Schwere Wellen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

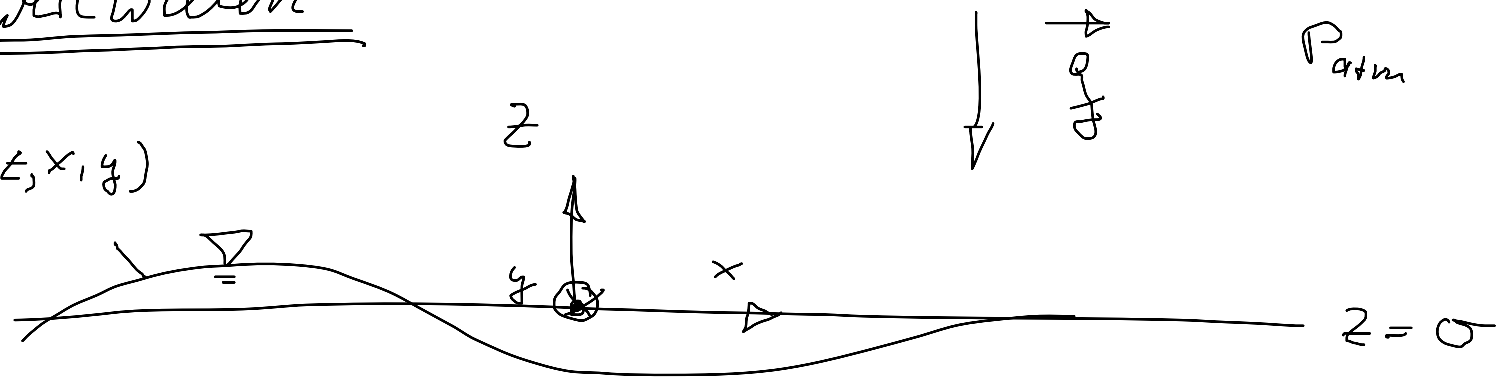
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2011/12
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen
Vorlesung 12

01.02.2012

Schwerewellen

$z = \eta(t, x, y)$

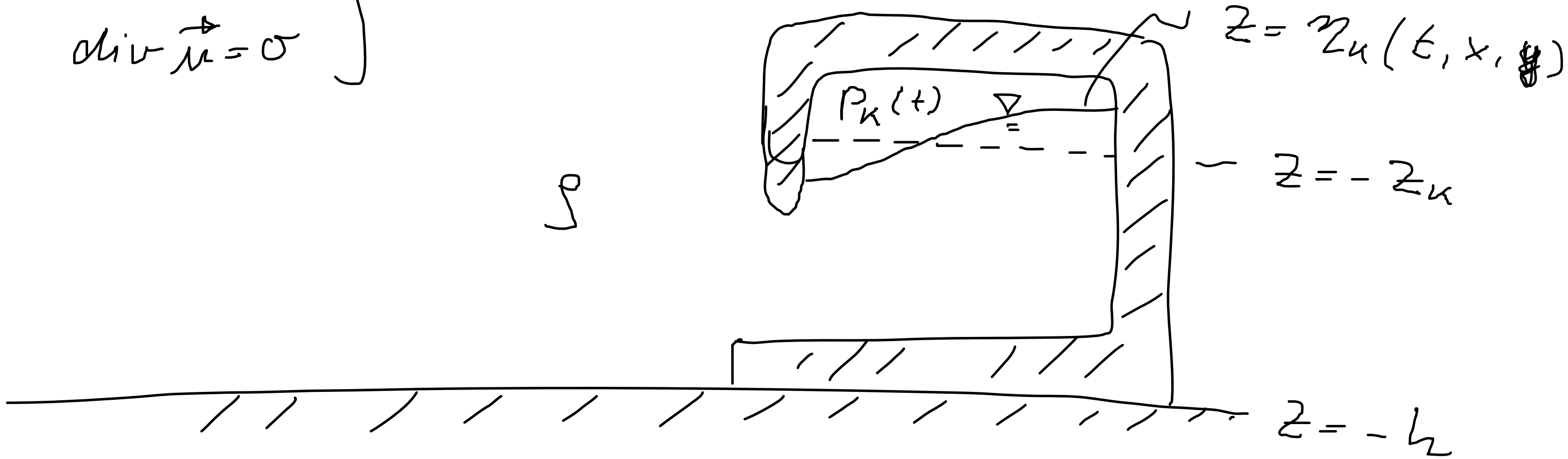


$\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$

$\Rightarrow \vec{u} = \nabla \Phi$

$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$

$\Delta \Phi = 0$???



