

# 3.Übung Strömungslehre für die Mechatronik

Prof. Dr.-Ing Peter Pelz      Dipl.-Ing. Thomas Bedarff

16. Juni 2009

Aufgrund vielfachen Wunsches ist der Umfang des Aufgabenblattes erweitert worden, ebenso sind die Erklärungen detaillierter.

Ab dem 09.06. finden auf Ihre Nachfrage hin Übungen / Vorrechenübungen statt. Inhaltlich können Sie Ihre Wünsche mit einfließen lassen, z.B. welche Aufgaben durchgenommen werden sollen, welche Schwerpunkte gesetzt werden etc. Wünsche werden per E-Mail entgegengenommen.

Es gibt keine regulären Sprechstunden, sollten Fragen zu den Übungsaufgaben auftauchen, so machen Sie bitte einen Termin aus. Fragen per E-Mail sind ungünstig, da hierbei zum Einen die Möglichkeit zu Rückfragen fehlt und zum Anderen mündliche Erklärungen effektiver sind.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Hydrostatik</b>	<b>2</b>
1.1 Aufgabe 1: Abflussverschluss . . . . .	2
1.2 Aufgabe 2: dichtende Halbkugelschale . . . . .	3
<b>2 Kontinuitätsgleichung</b>	<b>5</b>
2.1 Aufgabe 1: Bewegter Kolben . . . . .	5
2.2 Aufgabe 2: Strömung zwischen zwei Platten . . . . .	9
<b>3 Stromfadentheorie</b>	<b>11</b>
3.1 Aufgabe 1: Venturidüse . . . . .	11
3.2 Aufgabe 2: Ofen . . . . .	12
3.3 Aufgabe 3: Rohrpumpe . . . . .	14
3.4 Aufgabe 4: Radialpumpe . . . . .	17

# 1 Hydrostatik

## 1.1 Aufgabe 1: Abflussverschluss

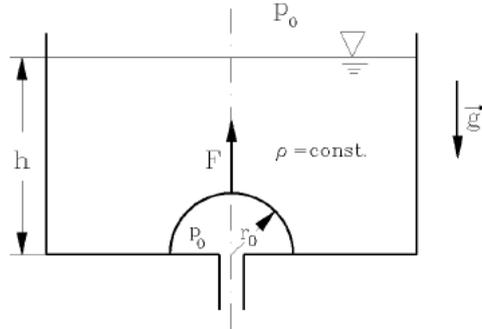


Abbildung 1: Abflussverschluss durch eine Halbkugelschale

Der Abfluss des in Abbildung 1 skizzierten Wasserbehälters ist durch eine Halbkugelschale (Gewicht  $G$ , Radius  $r_0$ ) abgeschlossen.

Welche Kraft  $F$  ist notwendig, um den Abfluss zu öffnen?

Gegeben:  $h, \rho, r_0, g$

### Lösung

Der Umgebungsdruck  $p_0$  hebt sich gegenseitig auf, er kann deshalb zu Null gesetzt werden.

Der Auftrieb der Halbkugel, wäre sie *komplett* umspült, berechnet sich zu

$$F_{A,theo} = \rho g V_{Halbkugel} \quad (1)$$

Da die Kugel jedoch nicht komplett umspült ist, muss der Auftrieb um diejenige Kraft reduziert werden, die zwar in die Berechnung des Auftriebes mit einfließt, hier jedoch nicht vorhanden ist. Es muss somit die Kraft abgezogen werden, die auf die Unterseite der Halbkugel wirken würde:

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g V_{Halbkugel} - \rho g h A_{Halbkugel} \\ &= \rho g \frac{2}{3} \pi r_0^3 - \rho g h \pi r_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Das Kräftegleichgewicht am Körper liefert:

$$\begin{aligned} F &= G - F_A = G - \rho g \frac{2}{3} \pi r_0^3 + \rho g h \pi r_0^2 \\ &= G + \rho g h \pi r_0^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{h} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

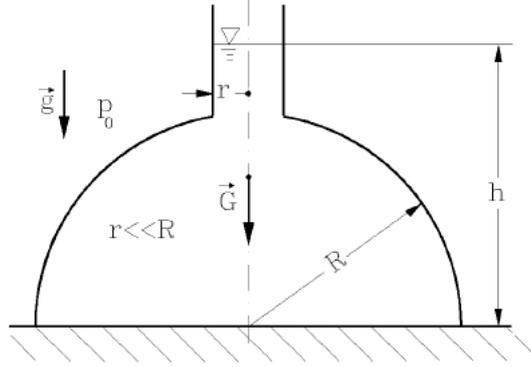


Abbildung 2: Durch ihr Eigengewicht dichtende Halbkugelschale

## 1.2 Aufgabe 2: dichtende Halbkugelschale

Die in Abbildung 2 dargestellte, mit Flüssigkeit (Dichte  $\rho$ ) gefüllte Halbkugel liegt auf einer ebenen Platte und dichtet durch ihr Eigengewicht  $G$ .

