4.Übung Strömungslehre für die Mechatronik

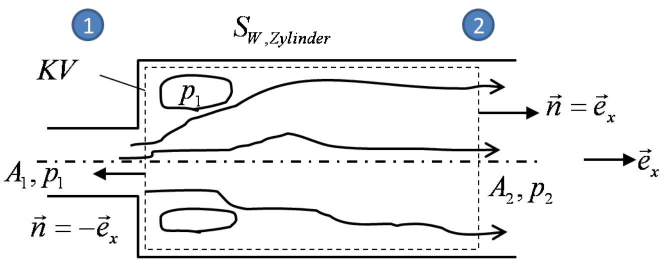
Prof. Dr.-Ing Peter Pelz   Dipl.-Ing. Thomas Bedarff

22. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Impulssatz

1.1 Aufgabe 1: Carnotscher Stoßverlust



In Abbildung 1.1 ist ein sogenannter „ideal schlechter“ Diffusor abgebildet. Beim Durchströmen in die plötzliche Querschnittsaufweitung wird Energie dissipiert, man spricht vom „Carnotschen Stoßverlust“, der sich in einem Druckverlust Δp_v bemerkbar macht. Berechnen Sie diesen Druckverlust. Gehen Sie dafür in folgenden Einzelschritten vor:

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung den idealen Druckanstieg $(p_2 - p_1)_{ideal}$ zwischen den Stellen (1) und (2)

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Impulssatzes den realen Druckanstieg $(p_2 - p_1)_{real}$ über das Kontrollvolumen KV

3. Berechnen Sie den Carnotschen Stoßverlust Δp_{vC} als Differenz

   $\Delta p_{vC} = (p_2 - p_1)_{ideal} - (p_2 - p_1)_{real}$

Hinweis: Nehmen Sie die Strömung als inkompressibel, reibungsfrei sowie im zeitlichen Mittel stationär an, Volumenkräfte können vernachlässigt werden.

Gegeben: A_1, p_1, u_1, A_2, ρ

Lösung

1)

Die Bernoullische Gleichung für im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen lautet:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 \tag{1}$$

Über die Kontinuitätsgleichung ergibt sich für die Geschwindigkeit u_2:

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} \tag{2}$$

was auf die ideale Druckerhöhung führt:

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1)_{ideal} &= \frac{\rho}{2} u_1^2 - \frac{\rho}{2} u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ &= \frac{\rho}{2} u_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3}$$

2)

Der Inpulssatz lautet für im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen:

$$\oint_S \rho \vec{u} \left(\vec{u} \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}S = \vec{F}_{\rightarrow Fl.} \tag{4}$$

Die Kraft ist hierbei die Kraft der Umgebung auf die Flüssigkeit. Betrachtet man sich Abbildung 1.1, so erkennt man, dass die Kräfte in y-Richtung sich aus Symmetriegründen gegenseitig aufheben. Einfluss auf das Fluid haben nur die Kräfte in x-Richtung, Gleichung 4 wird daher mit $\vec{e}_x$ multipliziert.

Durch die Wände kann kein Impulsfluss stattfinden, damit wird Gleichung 4 zu:

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}A_1 + \int_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}A_1 &= \vec{F}_{\rightarrow Fl.} \\ -\rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 &= \vec{F}_{\rightarrow Fl.} \cdot \vec{e}_x \end{aligned} \tag{5}$$

Die Kräfte in x-Richtung sind die Druckkräfte auf das Fluid im Kontrollvolumen:

$$\vec{F}_{\rightarrow Fl.} \cdot \vec{e}_x = p_1 \left(A_2 - A_1\right) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \tag{6}$$

Damit ergibt sich für $(p_2 - p_1)_{real}$ unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung:

$$(p_2 - p_1)_{real} = \rho u_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \tag{7}$$

