Fachgebiet Fluidsystemtechnik
Prof. Dr. –Ing. Peter Pelz
Fachbereich 16 Maschinenbau

Dipl.-Ing. Thomas Bedarff
Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de
Telefon: 06151/16-6554

Lösung Aufgabe 2.1

a)

Im mitrotierenden Koordinatensystem handelt es sich um Hydrostatik. Die hydrostatische Grundgleichung lautet (Vorlesung 05.05.09):

$$\nabla p = \vec{f} \qquad \text{Gl. 1}$$

Die Volumenkraft wiederum lässt sich darstellen als Gradient eines Potentials:

$$\vec{f} = -\nabla\Psi \qquad \text{Gl. 2}$$

Ineinander eingesetzt und mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{e_r}$ multipliziert ergibt sich in Zylinderkoordinaten:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1\partial p}{r\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right)\cdot\overrightarrow{e_r} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1\partial\Psi}{r\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right)\cdot\overrightarrow{e_r} \qquad \text{Gl. 3}$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d\Psi}{dr}$$

Mit dem Potential der Zentrifugalkraft, gegeben durch (siehe Vorlesung vom 12.05.2009)

$$\Psi = -\frac{\rho}{2}(\Omega^2\mathrm{r}^2) \qquad \text{Gl. 4}$$

folgt unmittelbar eine Differentialgleichung für den Druck in Abhängigkeit des Radius:

$$\frac{dp}{dr} = \rho(p)\Omega^2 r \qquad \text{Gl. 5}$$

Bei kompressiblen Medien hängt die Dichte auch vom Druck ab, für ideale Gase kann dieser Zusammenhang mit der Gasgleichung $p = \rho RT$ beschrieben werden. Eingesetzt in Gl. 5 und nach Trennen der Veränderlichen ergibt sich:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\Omega^2}{RT} r dr \qquad \text{Gl. 6}$$

Integriert und mit der Randbedingung $p(r = 0) = p_1$ ergibt sich für den Druck in Abhängigkeit des Radius:

$$p(r) = p_1 e^{\frac{\Omega^2 r^2}{2RT}} \qquad \text{Gl. 7}$$

Fachgebiet Fluidsystemtechnik
Prof. Dr. –Ing. Peter Pelz
Fachbereich 16 Maschinenbau

Dipl.-Ing. Thomas Bedarff
Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de
Telefon: 06151/16-6554

b)

Der in Gl. 7 verwendete Druck p_1 hängt von der Winkelgeschwindigkeit ab. Für $\Omega = 0$ ist $p_1 = p_0$, für $\Omega \neq 0$ ist $p_1 \neq p_0$. Um vom bekannten Zustand a ($p_1 = p_0$) auf den unbekannten Zustand b ($p_1 \neq p_0$) schließen zu können, wird eine Größe verwendet, die unabhängig vom Zustand ist. Die Gasmasse m bleibt konstant, unabhängig davon ob sich die Zentrifuge dreht oder nicht:

$$m = m_a = m_b \qquad \text{Gl. 8}$$

$$m = \int_V \rho_a \, dV = \int_V \rho(r)_b \, dV$$

Mit der idealen Gasgleichung $p = \rho RT$,dem Volumendifferential in Zylinderkoordinaten $dV = rdrd\varphi dz$, einer beliebigen Zentrifugenhöhe h sowie $p_a = p_0$ und $p_b = p(r)$ ergibt sich:

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{p_0}{RT} rdrd\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{p(r)}{RT} rdrd\varphi dz \qquad \text{Gl. 9}$$

Setzt man in das linke Integral den in Aufgabenteil a errechneten Druck $p(r)$ ein, so kommt man auf:

$$p_0 \frac{h\pi r_0^2}{RT} = p_1 \frac{h2\pi}{RT} \int_0^{r_0} r \, e^{\frac{\Omega^2 r^2}{2RT}} dr \qquad \text{Gl. 10}$$

$$= p_1 \frac{h2\pi}{RT} \left(e^{\frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT}} - 1 \right) \frac{RT}{\Omega^2}$$

Umgestellt nach p_1 ergibt sich:

$$p_1 = p_0 \frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT} \left(e^{\frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT}} - 1 \right)^{-1} \qquad \text{Gl. 11}$$

Der Druck p_2 errechnet sich mit Gl. 7 und dem nun bekannten p_1 zu:

$$p_2 = p(r = r_0) = p_1 e^{\frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT}} \qquad \text{Gl. 12}$$

c)

Die gesuchten Dichten ρ_1 und ρ_2 und errechnen sich mit den Drücken p_1 und p_2 über die Gasgleichung

Fachgebiet Fluidsystemtechnik
Prof. Dr. –Ing. Peter Pelz
Fachbereich 16 Maschinenbau

Dipl.-Ing. Thomas Bedarff
Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de
Telefon: 06151/16-6554

Lösung Aufgabe 2.2

a)

Die Kraft in z-Richtung ist gegeben durch den Auftrieb des umspülten Körpers (in Abbildung 1 rot dargestellt).