Berechnen Sie mit der Annahme  $r \ll R$  die maximale Höhe  $h$  der Flüssigkeit, damit kein Leck auftritt für:

1. Die Flüssigkeit steht im Einfüllstutzen ( $h > R$ )
2. Die Flüssigkeit ist nur innerhalb der Halbkugel ( $h < R$ )

### Lösung

1)

Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit nicht im Körper, sondern ausserhalb des Körpers wäre. Der theoretische Auftrieb des *komplett* umspülten Körpers berechnet sich dann analog zu Aufgabe 1 zu:

$$F_{A,theo} = \rho g (V_{Halbkugel} + V_{Zylinder}) \quad (4)$$

Diese theoretische Auftriebskraft wird wieder reduziert um diejenige Kraft, die in die Berechnung des Auftriebes mit einfließt, hier jedoch nicht vorkommt:

$$\begin{aligned} F_A &= F_{A,theo} - \rho g h \pi R^2 = \rho g (V_{Halbkugel} + V_{Zylinder}) - \rho g h \pi R^2 \\ &= \rho g \left( \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi r^2 (h - R) \right) - \rho g h \pi R^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Da sich die Flüssigkeit nicht ausserhalb des Körpers sondern innerhalb befindet, muss bei der Kraft in Gleichung 5 das Vorzeichen umgekehrt werden. Mit der Bedingung für Dichten ( $F = G$ ) folgt:

$$h = \frac{G + \rho g \pi R \left( r^2 - \frac{2}{3} R^2 \right)}{\rho g \pi (R^2 - r^2)} \quad (6)$$

Die Annahme ( $r \ll R$ ) vereinfacht dies zu:

$$\frac{h}{R} = \frac{G}{\rho g \pi R^3} + \frac{2}{3} \quad (7)$$

2)

Wieder mit der Annahme, dass der Körper von Aussen umspühlt wird, erfährt er eine theoretischen Auftriebskraft von

$$F_{A,theo} = \rho g V_{Kugelschnitt} = \rho g \left( \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 \right) \quad (8)$$

welche wieder um denjenigen Kraftanteil, der in die Berechnung des Auftriebes mit einfließt, hier jedoch nicht vorkommt, reduziert wird:

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g \left( \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 \right) - \rho g h \pi R^2 \\ &= -\frac{1}{3} \rho g \pi h^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Das Vorzeichen in Gleichung 9 wird wieder umgekehrt, und mit der Bedingung für Dichten ( $G = F$ ) erhält man für h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{3G}{\rho g \pi}} \quad (10)$$

## 2 Kontinuitätsgleichung

### 2.1 Aufgabe 1: Bewegter Kolben

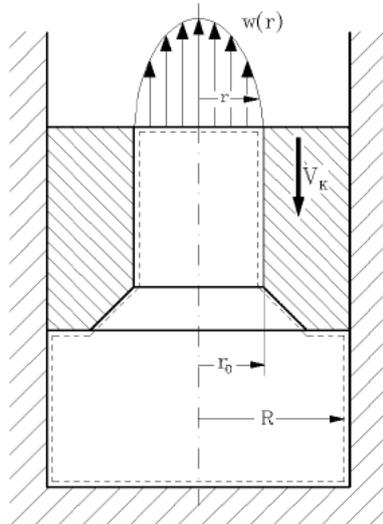


Abbildung 3: Bewegter Kolben

Ein Kolben (siehe Abbildung 3) bewegt sich in einem mit Öl gefüllten Zylinder mit der Geschwindigkeit  $V_K$  nach unten. Die Geschwindigkeitsverteilung  $w(r)$ , mit der das Öl die Kolbenbohrung an der Oberkante verlässt, ist relativ zum Kolben gemessen:

$$w(r) = W_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Maximalgeschwindigkeit  $W_0$  mit Hilfe

1. eines kolbenfesten,
2. eines ortsfesten Koordinatensystems

### Lösung

**Kolbenfestes Koordinatensystem:** Im kolbenfesten Koordinatensystem (siehe Abbildung 4) bewegt sich die untere Zylinderwand mit  $V_K$  nach oben. Mit  $\rho = const$  lautet die Kontinuitätsgleichung für ein (in diesem Koordinatensystem) festes Kontrollvolumen:

$$\rho \oint_{(S)} \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (11)$$

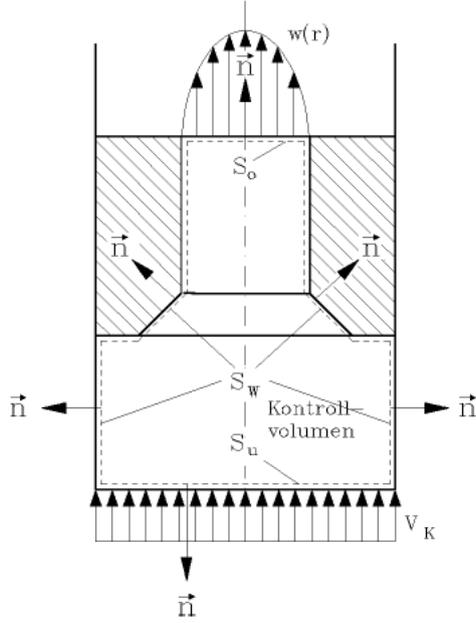


Abbildung 4: Bewegter Kolben im kolbenfesten Koordinatensystem

Der Rand des kontrollvolumens wird in drei Bereiche ( $S_w, S_u, S_o$ ) aufgeteilt. Damit folgt für die Kontinuitätsgleichung:

$$\int_{(S_w)} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{(S_u)} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{(S_o)} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (12)$$

Die Integranden  $\vec{\omega} \cdot \vec{n}$  werden einzeln ausgewertet:

Die Wände  $S_w$  können nicht durchströmt werden, weshalb dort  $\vec{\omega} \cdot \vec{n}$  zu Null wird.

Am Rand  $S_o$  strömt das Fluid mit der Geschwindigkeit  $\vec{\omega}(r)$  aus. Strömungsrichtung und Normalenvektor  $\vec{n}$  zeigen in dieselbe Richtung, daher ist  $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = \omega(r)$ .

Der Rand  $S_u$  wird mit der Geschwindigkeit des Kolbens  $V_K$  durchströmt. Da die Richtung von  $V_K$  und  $\vec{n}$  entgegengesetzt sind ist  $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = -V_K$ .

