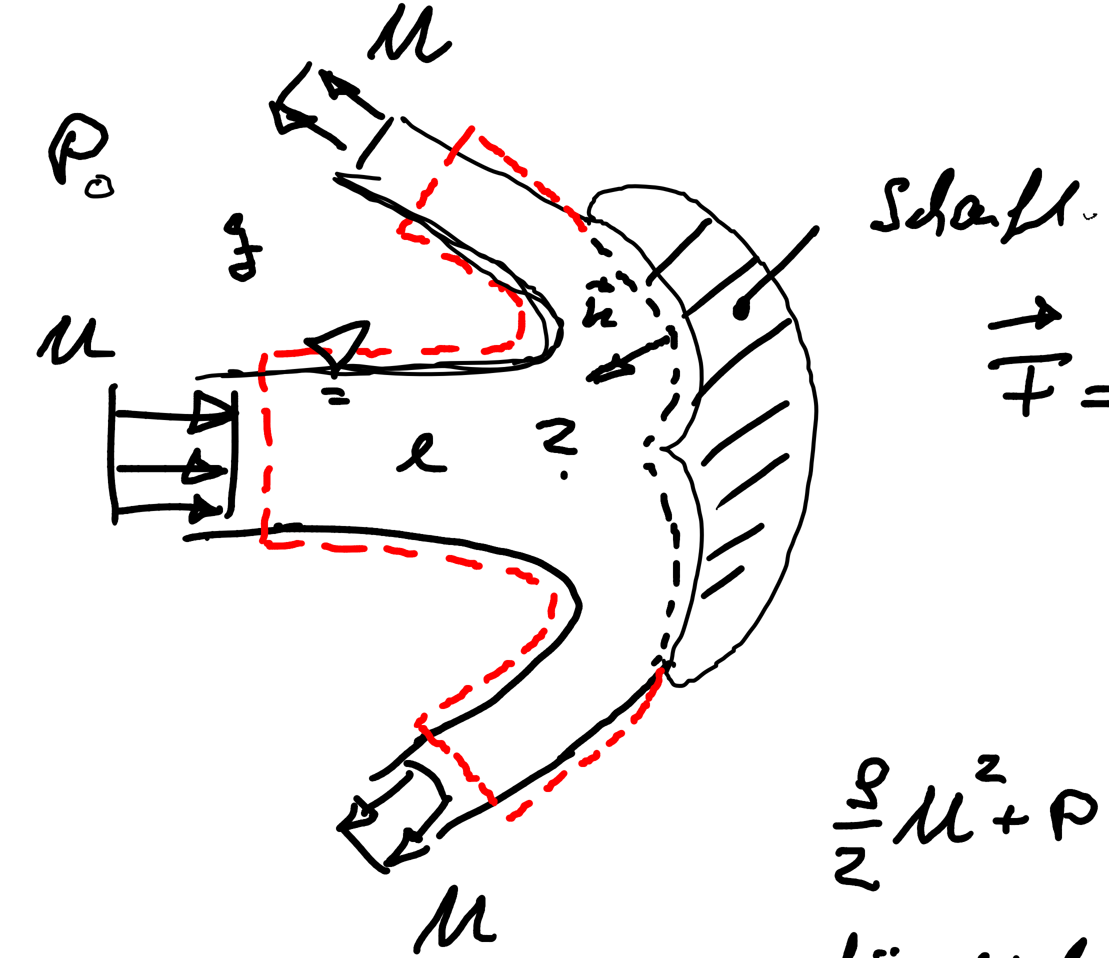
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{u}\, dV + \oint_S \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \oint_S \vec{t}\, dS + \int_V \rho \vec{k}\, dV.$$

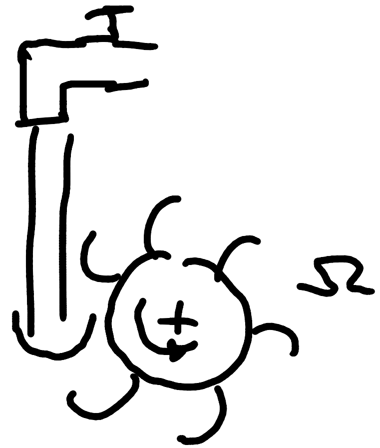
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Beispiel zum Impulssatz.