Homogener Druck $p_K(t)$ für die Luft — isentrope Z.Ä. / isotherm

im eingeschlossenen Zust. $\rightsquigarrow$ Hydrostatik

01.02.2012

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{Süds}} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + g z = C \qquad \text{für } \operatorname{rot} \vec{u} = 0$$

Randbedingungen zur Bestimmung des Potentials

Kinematische R.B. an $z = -h$ (Boden)

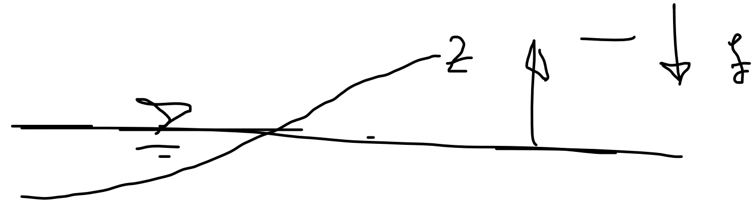
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{an} \quad z = -h \qquad (1)$$

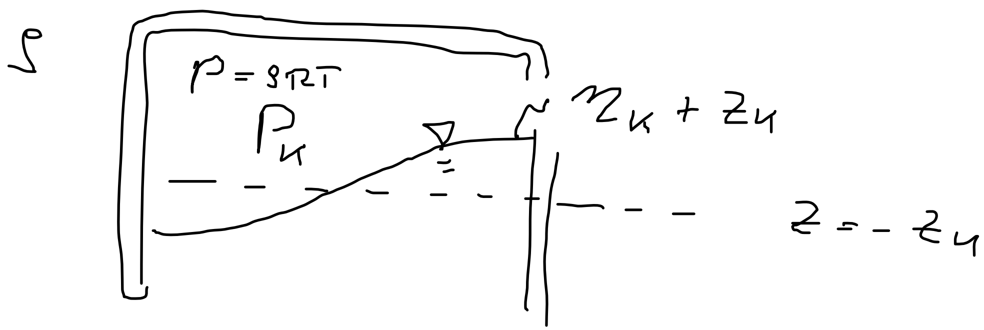
Randbedingung an der freien Oberflächen p_{atm}



dynamische Randbeding an der freien Oberfläche

$$\vec{t}^{(\vec{n})} + \vec{t}^{(-n)} = 0$$

↳ ohne Reibungsspannung



$$p\big|_{z=z_K} = p_K$$

⇓

Bernoullische Gleich

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{z=z_K} + \frac{u^2}{2} + \frac{p_K}{\rho} + g\,\eta_K = 0 \qquad (2)$$