Das Flächenelement  $dS$  ergibt sich in Zylinderkoordinaten für  $S_o$  und  $S_u$  zu:  $dS = r \, dr \, d\varphi$ .

	$S_o$	$S_u$	$S_w$
$\vec{\omega} \cdot \vec{n}$	$\omega(r)$	$-V_K$	0
$dS$	$r \, dr \, d\varphi$	$r \, dr \, d\varphi$	

Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung ergibt sich:

$$W_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_0} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\varphi - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R V_K r \, dr \, d\varphi = 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow \pi R^2 V_K = W_0 2\pi \int_{r=0}^{r_0} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} r \, dr$$

Das verbleibende Integral kann einfach gelöst werden, indem die Klammer ausmultipliziert und dann über die Summen integriert wird. Umgestellt nach  $W_0$  ergibt sich:

$$W_0 = 2V_K \left( \frac{R}{r_0} \right)^2 \quad (14)$$

**Ortsfestes Koordinatensystem:** Im ortsfesten Koordinatensystem lautet die Kontinuitätsgleichung mit der Absolutgeschwindigkeit  $\vec{c}$ :

$$\oint_{(S)} \vec{c} \cdot \vec{n} = \int_{(S_W)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS + \int_{(S_o)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS + \int_{(S_K)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (15)$$

Da das Kontrollvolumen ortsfest ist, wird es vom sich bewegenden Kolben durchdrungen. Somit entsteht ein Fluss über die Wand  $S_K$  an den Stellen, an denen der Kolben die Fläche  $S_K$  durchdringt.

Die Normalenvektoren der Fläche  $S_K$  haben unterschiedliche Orientierungen und werden im folgenden ausführlich behandelt. Die Fläche  $S_K$  wird aufgeteilt in drei Flächen: Die waagrechte Kreisfläche  $S_{K1}$ , die schrägstehende Fläche  $S_{K2}$  sowie die Zylinderfläche  $S_{K3}$

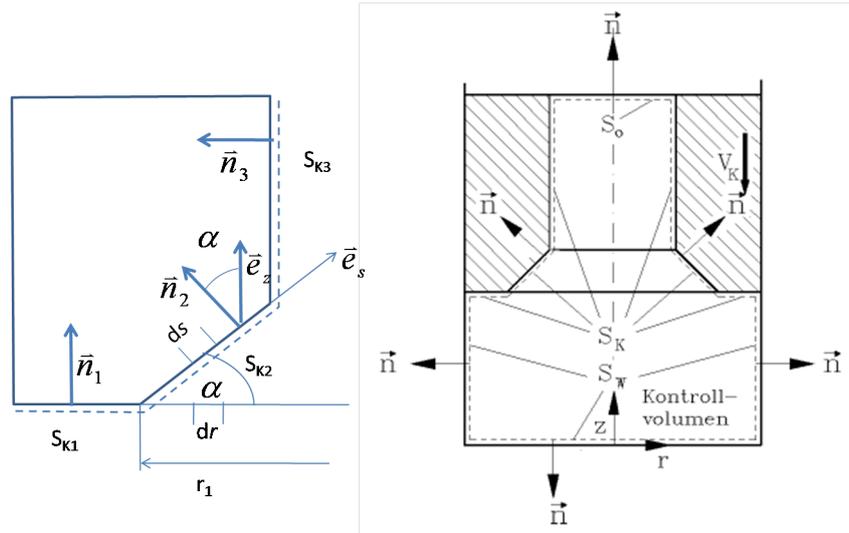


Abbildung 5: bewegter Kolben im ortsfesten Koordinatensystem

Damit ergibt sich für das Oberflächenintegral über  $S_K$ :

$$\oint_{(S_K)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \int_{(S_{K1})} \vec{c} \cdot \vec{n} dS + \int_{(S_{K2})} \vec{c} \cdot \vec{n} dS + \int_{(S_{K3})} \vec{c} \cdot \vec{n} dS \quad (16)$$

Die Geschwindigkeit  $\vec{c}$  an der Wandoberfläche ergibt sich zu  $\vec{c} = -V_K \vec{e}_z$ .

Der Ausdruck  $\vec{c} \cdot \vec{n}$  ergibt für  $S_{K1}$ :  $\vec{c} \cdot \vec{n} = -V_K$  und für  $S_{K3}$ :  $\vec{c} \cdot \vec{n} = 0$  Für  $S_{K2}$  ist  $\vec{c} \cdot \vec{n} = -V_K \vec{e}_z \cdot \vec{n}$ . Mit dem Zusammenhang

$$\vec{e}_z \cdot \vec{n} = |\vec{e}_z| |\vec{n}| \cos(\alpha) \quad (17)$$

ergibt sich

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = -V_K |\vec{e}_z| |\vec{n}| \cos(\alpha) = -V_K \cos(\alpha) \quad (18)$$

Das Flächenelement  $dS_{K2}$  wird gebildet zu  $dS_{K2}=rdsd\varphi$ . Mit  $ds \cos(\alpha)=dr$  ergibt sich insgesamt:

	$S_{K1}$	$S_{K2}$	$S_{K3}$
$\vec{c} \cdot \vec{n}$	$-V_K$	$-V_K \cos(\alpha)$	0
$dS$	$rdrd\varphi$	$\frac{r}{\cos(\alpha)}drd\varphi$	$r_0d\varphi dz$

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung 16 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{(S_K)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^R -V_K r drd\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} -V_K \cos(\alpha) \frac{r}{\cos(\alpha)} drd\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^R -V_K r drd\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Ganz offensichtlich ist der Fluß über die Oberfläche  $S_K$  gleich dem Fluss über die in *Strömungsrichtung projizierte Fläche* von  $S_K$

Damit lautet das Ergebnis des Integrals:

$$\int_{(S_K)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS = -V_K \pi (R^2 - r_0^2) \quad (20)$$

Über die Wand  $S_W$  kann nichts fließen, das Oberflächenintegral ist daher Null.