3) Der Carnotsche Stoßverlust ergibt sich mit $\Delta p_{vC} = (p_2 - p_1)_{ideal} - (p_2 - p_1)_{real}$ zu

$$\begin{aligned} \Delta p_{vC} &= \frac{\rho}{2} u_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ &= \frac{\rho}{2}(u_1 - u_2)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

1.2 Aufgabe 2: Kraft auf eine Rohrverzweigung

Die in Abbildung 1 skizzierte Rohrverzweigung ist an den Stellen [1], [2] und [3] durch Wellenrohre (Gesamtfedersteifigkeit c_{ges}) mit dem übrigen Rohrleitungssystem verbunden und kann isch nur in x-Richtung bewegen. Die Lager seien Reibungsfrei.

Um welche Stelle Δx verschiebt sich das Rohr gegenüber der Ruhelage ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$), wenn die Wellenrohre nicht vorgespannt sind ?

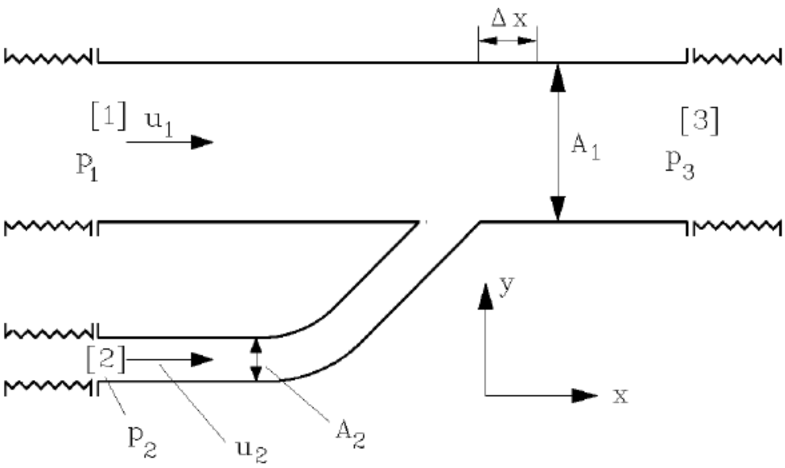


Abbildung 1: Durch Wellenrohre gehaltene Rohrverzweigung

Gegeben: $p_1, p_2, p_3, u_1, u_2, A_1, A_2, \rho = const, c_{ges}$

Lösung

Um die Verschiebung der Rohrverzweigung bestimmen zu können, muss die Kraft der Strömung auf das Rohrsystem ermittelt werden ($\Delta x = F/c_{ges}$). Für die Verwendung des Impulssatzes ist die noch unbekannte Geschwindigkeit u_3 notwendig. Diese kann mittels der Kontinuitätsgleichung für das skizzierte Kontrollvolumen bestimmt werden:

$$\oint_{(S)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{9}$$

Da die Rohrwände nicht durchströmt werden können gilt für sie $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sodass für die Geschwindigkeit u_3 folgt:

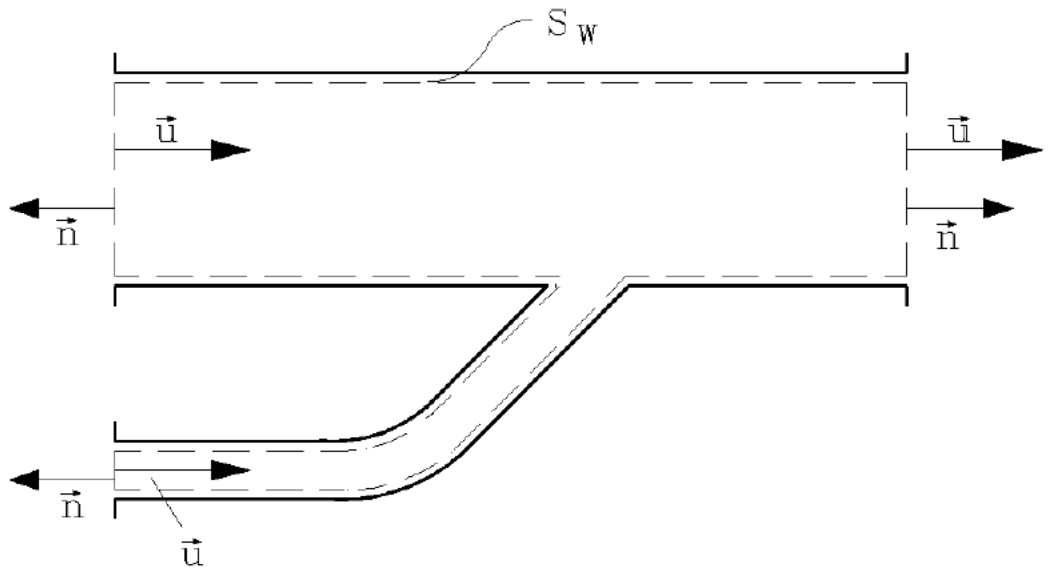


Abbildung 2: Kontrollvolumen

$$u_3 = u_1 + u_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{10}$$

Für die Berechnung der Kraft in x-Richtung wird der Impulssatz für stationäre Strömungen verwendet, multipliziert mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_x$:

$$\oint_{(S)} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S = \vec{F} \cdot \vec{e}_x \tag{11}$$

Für das abgebildete Kontrollvolumen mit $S = A_1 + A_2 + A_3 + S_W$ erhält man somit:

$$\int_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S + \int_{A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S + \int_{A_3} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S + \int_{S_W} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S = \vec{F} \cdot \vec{e}_x \tag{12}$$

Die Berechnung der Oberflächenintegrale ergibt der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
\int_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S &= \rho u_1 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \left(u_1 \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x) \right) = -\rho u_1^2 A_1 \\
\int_{A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S &= \rho u_2 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \left(u_2 \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x) \right) = -\rho u_2^2 A_2 \\
\int_{A_3} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S &= \rho u_3 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \left(u_3 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) \right) = \rho u_3^2 A_3 \\
\int_{S_W} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Kraft $\vec{F}\cdot\vec{e}_x$ ist die Summe aller Kräfte in x-Richtung auf das Fluid im Kontrollvolumen:

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_x = p_1A_1 + p_2A_2 - p_3A_1 + F_{x,Rohr\rightarrow Fluid} \tag{14}$$

Zu beachten ist hierbei, das im Impulssatz immer die Kraft auf das Fluid angegeben wird. Die Kraft vom Fluid auf die Wand muss somit entgegengesetzt wirken:

$$F_{x,Fluid\rightarrow Rohr} = -F_{x,Rohr\rightarrow Fluid} \tag{15}$$

Damit ergibt sich für die Impulsbilanz aus Gleichung 12:

$$\begin{aligned} -\rho u_1^2A_1 - \rho u_2^2A_2 + \rho u_3^2A_1 &= p_1A_1 + p_2A_2 - p_3A_3 - F_{x,Fluid\rightarrow Rohr} \\ \Rightarrow F_{x,Fluid\rightarrow Rohr} &= (p_1-p_3)A_1 + p_2A_2 + \rho A_1(u_1^2-u_3^2) + \rho u_2^2A_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Die Verschiebung Δx berechnet sich nun einfach über $\Delta x = F/c_{ges}$ zu

$$\Delta x = \frac{1}{c_{ges}}\left[(p_1-p_3)A_1 + p_2A_2 + \rho A_1(u_1^2-u_3^2) + \rho u_2^2A_2\right] \tag{17}$$