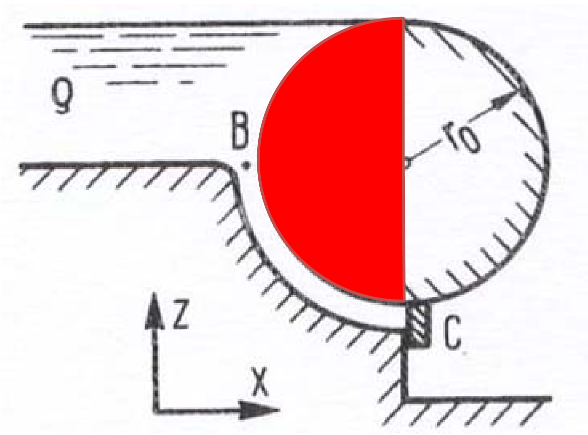

Abbildung 1: Ersatzkörper zur Berechnung des Auftriebes.

Sie berechnet sich zu

$$\boldsymbol{F_z = \rho g V = \frac{\rho g \pi r_0^2 b}{2}} \qquad \text{Gl. 13}$$

Die Kraft in x-Richtung lässt sich berechnen über den Druck im Schwerpunkt in y-Richtung sowie der projizierten Fläche ((siehe Vorlesung 05.05.09):

$$\begin{aligned} F_x &= p_s A_{projeziert} \\ &= \boldsymbol{\rho g r_0 2 r_0 b} \end{aligned} \qquad \text{Gl. 14}$$

mit p_S = Druck in Höhe des Schwerpunktes.

Betrachtet man sich die allgemeine Gleichung für die Kraft durch hydrostatischen Druck

$$\vec{F} = -\int_S p\vec{n}\, dS \qquad \text{Gl. 15}$$

und setzt $\vec{n} = \vec{e_r}$, so muss die resultierende Kraft $\vec{F}$ pro Tiefeneinheit stets durch den Schwerpunkt des Kreises gehen, somit auch die Komponenten F_x und F_y.

Fachgebiet Fluidsystemtechnik
Prof. Dr. –Ing. Peter Pelz
Fachbereich 16 Maschinenbau

Dipl.-Ing. Thomas Bedarff
Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de
Telefon: 06151/16-6554

b)

Der Spalt s sei viel kleiner als der Radius der Walze r_0, deshalb kann der hydrostatische Druck über der Spalthöhe nährungsweise als konstant angesehen werden.

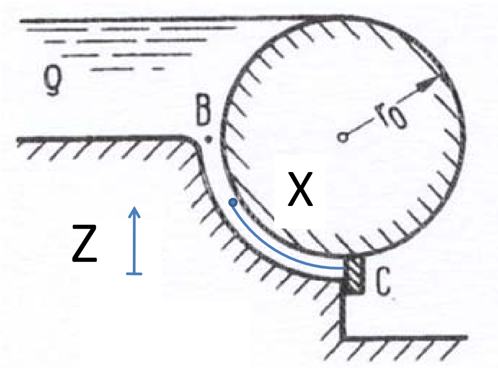

Abbildung 2: Anwendung der Bernoullischen Gleichung

Es wird ein Stromfaden durch den Kanal von der Stelle C bis zu einer beliebigen Stelle X gelegt (siehe Abbildung 2), die Anwendung der Bernoullischen Gleichung für stationäre Strömungen ergibt:

$$p_X + \rho g z_X + \frac{\rho}{2} u_X^2 = p_C + \rho g 0 + \frac{\rho}{2} u_C^2 \qquad \text{Gl. 16}$$