Die Absolutgeschwindigkeit im Ortsfesten Koordinatensystem ist an der Oberkante  $c = w - V_K$ , das Oberflächenintegral lautet damit:

$$\int_{(S_o)} \vec{c} \cdot \vec{n} dS = 2\pi \int_0^{r_0} \left\{ W_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] - V_K \right\} r dr = \pi r_0^2 \left( \frac{W_0}{2} - V_K \right) \quad (21)$$

Damit folgt für die Kontinuitätsgleichung:

$$-V_K \pi (R^2 - r_0^2) + \pi r_0^2 \left( \frac{W_0}{2} - V_K \right) = 0 \quad (22)$$

was auf das Ergebnis für  $W_0$  führt:

$$W_0 = 2V_K \left( \frac{R}{r_0} \right)^2 \quad (23)$$

was mit dem Ergebniss aus Aufgabenteil 1 erwartungsgemäß übereinstimmt.

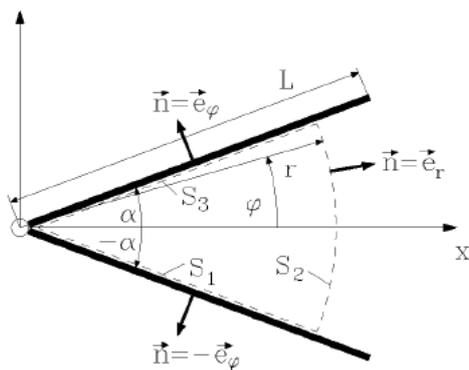


Abbildung 6: Strömung in einem von zwei Platten gebildeten Winkel

## 2.2 Aufgabe 2: Strömung zwischen zwei Platten

Zwischen zwei Platten der Länge  $L$  (Abbildung 6) befindet sich Flüssigkeit mit konstanter Dichte  $\rho$ . Beide Platten werden symmetrisch zur  $x$ -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  aufeinander zuge dreht, so dass die Flüssigkeit herausgedrückt wird. Das Problem kann als eben betrachtet werden, die Platten seien in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnt.

Von dem Geschwindigkeitsfeld in Polarkoordinaten

$$\vec{u}(r, \varphi) = u_r(r, \varphi)\vec{e}_r + u_\varphi(r, \varphi)\vec{e}_\varphi \quad (24)$$

ist die Komponente

$$u_r(r, \varphi) = f(r) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\varphi\right) \quad (25)$$

mit der noch unbekanntem Funktion  $f(r)$  gegeben

1. Bestimmen Sie die Wandgeschwindigkeit  $\vec{u}(r) = u_W(r)\vec{e}_\varphi$  für beide Platten.
2. Mit der Integralform der Kontinuitätsgleichung ist die Funktion  $f(r)$  für  $0 \leq r \leq L$  zu ermitteln.

### Lösung

1)

Die Wandgeschwindigkeit in  $\vec{e}_\varphi$ -Richtung ist die Umfangsgeschwindigkeit und berechnet sich allgemein zu  $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x}$ . Damit ergibt sich für die untere und obere Platte in symbolischer Schreibweise:

$$\vec{u}(r) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \pm\Omega \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\Omega r \vec{e}_\varphi \quad (26)$$

2)

Die Integralform der Kontinuitätsgleichung für konstante Dichte  $\rho$  lautet:

$$\oint_{(S)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (27)$$

was für die drei Flächen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  auf folgende Gleichung führt:

$$\int_{(S_1)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{(S_2)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{(S_3)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (28)$$

Die Flächen  $S_1$  und  $S_3$  können nicht durchströmt werden, daher muss die Normalkomponente  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  gleich der Normalkomponente der Plattengeschwindigkeit sein, diese wurde in Aufgabenteil 1 berechnet. Ein Flächenelement *pro Tiefeneinheit*  $dS$  ist für die Flächen  $S_1$  und  $S_3$  gegeben durch  $dS = dr$ , für die Fläche  $S_2$  durch  $dS = r d\varphi$

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\vec{u} \cdot \vec{n}$	$-\Omega r$	$f(r) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\varphi\right)$	$-\Omega r$
$dS$	$dr$	$r d\varphi$	$dr$

Damit ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung:

$$\int_0^r -\Omega r \, dr + \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(r) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\varphi\right) r \, d\varphi + \int_0^r -\Omega r \, dr = 0 \quad (29)$$

Man erhält nach Ausführung der Integration

$$-\Omega r^2 + r f(r) \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\varphi\right) \right]_{-\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (30)$$

was schließlich auf die gesuchte Funktion  $f(r)$  führt:

$$f(r) = \frac{\pi}{4\alpha} \Omega r \quad (31)$$

### 3 Stromfadentheorie

#### 3.1 Aufgabe 1: Venturidüse

Wie hängt bei der in Abbildung 7 gezeigten Messdüse (Venturidüse) der Volumenstrom  $Q (= \dot{V})$  mit der vom Manometer angezeigten Druckdifferenz  $\Delta p = p_1 - p_2$  zusammen?