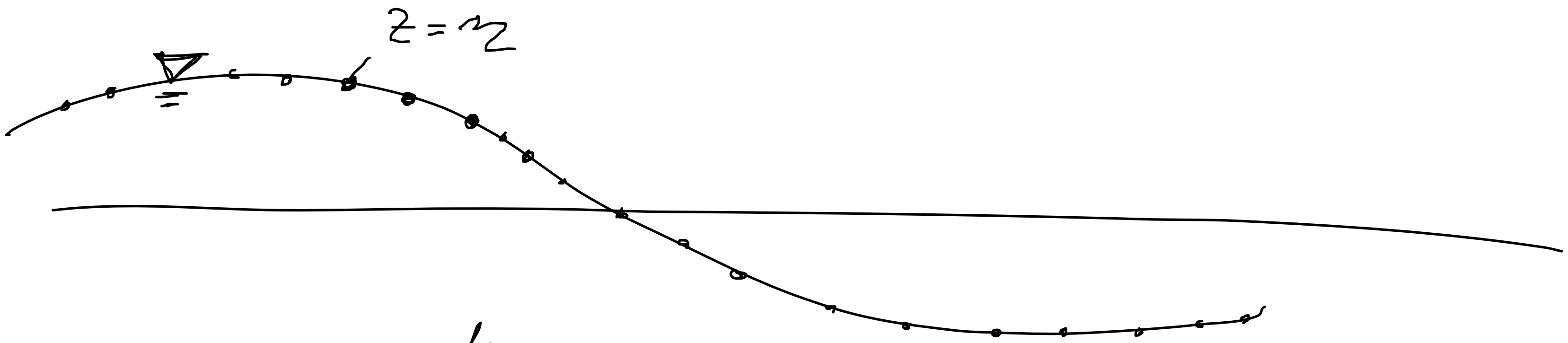
$$\frac{u^2/2}{g\,\eta_K} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad Fr^2 \ll 1$$

kinetische Energie << potentielle Energie.

Achtung p_{atm} sollte nicht Null gesetzt werden, wenn ~~ein~~ ein eingeschlossenes Gasvolumen vorhanden ist.

Lagrange Theorem:

Die Oberfläche einer Flüssigkeit besteht immer aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen (unabhängig von Materialgröße)



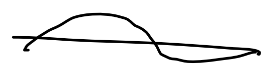
Implizite Gleichung für die freie Oberfl.

$F(x,y,t) = z - \eta = 0$ gilt für jedes Flüssigkeitsteilchen auf der freien Oberfläche

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$ an der freien Oberfläche (Lagrange Theor.)

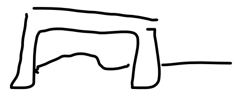
Kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad \text{an } z = \zeta$$



$z = 0$

$z = -z_u$



$z = -z_u$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0 \qquad \vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(z-\zeta) + u\frac{\partial}{\partial x}(z-\zeta) + v\frac{\partial}{\partial y}(z-\zeta) + w\frac{\partial}{\partial z}(z-\zeta) = 0$$

$$\underbrace{-\frac{\partial \zeta}{\partial t}}_{O(u)} \cancel{\underbrace{- u\frac{\partial \zeta}{\partial x}}_{O(u^2)}} \cancel{\underbrace{- v\frac{\partial \zeta}{\partial y}}_{O(u^2)}} + \underbrace{w}_{O(u)} \cancel{\underbrace{- w\frac{\partial \zeta}{\partial z}}_{O(u^2)}} = 0$$

linearisierte kinematische Randbedingung an der Oberfläche.

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{an} \quad z = 0$$

lin. lin.