1.3 Aufgabe 3: Luftkissenfahrzeug

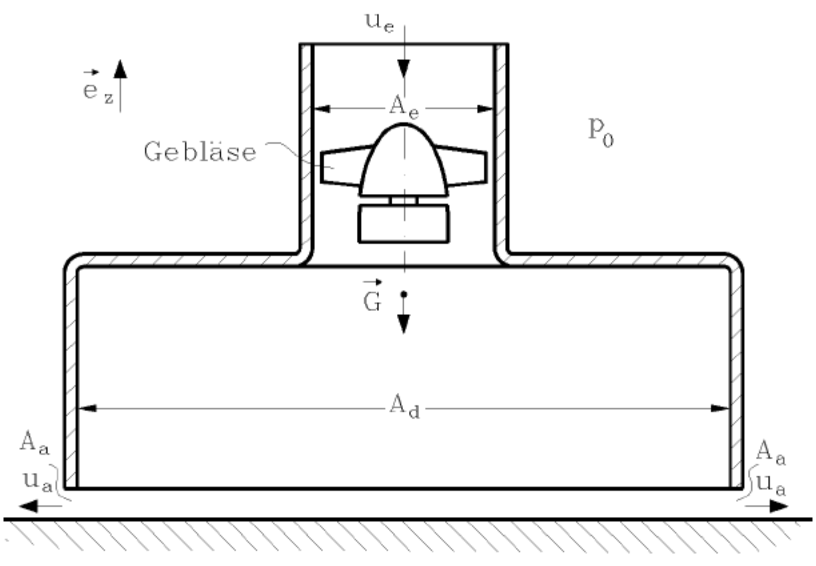


Abbildung 3: Luftkissenfahrzeug

Das in Abbildung 3 abgebildete Luftkissenfahrzeug (Gewichtskraft G) wird über ein Gebläse in konstanter Höhe in Schwebe gehalten. Die Umgebungsluft (Druck p_0) wird über das Gebläse in eine Druckkammer gepumpt und entweicht am Umfang durch die Fläche A_a. Die Gescheindigkeit in der Druckkammer sowie jegliche Wandreibung sollen vernachlässigt werden.

Berechnen Sie den Volumenstrom Q, den das Gebläse liefern muss, damit das Luftkissenfahrzeug in der gezeichneten Lage schwebt.

Gegeben: A_e, A_a, A_d, p_0, G

Lösung

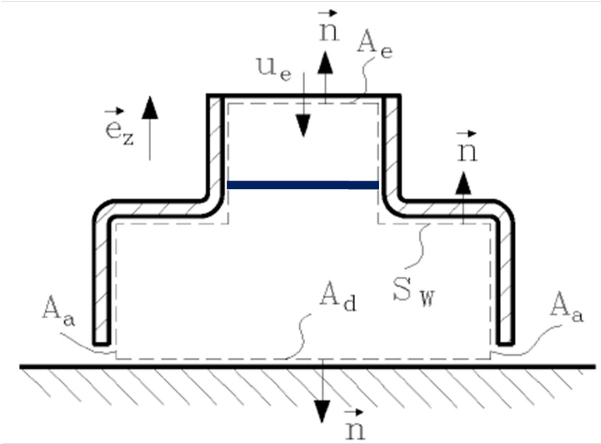


Abbildung 4: Kontrollvolumen am Luftkissenfahrzeug

Das Luftkissenfahrzeug wird in konstanter Höhe gehalten, daher kann ein statisches Kräftegleichgewicht in $\vec{e}_z$-Richtung angesetzt werden:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i \cdot \vec{e}_z &= 0 \\ \vec{G} \cdot \vec{e}_z + \vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z + \vec{F}_{aussen} \cdot \vec{e}_z &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$\vec{F}_{innen}$ ist die Kraft, die durch die eingeblasene Luft von innen auf das Luftkissenfahrzeug ausgeübt wird, $\vec{F}_{aussen}$ ist entsprechend die Kraft, die durch die Umgebungsluft auf das Luftkissenfahrzeug ausgeübt wird. Die Kraft in $\vec{e}_z$-Richtung $\vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z$ lässt sich mittels des Impulssatzes für im zeitlichen Mittel stationäre Strömung berechnen:

$$\oint\limits_{(S)} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S = \vec{F}_{\to Fl} \cdot \vec{e}_z \tag{19}$$