Gegeben:  $A_1, A_2, \Delta p, \rho = \text{const}$

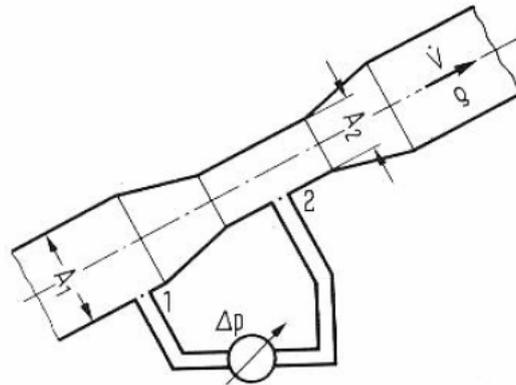


Abbildung 7: Venturi-Messdüse

#### Lösung

Es handelt sich um eine stationäre inkompressible Strömung. Die Anwendung der Bernoullischen Gleichung von der Stelle 1 zur Stelle 2 ergibt:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 \quad (32)$$

Der Zusammenhang zwischen  $u_1$  und  $u_2$  kann über die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen ermittelt werden:

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 = Q \rightarrow u_1 = \frac{Q}{A_1}; \quad u_2 = \frac{Q}{A_2} \quad (33)$$

Gleichung 33 eingesetzt in Gleichung 32 ergibt:

$$p_1 + \frac{\rho Q^2}{2 A_1^2} = p_2 + \frac{\rho Q^2}{2 A_2^2} \quad (34)$$

Aufgelöst nach  $Q$  ergibt sich:

$$Q = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho}{2} (1/A_2^2 - 1/A_1^2)}} \quad (35)$$

### 3.2 Aufgabe 2: Ofen

In den großen Verbrennungsräumen eines Ofens (Abbildung 8) strömt durch die Eintrittsöffnung Frischluft der Dichte  $\rho_a$ . Die Frischluft trifft als Strahl in den Ofen ein. Durch die Verbrennung im Ofen entstehen Rauchgase der Dichte  $\rho_i$  mit  $\rho_i < \rho_a$ . Diese Gase strömen mit der Geschwindigkeit  $U_2$  aus dem Schornstein aus. Welches Ergebnis erhält man für  $U_2$ , wenn man berücksichtigt, dass bei der Verbrennung je kg Brennstoff  $L$  Kilogramm Frischluft benötigt werden?

Gegeben:  $h, A_1, A_2, \rho_a, \rho_i, L$

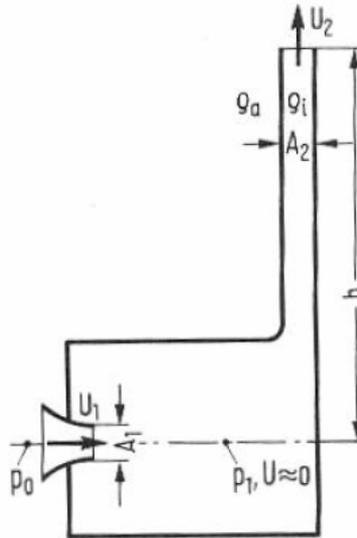


Abbildung 8: Ofen

#### Lösung

Tritt der Strahl in die Brennkammer ein, so wird im im Ofen Energie zugeführt, die Bernoullische Konstante verändert sich. Es ist deshalb nicht möglich, mit Bernoulli von der Eintrittsstelle (3) der Frischluft bis zum Austritt aus dem Schornstein (2) zu rechnen.

Es muss daher in Teilabschnitten vorgegangen werden. Es wird die Bernoullische Gleichung aufgestellt zwischen den Punkten (3) und (4) sowie zwischen den Punkten (1) und (2) (siehe Abbildung 9):

$$(1) \rightarrow (2) : p_1 = p_2 + \rho_i g h + \frac{\rho_i}{2} u_2^2 \quad (36)$$

$$(3) \rightarrow (4) : p_0 = p_1 + \frac{\rho_a}{2} u_1^2 \quad (37)$$

Der Druck  $p_2$  ist der Druck am Schornsteinausgang. Geht man davon aus, dass die Abgase den Schornstein mit Unterschallgeschwindigkeit verlassen, so herrscht im Strahl Umgebungsdruck. Der Umgebungsdruck in der Höhe  $h$  kann einfach über Hydrostatik berechnet

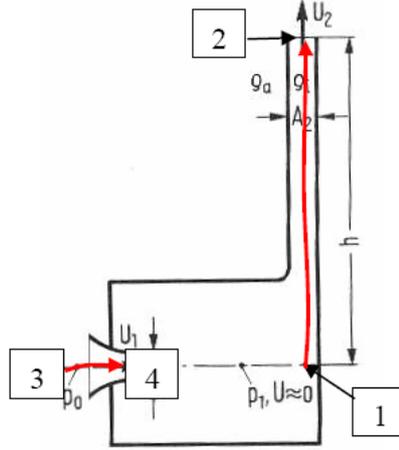


Abbildung 9: Berechnungswege Bernoulli

werden:

$$p_2 = p_0 - \rho_a g h \quad (38)$$

Die verbleibende Unbekannte  $u_1$  kann über die Kontinuitätsgleichung berechnet werden. Allgemein gilt:

$$\dot{m}_{ein} = \dot{m}_{aus}. \quad (39)$$

Der Einströmende Massenstrom  $\dot{m}_{ein}$  setzt sich aus dem Frischluftanteil und dem Brennstoffanteil zusammen:

$$\dot{m}_{ein} = \dot{m}_{frisch} + \dot{m}_{brenn} \quad (40)$$

Beachtet man noch, dass der Frischluftanteil gleich  $L$ -mal dem Brennstoffanteil ist

$$\dot{m}_{frisch} = L \dot{m}_{brenn} \Rightarrow \dot{m}_{brenn} = \frac{1}{L} \dot{m}_{frisch}$$

so ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung Gleichung 39:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{frisch} \left(1 + \frac{1}{L}\right) &= \dot{m}_{aus} \\ \rho_a u_1 A_1 \left(1 + \frac{1}{L}\right) &= \rho_i u_2 A_2 \\ \Rightarrow u_1 &= \frac{\rho_i u_2 A_2}{\rho_a A_1 \left(1 + \frac{1}{L}\right)} \end{aligned} \quad (41)$$