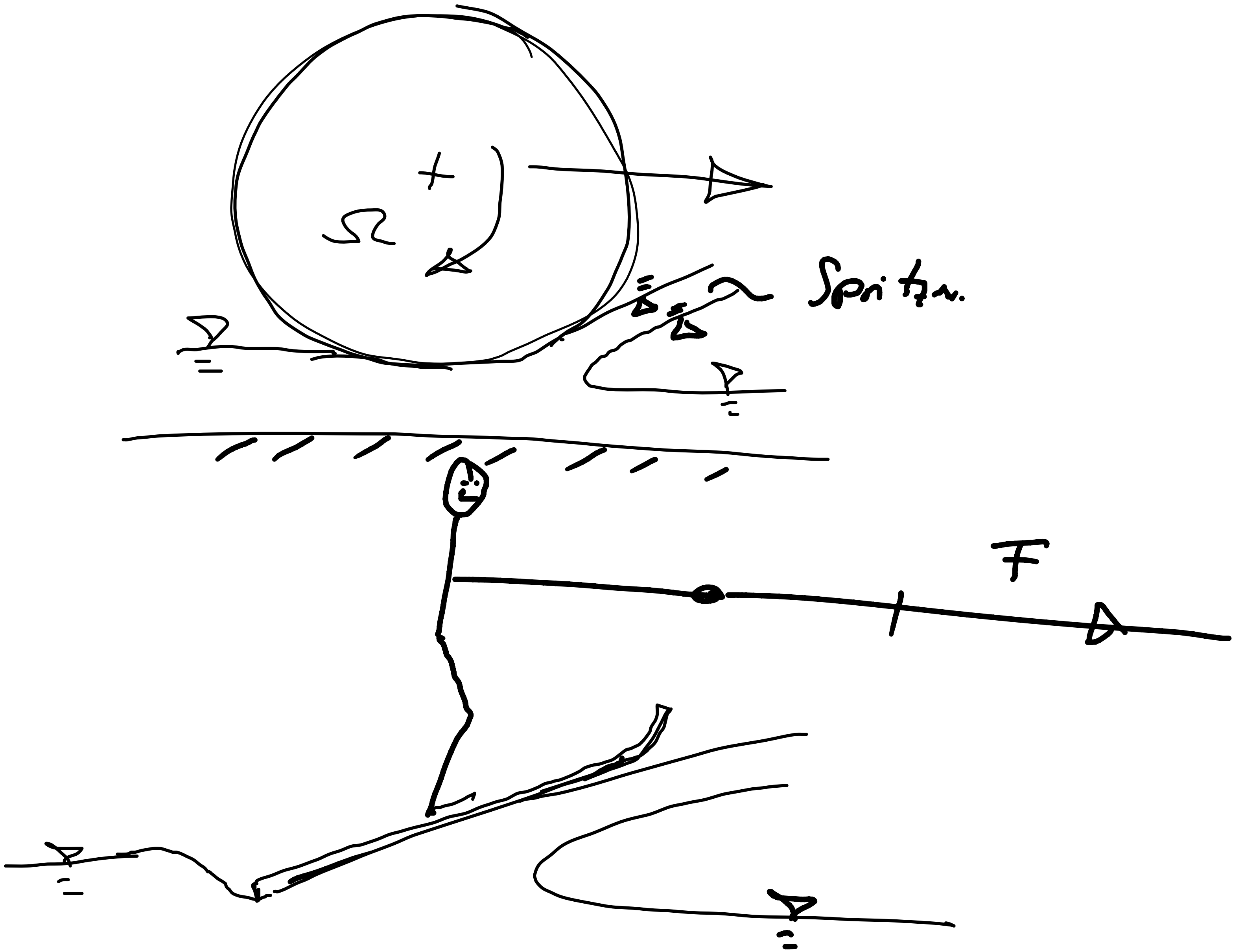
$$\vec{F} = \int_{S_W} \vec{t}\, dS \quad (= ?)$$

$$\frac{\varrho}{2}u^2 + p + \psi = const,$$

für verlustfreie, inkompressible Strömung.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