$$z = -z_u.$$

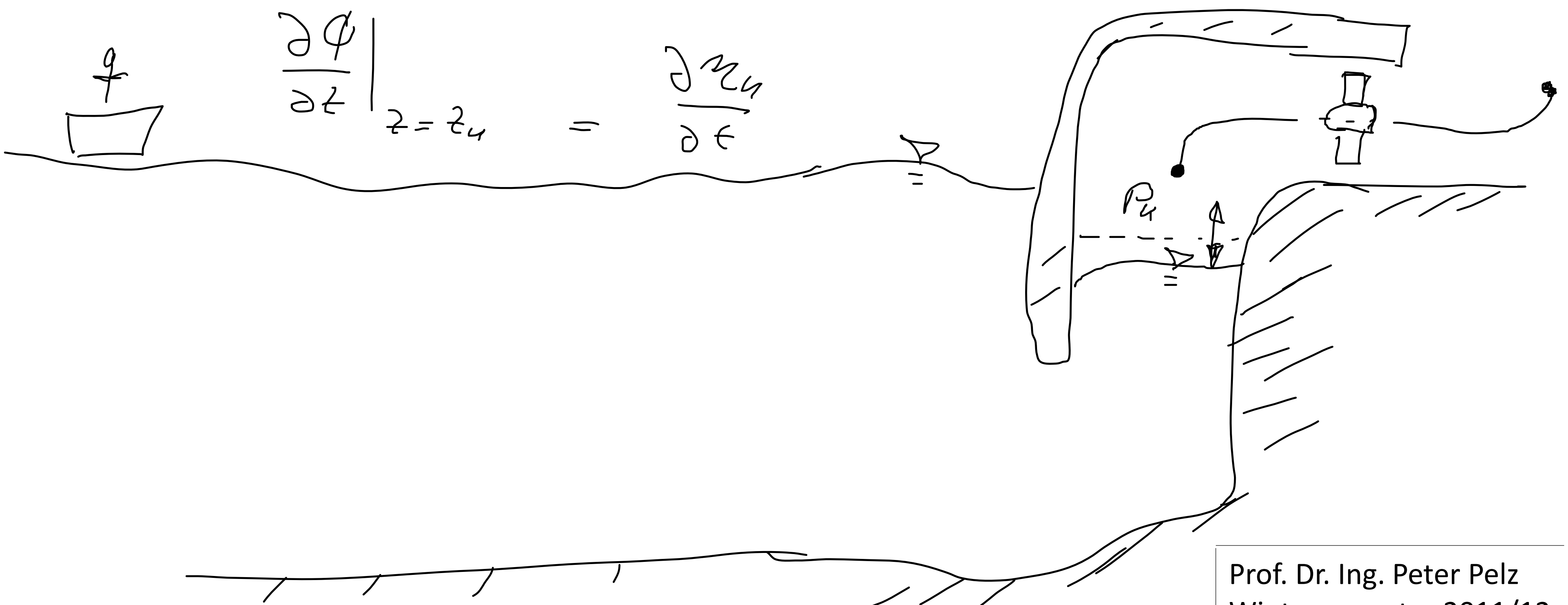
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{an} \quad z = 0$$

kinematische Randbed.

Umformung der dynamischen Randbedingung

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]_{z=z_u} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dp_u}{dt}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=z_u} = \frac{\partial z_u}{\partial t}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Lösung des Gleichungssystems $\Phi = ?$

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t) = \nabla \Phi$$

$$p = p(x, y, z, t) = -\rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) \approx -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$z_K = z_K(x, y, \cancel{z}, t) = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{z=z_K} - \frac{1}{\rho g} p_K$$

$$\zeta = \zeta(x, y, t) = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{z=0} - \frac{1}{\rho g} p_{atm}.$$