Setzt man die Gleichungen 41, 38 und 37 in 36 ein, so erhält man:

$$p_0 = p_0 - \rho_a g h + \rho_i g h + \frac{\rho_i}{2} u_2^2 + \frac{\rho_a}{2} \frac{(\rho_i u_2 A_2)^2}{(\rho_a A_1 (1 + \frac{1}{L}))^2} \quad (42)$$

Umgeformt nach der gesuchten Größe  $u_2$  ergibt sich:

$$u_2 = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{\frac{\rho_a}{\rho_i} - 1}{1 + \frac{\rho_i}{\rho_a} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{L}{L+1}\right)^2}}$$

### 3.3 Aufgabe 3: Rohrpumpe

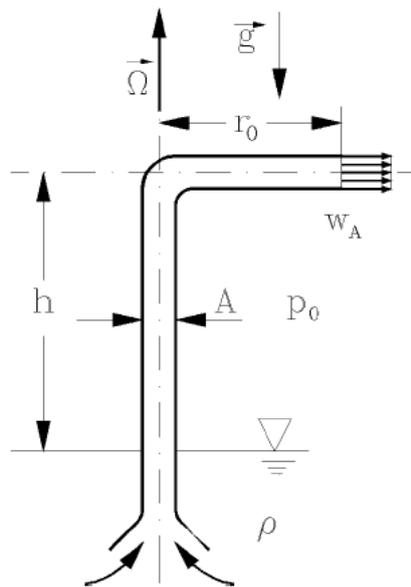


Abbildung 10: Rohrpumpe

Die in Abbildung 10 dargestellte Anordnung eines abgewinkelten Rohres, dessen unteres Ende in Flüssigkeit ( $\rho = \text{const}$ ) eintaucht, wirkt als Pumpe, wenn das Rohr mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um die vertikale Achse rotiert

1. Wie groß darf im stationären Fall  $\Omega$  höchstens sein, damit an keiner Stelle im Rohr der Dampfdruck  $p_D$  unterschritten wird?
2. mit welcher Beschleunigung  $b(t)$  setzt sich das Wasser in Bewegung, wenn das Rohr zunächst durch einen Schieber geschlossen war, der zur Zeit  $t = 0$  plötzlich geöffnet wird?
3. Geben Sie den Verlauf der Ausströmgeschwindigkeit  $\omega_a$  als Funktion der Zeit für den Anlaufvorgang an

Gegeben:  $\Omega, h, l, r_0, \rho, p_D, p_0, g$

#### Lösung

a)

Die Bernoullische Gleichung für stationäre Strömungen lautet allgemein:

$$p + \frac{\rho}{2}u^2 + \Psi = C \quad (43)$$

Das Potential  $\Psi$  setzt sich zusammen aus dem Potential des Schwerfeldes der Erde und dem Potential der Zentrifugalkraft:

$$\Psi = \rho g z - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 \quad (44)$$

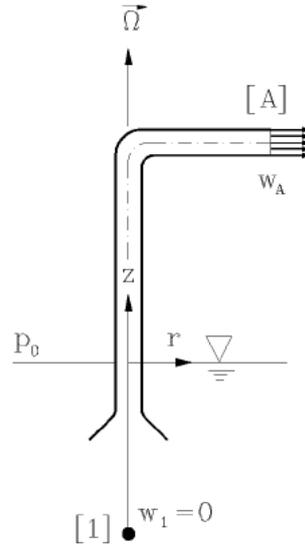


Abbildung 11: Zur Teilaufgabe 1

Mit der Verwendung der relativen Geschwindigkeit  $w$  ergibt sich für die Bernoullische Gleichung von [1] nach einer beliebigen Stelle im Rohr:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}w_1^2 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_1^2 + \rho g z_1 = p + \frac{\rho}{2}w^2 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 + \rho g z \quad (45)$$

Der unbekannte Druck  $p_1$  lässt sich über die Hydrostatik ermitteln:

$$p_1 = p_0 - \rho g z_1 \quad (46)$$

Setzt man dies in Gleichung 45 ein, so erhält man unter Beachtung von  $r_1 = 0$  und  $w_1 = 0$ :

$$p = p(r, z) = p_0 - \frac{\rho}{2}w^2 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 - \rho g z \quad (47)$$

Die unbekannte Geschwindigkeit  $w$  lässt sich über die Kontingleichung und die Randbedingungen berechnen. Über die Kontingleichung ergibt sich, dass  $w = w_A$  ist, die Randbedingung ergibt  $p(r = r_0, z = h) = p_0$ . Beides eingesetzt in Gleichung 47 liefert die Gleichung für  $w = w_A$ :

$$\frac{\rho}{2}w_A^2 = \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_0^2 - \rho g h, \quad (48)$$

was eingesetzt in Gleichung 47 die Bestimmungsgleichung für die Druckverteilung ergibt:

$$p(r, z) = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 (r^2 - r_0^2) + \rho g (h - z) \quad (49)$$