Mit $u_X = u_C$ (Konti) und $p_C = p_0$ ergibt sich für den Druck p_X :

$$p_X = p_0 - \rho g z_X \qquad \text{Gl. 17}$$

An der Stelle B ergibt sich mit Gl. 17 ein Druck von

$$p_B = p_X(z_X = r_0) = p_0 - \rho g r_0 \qquad \text{Gl. 18}$$

Ausgehend von der Oberfläche der Flüssigkeit ergibt sich die Druckverteilung bis zum Punkt B nach den Gesetzen der Hydrostatik zu (in Richtung der Koordinate z):

$$p(z) = p_0 + \rho g (2r_0 - z_X) \qquad \text{Gl. 19}$$

An der Stelle B ergibt sich damit ein Druck von

$$p_B = p(z = r_0) = p_0 + \rho g r_0 \qquad \text{Gl. 20}$$

Vergleicht man Gl. 18 mit Gl. 20, so erkennt man eine Unstetigkeit im Druckverlauf. Aufgetragen über der Höhe z sieht man sofort, dass sich die Drücke aufheben, und die Kraft in x-Richtung somit gleich Null sein muss (Abbildung 3):

$$\boldsymbol{F_x = 0}$$

Fachgebiet Fluidsystemtechnik
Prof. Dr. –Ing. Peter Pelz
Fachbereich 16 Maschinenbau

Dipl.-Ing. Thomas Bedarff
Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de
Telefon: 06151/16-6554

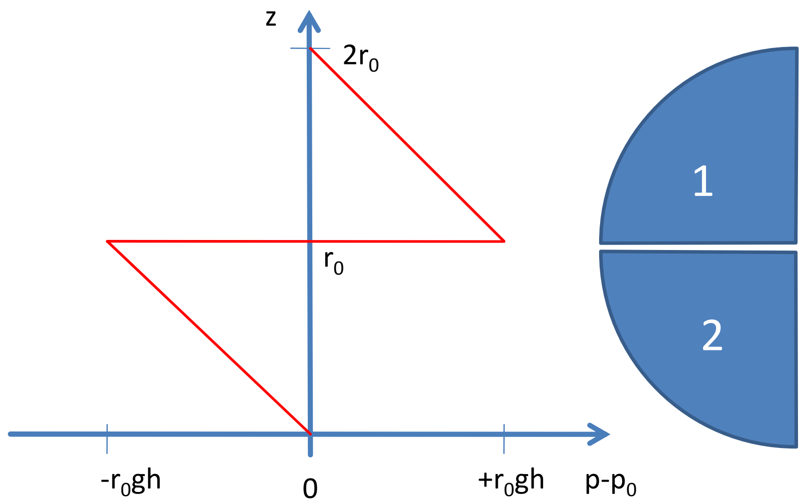

Abbildung 3: Druckverlauf über der Koordinate z

Die Berechnung der Kraft in z-Richtung erfolgt über die Berechnung des Auftriebes. Dies geschieht Abschnittsweise, von z=0 bis r_0 und von z=r_0 bis $2r_0$.

Wäre der Viertelkreiszylinder 1 vollständig von Flüssigkeit umgeben, so würde eine Auftriebskraft von

$$F_{A,1} = \rho g V = \rho g \frac{\pi}{4} r_0^2 b \qquad \text{Gl. 21}$$

auf den Körper wirken. Da er jedoch nicht komplett von Fluid umgeben ist, muss derjenige Anteil der Kraft abgezogen werden, die entsteht, wenn man die nicht von Flüssigkeit umgebenen Flächen in die Berechnung der Auftriebskraft mit einbezieht (siehe auch Übung 1). Die Kraft muss abgezogen werden, da sie den Auftrieb des Körpers erhöht ($\vec{p} \cdot \vec{n} > 0$). Damit ergibt sich die Auftriebskraft des Körpers 1:

$$F_{A,1} = \rho g \frac{\pi}{4} r_0^2 b - \rho g r_0^2 b \qquad \text{Gl. 22}$$

Auf den Körper 2 lässt sich die Auftriebskraft analog zu Körper 1 berechnen. Zu beachten ist hier, dass die Auftriebskraft des vollständig von Fluid umgebenen Körpers erhöht werden muss um diejenige Kraft, die der Druck auf der waagrechten Oberfläche Richtung –z ausübt. Die Kraft muss abgezogen werden, da sie den Auftrieb verringert ($\vec{p} \cdot \vec{n} < 0$)

$$F_{A,2} = \rho g \frac{\pi}{4} r_0^2 b + (-\rho g r_0^2 b) \qquad \text{Gl. 23}$$

Die gesamte Kraft in z-Richtung ergibt sich zu:

$$\boldsymbol{F_z = F_{A,1} + F_{A,2} = \rho g r_0^2 b \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}$$