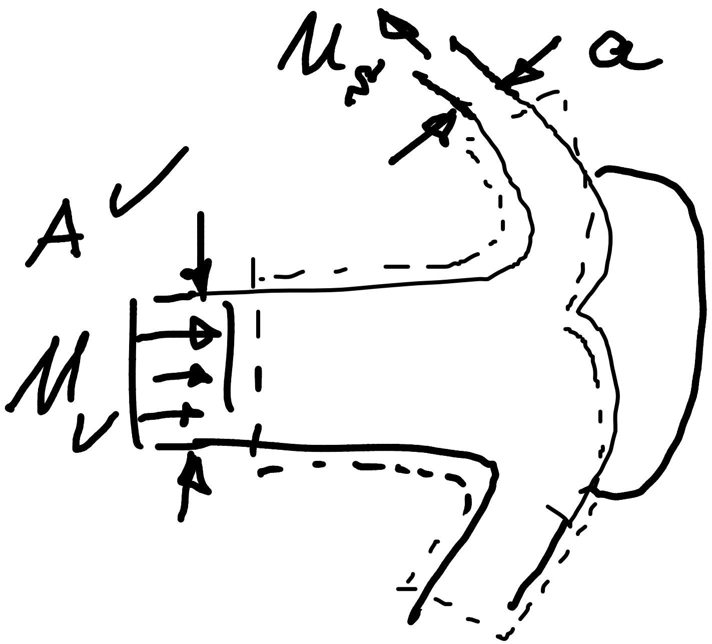
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7



$u_s = u$ folgt aus der Bernoulli-Gleichung.

$$\oint_S \varrho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

$$-\varrho u A + 2 \varrho u a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{A}{2}.$$

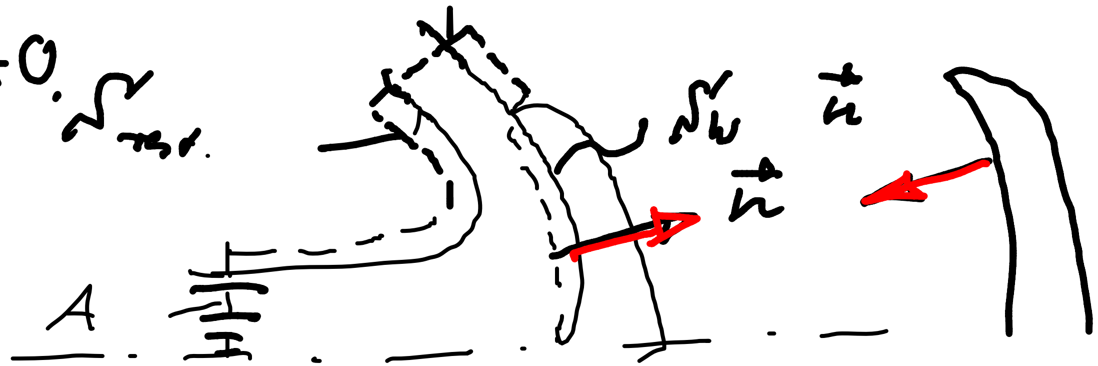
stationär $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, $\vec{k} \equiv 0$.

$$\int_A \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS + 2\int_a \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS =$$

$$= \underbrace{\int_{S_W} \vec{t}\, dS}_{-\vec{F}_{Fl\to Wand}} + \int_A \vec{t}\, dS + 2\int_a \vec{t}\, dS + \int_{S_{ext}} \vec{t}\, dS$$

($\int_A \vec{t}\, dS = -p_0\vec{n}$, $\int_a \vec{t}\, dS = -p_0\vec{n}$, $\int_{S_{ext}} \vec{t}\, dS = -p_0\vec{n}$)

$p_0 = 0$, S_{ext}.



Hinweis: Wenn Stromlinien nicht gekrümmt sind, dann verschwindet die Änderung des Druckes normal zur Stromlinie.

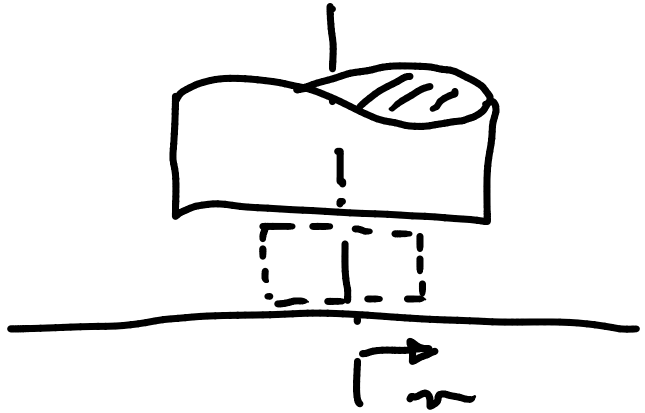
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