Der minimale Druck, der nach Gleichung 49 gegeben ist für  $z = h$  und  $r = 0$ , muss größer sein als der Dampfdruck  $p_D$ :

$$\begin{aligned} p_{min} &= p_0 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 r_0^2 > p_D \\ \Rightarrow \Omega &< \sqrt{\frac{2(p_0 - p_D)}{\rho r_0^2}} \end{aligned} \quad (50)$$

b) Die Bernoullische Gleichung für die instationäre Strömung vom Punkt [1] bis zum Austritt [A] lautet:

$$\rho \int_{(1)}^{(A)} \frac{\partial w}{\partial t} ds + p_A + \rho gh - \frac{\rho}{2} \Omega^2 r_0^2 + \frac{\rho}{2} w_A^2 = \rho g z_1 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 r_1^2 + \frac{\rho}{2} w_1^2 + p_1 \quad (51)$$

Nimmt man an, dass die Integration von der Stelle [1] bis zum Rohreintritt [E] aufgrund der sehr geringen Geschwindigkeit ausserhalb des Rohres nur einen sehr kleinen Beitrag zum Gesamtintegral liefert, so kann dieser Beitrag vernachlässigt werden. Innerhalb des Rohres gilt wieder  $w = w_A$ , sodass man mit  $r_1 = 0$  und  $w_1 = 0$  und dem aus Teilaufgabe 1 bekannten  $p_1$  auf folgende Gleichung kommt:

$$\rho \frac{dw_A}{dt} \int_{(E)}^{(A)} 1 ds + p_0 + \rho gh - \frac{\rho}{2} \Omega^2 r_0^2 + \frac{\rho}{2} w_A^2 = p_0 \quad (52)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass der Druck im Strahl am Ausgang  $p_A$  gleich dem Umgebungsdruck  $p_0$  ist. Die Geschwindigkeit  $w_A$  kann ebenso wie die Dichte  $\rho$  vor das Integral gezogen werden, da beide keine Funktion von  $s$  sind.

Aus Gleichung 52 folgt mit der Länge  $l$  des Rohres sofort die gesuchte Beschleunigung:

$$\frac{dw_A}{dt} = b(t) = \frac{1}{2l} (\Omega^2 r_0^2 - 2gh - w_a^2) \quad (53)$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $w_a = 0$  sodass gilt:

$$b(t = 0) = \frac{1}{2l} (\Omega^2 r_0^2 - 2gh) \quad (54)$$

3)

Die gesuchte Geschwindigkeit  $w_A(t)$  für den Anlauf ergibt sich aus der Lösung von Differentialgleichung 53. Setzt man für den Ausdruck  $\Omega^2 r_0^2 - 2gh = c$ , so erhält man folgende DGL, die mittels Trennen der Veränderlichen zu lösen ist:

$$\begin{aligned} \frac{dw_A}{dt} &= \frac{1}{2l} (c - w_a^2) \\ \Rightarrow \int \frac{dw_A}{(c - w_A^2)} &= \frac{1}{2l} \int dt \end{aligned} \quad (55)$$

Gelöst werden kann das linke Integral mittels einer Integraltafel, z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik, Seite 1055, Integral 40

Man erhält somit für die gesuchte Geschwindigkeit:

$$w_A(t) = \sqrt{c} \tanh \left( \frac{\sqrt{c}}{2l} t \right) \quad (56)$$

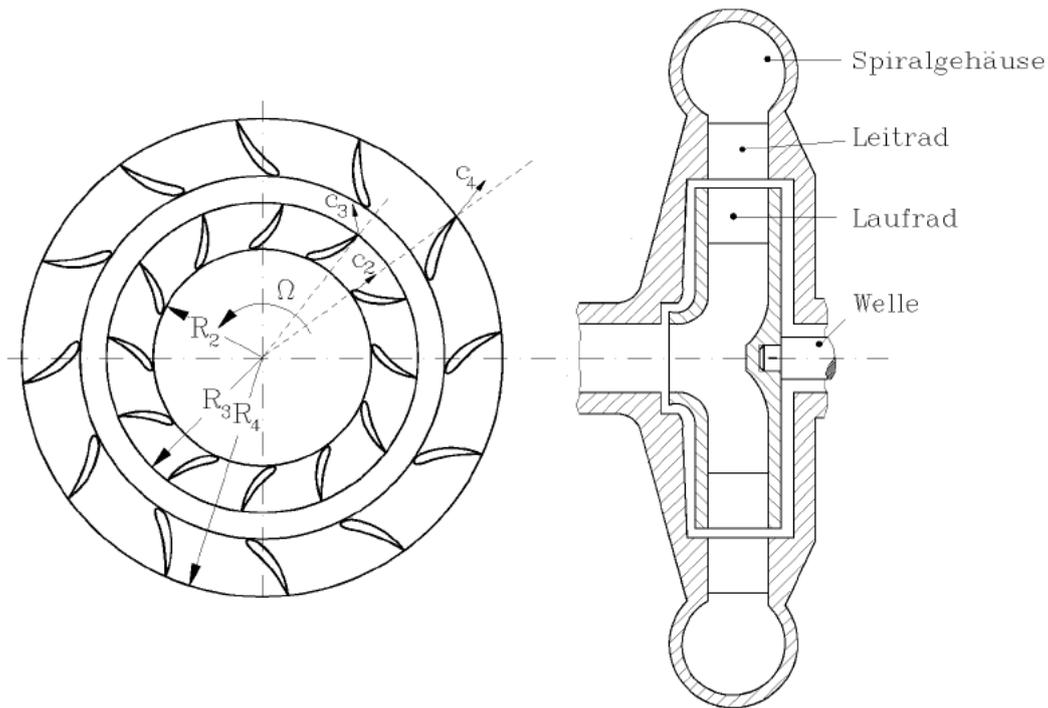


Abbildung 12: Radialpumpe

### 3.4 Aufgabe 4: Radialpumpe

Abbildung 12 zeigt einen Schnitt durch eine Radialpumpe. Das Fördermedium sei inkompressibel und reibungsfrei. Bekannt sind die Geschwindigkeitsbeträge  $c_2, c_3, c_4$  sowie die Umfangskomponente  $c_{u3}$ . Der Druck im Zuführstutzen ist  $p_1$ , die Geschwindigkeit dort  $c_1$ . Die Zuströmung zum LaufRad ist drallfrei, Volumenkräfte sind zu vernachlässigen.