1) Lineare Gleich. $\Delta \Phi = 0$

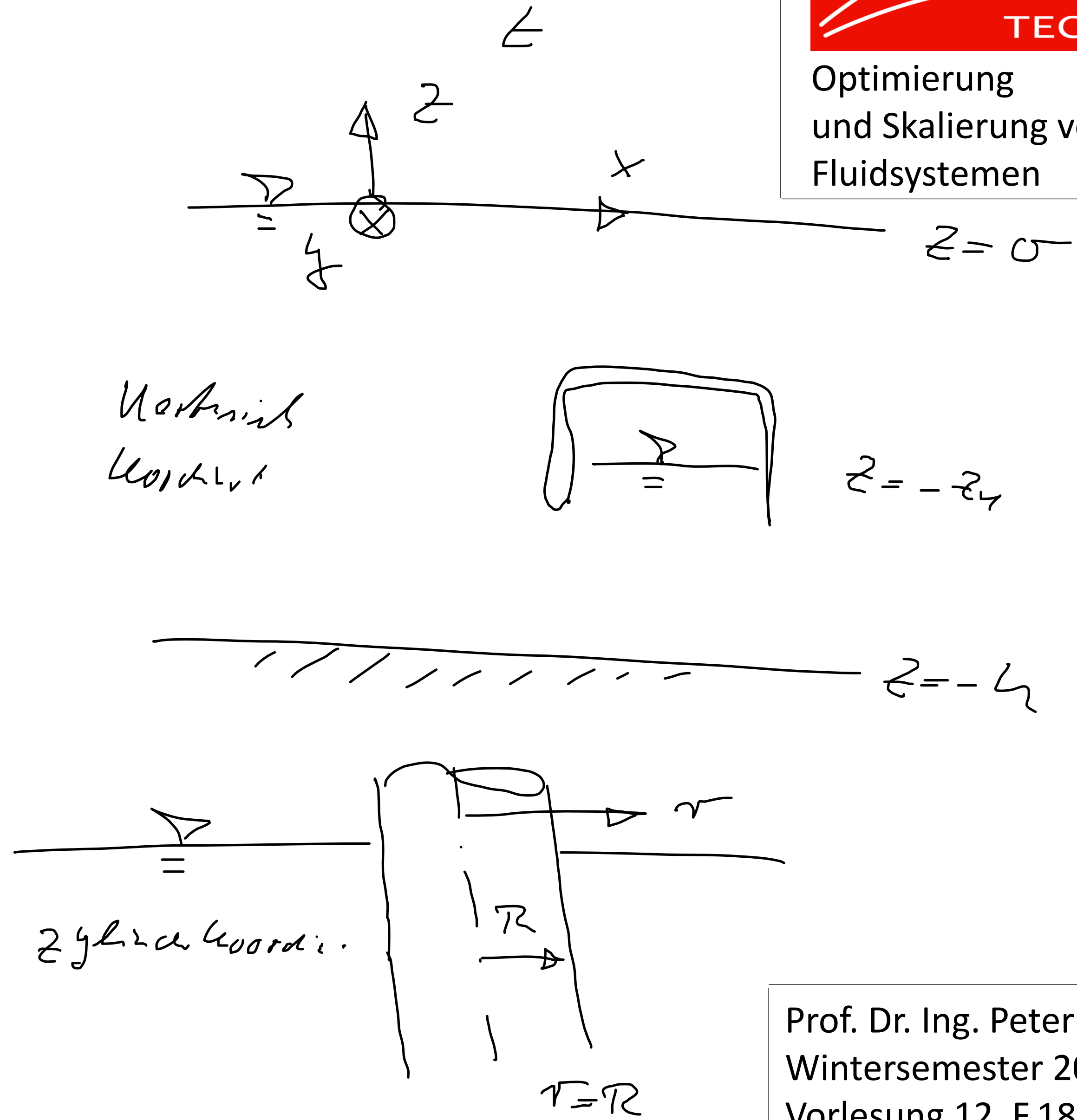
2) lineare Randbedingung

3) Ränder des Rechengebietes sind Koordinatenflächen.

↳ Problem Separationsansatz

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t)$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\, \hat{\Phi}(x, y, z)\right]$$



$$\Phi \qquad \hat{\Phi}(x,y,z) = H(x,y)\,Z(z)$$

Seperationsansatz spez. Produktansatz

$$H(x,y) \quad + \quad Z(z)$$

Einsetzen in die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$.

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\Longleftrightarrow \Delta\hat{\Phi} = 0$$

$$Z\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + Z\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + H\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \;\Big|\; \frac{1}{ZH}$$

$$-k^2 = \text{const} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}}_{fn(x,y)} = \underbrace{-\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}}_{fn(z)}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

$\pm k$ sind die beiden Eigenwert.

$$Z = c_+ e^{kz} + c_- e^{-kz}$$

Tiefenfunktion

Kinematische Randbedingung am Meeresboden.

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0$$

$$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{-h} H(x,y) = 0 \quad \text{am } z = -h$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{am } z = -h$$

Daraus folgt für die Konstante:

$$C_{\pm} = \frac{e^{\pm kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}$$

$$\rightarrow \quad Z(z) = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{e^{kh} + e^{-kh}}$$

$$\rightarrow \quad \hat{\Phi} = H(x,y)\, e(kz)$$

mit der Abkürzung

$$e(kz) = \frac{\cosh(kz + kh)}{\cosh(kh)} \xrightarrow{\lim kh \to \infty} e^{kz}$$

$\lim kh \to \infty$ tiefes Wasser.

$$\frac{1}{H}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right]=-k^2$$

$$\Delta_H H = -k^2 H$$

Helmholtzsche - Gleichung

klassische Wellenausbreitungsgleich.