was ausgeschrieben über die Wände $S = A_a + A_e + A_d + S_W$ auf folgende Gleichung führt:

$$\int\limits_{A_a} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S + \int\limits_{A_e} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S + \int\limits_{A_d} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S + \int\limits_{S_W} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S = \vec{F}_{\to Fl} \cdot \vec{e}_z \tag{20}$$

mit der z-Komponente $\vec{F}_{\to Fl} \cdot \vec{e}_z$ der Kraft auf das Fluid. An den Wänden des Kontrollvolumens S_W und A_d ist $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, an der Wand A_a ist $\vec{u} \cdot \vec{e}_z = u\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$. Somit ergibt sich für den Impulssatz:

$$\int\limits_{A_e} \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}S = \vec{F}_{\to Fl} \cdot \vec{e}_z \tag{21}$$

Die z-Komponente der Kraft auf das Fluid ergibt sich zu:

$$\vec{F}_{\to Fl} \cdot \vec{e}_z = -p_e A_e + p_d A_d - \vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z \tag{22}$$

Hierbei wurde wieder von der Tatsache gebrauch gemacht, dass die Kraft auf das Fluid entgegengerichtet ist zur Kraft des Fluides auf das Luftkissenfahrzeug:

$$\vec{F}_{\rightarrow Fl,S_W} \cdot \vec{e}_z = -\vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z \tag{23}$$

Eingesetzt in die Impulsbilanz Gleichung 21 ergibt sich für die Kraft $\vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z$:

$$\vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z = -\rho u_e^2 A_e - p_e A_e + p_d A_d \tag{24}$$

Die äussere Kraft in z-Richtung $\vec{F}_{aussen} \cdot \vec{e}_z$ ist die Kraft, die der Umgebungsdruck auf die Oberfläche des Luftkissenfahrzeuges ausübt:

$$\vec{F}_{aussen} \cdot \vec{e}_z = -p_0(A_d - A_e) \tag{25}$$

Setzt man die Kräfte $\vec{F}_{aussen} \cdot \vec{e}_z$ und $\vec{F}_{innen} \cdot \vec{e}_z$ in das Kräftegleichgewicht Gleichung 18 ein, so erhält man:

$$-G - p_0(A_d - A_e) - p_e A_e - \rho u_e^2 A_e + p_d A_d = 0 \tag{26}$$

mit der noch unbekannten Geschwindigkeit u_e und den Drücken p_e und p_d. Die Drücke lassen sich für die reibungsfreie Strömung mittels der Bernoullischen Gleichung berechnen. Für den Druck p_e am Gebläseeintritt wird die Bernoullische Gleichung längs eines Stromfadens von einem beliebigen Punkt 0 weit vor dem Gebläseeintritt (damit wird $u_0 = 0$) zum Gebläseeintritt e angewandt. Unter Vernachlässigung der Potentialdifferenz der Schwere ($\Psi_0 \approx \Psi_e$, d.h. der Punkt 0 liegt ungefähr auf derselben Höhe wie der Punkt e) erhält man:

$$p_e = p_0 - \frac{\rho}{2} u_e^2 \tag{27}$$

was mit dem Zusammenhang

$$u_e = \frac{Q}{A_e} \tag{28}$$

auf

$$p_e = p_0 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{A_e} \right)^2 \tag{29}$$

führt.

Analog dazu wird der Druck p_d im Luftkissen berechnet über Anwendung der Bernoullischen Gleichung vom Inneren des Luftkissens ($p = p_d$) zur Fläche A_a ($p = p_a = p_0$):

$$p_d = p_0 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{A_a} \right)^2 \tag{30}$$

Die Drücke eingesetzt in Gleichung 26 führt auf die Bestimmungsgleichung für den Volumenstrom Q:

$$Q = \sqrt{\frac{2G}{\rho \left(A_d / A_a^2 - 1/A_e \right)}} \tag{31}$$