$$\int_{S_m} \rho\, u_r \, dS + \int_{S_0} \rho\, \dot{h} \, dS = 0.$$



$$2\pi \int_0^h u_r\, r \, dz + \pi r^2 \dot{h} = 0.$$

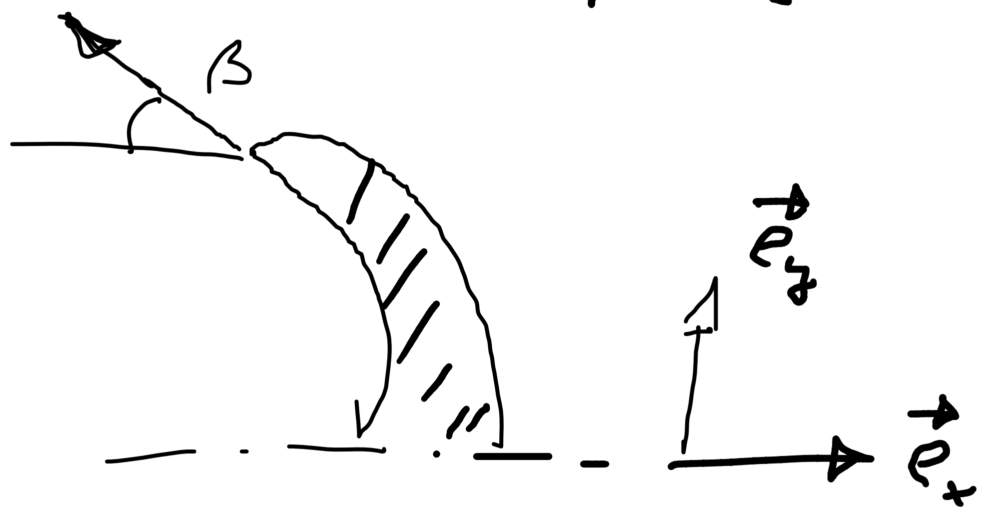
$$\int_0^h u_r(z)\, dz = -\frac{r}{2}\dot{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_r = -\frac{r}{2h}\dot{h}}$$

Für $u_r(z) \neq f_r(z)$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\int_A \rho \vec{u}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS + 2\int_a \rho \vec{u}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = -\vec{F}_{Fl\to Schaufel} \quad \Big|\cdot\vec{e}_x$$

$$\dot{m} = \rho U A.$$



$$\int_A \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{e}_x}_{U}\,\underbrace{\vec{u}}_{U\vec{e}_x}\cdot\underbrace{\vec{n}}_{-\vec{e}_x}\,dS + 2\int_a \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{e}_x}_{-U\cos\beta}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = -F_x$$

$$-U\dot{m} - 2U\cos\beta\,\frac{\dot{m}}{2} = -F_x$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

$$F_x = \dot{m}\, u\,(1+\cos\beta)$$

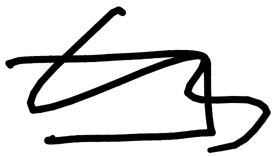
Impulssatz in differentieller Form.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV = \frac{D}{Dt}\int \vec{u}\, dm = \int \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dm = \int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV =$$

$$= \oint_{S} \vec{t}\, dS + \int_V \rho \vec{k}\, dV$$

Hinweis:

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}$$

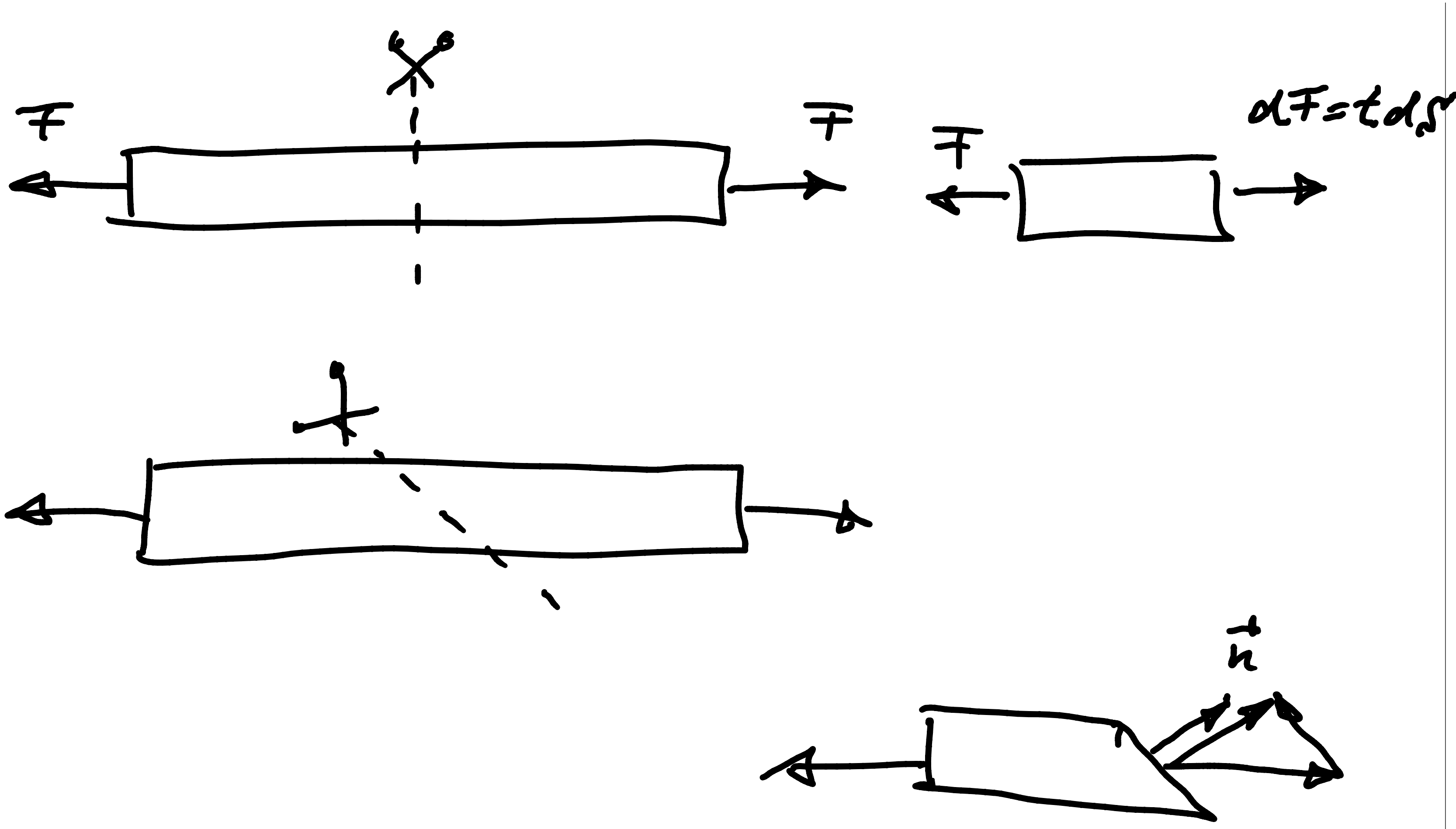


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7



$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$$= \vec{n} \cdot \left(\tau_{xx} \vec{e}_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_x \vec{e}_y + \dots + \tau_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z \right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

Bei Flüssigkeit/Gase wird der hydrostatische Druck abgespalten.

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

p hydrostatischer Druck

$\underset{\sim}{I}$ Einheitstensor

$\underset{\sim}{P}$ Reibungsspannungstensor.

$\underset{\sim}{T}$ Spannungstensor.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV = \oint_{S'} \vec{n}\cdot \underset{\sim}{T}\, dS' + \int_V \rho \vec{k}\, dV.$$

Gauß !

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV = \int_V \nabla\cdot \underset{\sim}{T}\, dV + \int_V \rho \vec{k}\, dV.$$

V ist beliebig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla\cdot \underset{\sim}{T} + \rho \vec{k}}$$

Cauchy-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

Spezialformen der Cauchy-Gleichung

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

1. Spezialfall reibungsfreie Strömung $\underset{\sim}{P} \equiv 0$.

Einsetzen in die Cauchy-Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k} \qquad \text{Euler-Gleichung}$$

2. Spezialfall: Newtonsche Flüssigkeit

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

$$\underset{\sim}{P} = 2\eta\, \underset{\sim}{E}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^{T}\right).$$

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{k} + \eta\Delta\vec{u}.$$

Navier-Stokessche Gleichung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

Bernoullische Gleichung folgt aus der Eulergleichung.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k}.$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\nabla p + \rho\vec{k}. \quad \Big| \cdot d\vec{x}.$$

Integration längs einer Stromlinie

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{u}, \quad \text{mit } u = |\vec{u}|.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