Welche Drücke herrschen an den Stellen [2], [3] und [4] ?

Hinweis: die Geschwindigkeit  $c_1$  ist die Geschwindigkeit am Zuführstutzen,  $p_1$  der dortige Druck

Gegeben:  $R_2, R_3, R_4, c_1, c_2, c_3, c_4, c_{u3}, \Omega, p_1, \rho$

#### Lösung

Der Druck  $p_2$  folgt mit gegebener Geschwindigkeit  $c_1$  und  $c_2$  aus der Bernoullischen Gleichung für im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen vom Zuführstutzen ( $p_1, c_1$ ) zum Laufradeintritt ( $c_2$ ):

$$\begin{aligned}
 p_1 + \frac{\rho}{2}c_1^2 &= p_2 + \frac{\rho}{2}c_2^2 \\
 \Rightarrow p_2 &= p_1 + \frac{\rho}{2}(c_1^2 - c_2^2)
 \end{aligned} \tag{57}$$

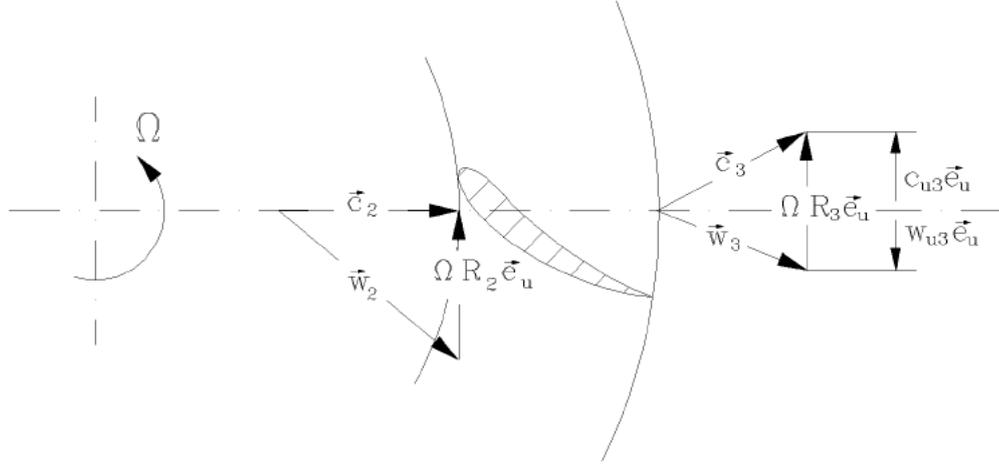


Abbildung 13: Geschwindigkeitsdreiecke am Laufrad

$p_3$  wird mit der Bernoullischen Gleichung im rotierenden Koordinatensystem (rotorfestes Bezugssystem) vom Laufradeintritt zum Laufradaustritt bestimmt:

$$\begin{aligned}
 p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 R_2^2 &= p_3 + \frac{\rho}{2} w_3^2 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 R_3^2 \\
 \Rightarrow p_3 &= p_2 + \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_3^2) + \frac{\rho}{2} \Omega^2 (R_3^2 - R_2^2)
 \end{aligned} \tag{58}$$

Die unbekanntenen Relativgeschwindigkeiten können über die Geschwindigkeitsdreiecke am Laufradprofil ermittelt werden (siehe Abbildung 13).

Allgemein gilt:

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \vec{c} - \vec{u} \tag{59}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  ist gegeben durch

$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x} = \Omega R \vec{e}_u \tag{60}$$

Somit ergibt sich in Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} w_r \\ w_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_r \\ c_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega R \end{pmatrix} \tag{61}$$

Mit dem Zusammenhang  $w = |\vec{w}| = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$  ergibt sich für  $w^2$ :

$$\begin{aligned}
 w^2 &= c_r^2 + (c_u - \Omega R)^2 \\
 &= \underbrace{c_r^2 + c_u^2}_{=|\vec{c}|^2=c^2} - 2c_u \Omega R + \Omega^2 R^2
 \end{aligned} \tag{62}$$

Damit ergeben sich für die Geschwindigkeiten  $w_2$  und  $w_3$ :

$$\begin{aligned}
 w_2^2 &= c_2^2 + \Omega^2 R_2^2 \\
 w_3^2 &= c_3^2 - 2c_{u3} \Omega R_3 + \Omega^2 R_3^2
 \end{aligned} \tag{63}$$

Mit Gleichung 63 sowie dem bereits bekannten Druck  $p_2$  ergibt sich für den Druck  $p_3$ :

$$p_3 = p_1 + \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_3^2 + 2c_{u3}\Omega R_3) \quad (64)$$

Für die Stromlinie vom Laufradaustritt [3] zum Leitradeneintritt[4] wird wieder die Bernoullische Gleichung im Inertialsystem verwendet:

$$\begin{aligned} p_3 + \frac{\rho}{2}c_3^2 &= p_4 + \frac{\rho}{2}c_4^2 \\ \Rightarrow p_4 &= p_3 + \frac{\rho}{2} (c_3^2 - c_4^2) \end{aligned} \quad (65)$$

Mit dem bekannten  $p_3$  aus Gleichung 64 folgt für  $p_4$ :

$$p_4 = p_1 + \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_4^2 + 2c_{u3}\Omega R_3) \quad (66)$$