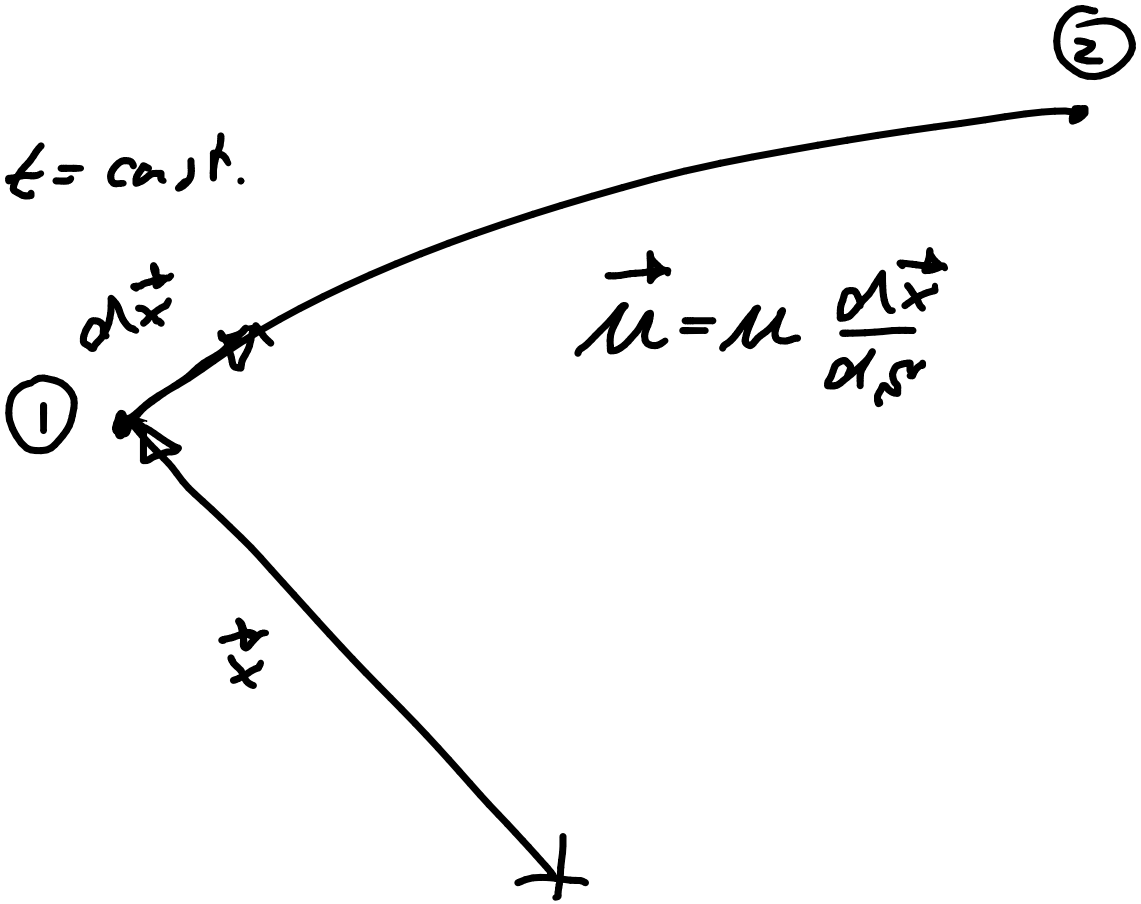
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7

$$\rho\, d\vec{x}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\, \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot d\vec{x} = -\nabla p\cdot d\vec{x} + \rho\underbrace{\vec{k}}\cdot d\vec{x}$$

$t = \text{const.}$

$$\vec{k} = -\nabla \psi_k$$

$$\vec{u} = u\,\frac{d\vec{x}}{ds}$$



$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,ds + \underbrace{\rho\, u\, du}_{+\frac{1}{2}\rho\, d(u^2)} = -dp - \rho\, d\psi$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{\rho}{2} d(u^2) = - dp - \rho \, d\psi \quad \Big| \frac{1}{\rho}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \int d\left(\frac{u^2}{2}\right) + \int \frac{dp}{\rho} + \int d\psi = C$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u^2}{2} + \underbrace{\int \frac{dp}{\rho}}_{P} + \psi = C$$

P Druckfunktion.

C Bernoullische Konstante.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Spezialfall

1. $\rho = \text{const.}$: $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$ ✓

2. $p = C\rho^{\gamma}$ $\quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$: $\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 + \psi_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 + \psi_2 + \int_1^2 \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, ds$$

$\rho = \text{const.}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 7