Betz'sches Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2011/12
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen
Vorlesung 2

02.11.2011

1. Windkraft
2. Wasserkraft
3. Wellenkraft.

Gliederung für alle drei Teile

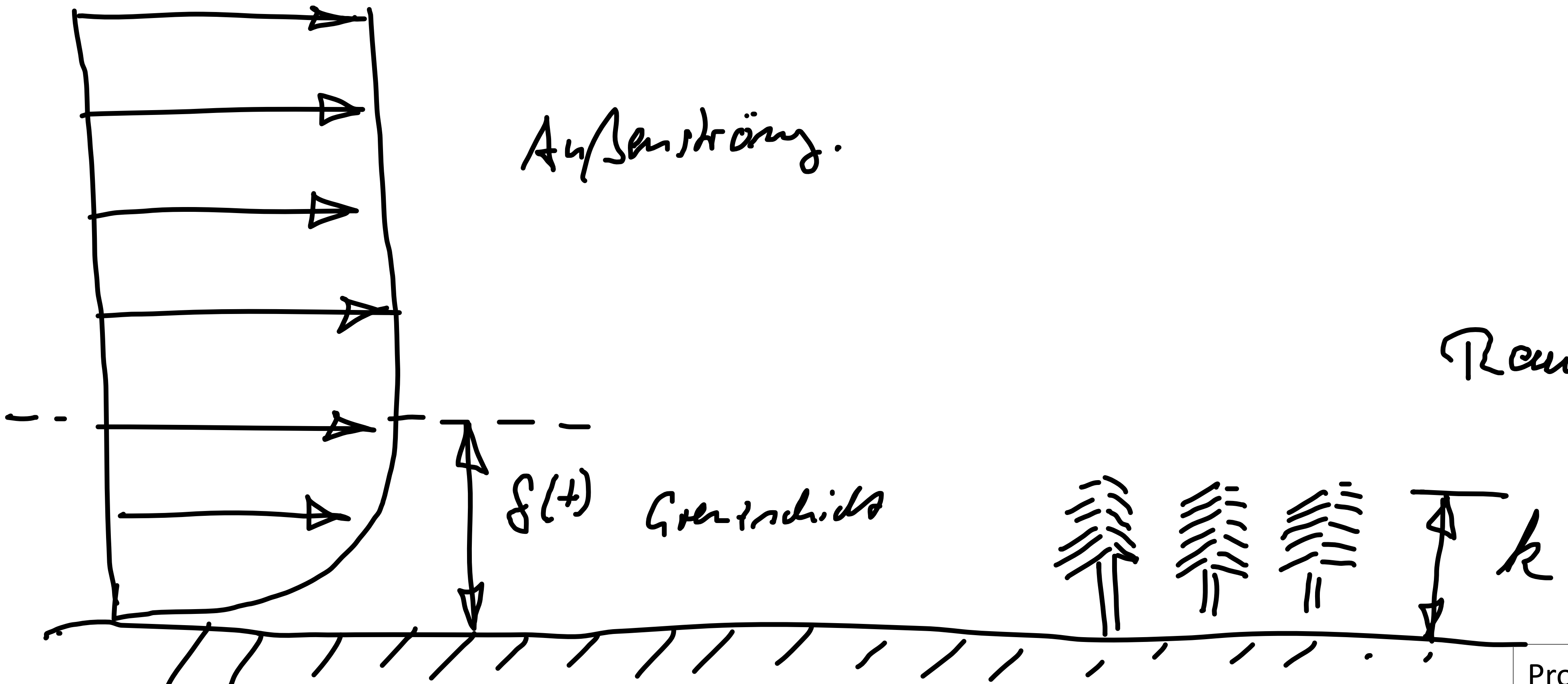
top down ↓ | bottom up ↑

1. Wie ist das Energieangebot?
2. Was kann von dem Energieangebot maximal in mechanische Energie umgesetzt werden? (unabhängig von der Bauform, Ausführung der Maschine).
   ↳ Frage nach dem maximal möglichen Erntefaktor.
3. Wie sieht eine Maschine aus, um an das theoretische Optimum bestmöglich anzunähern.

1. Windenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

$u_\infty(t)$



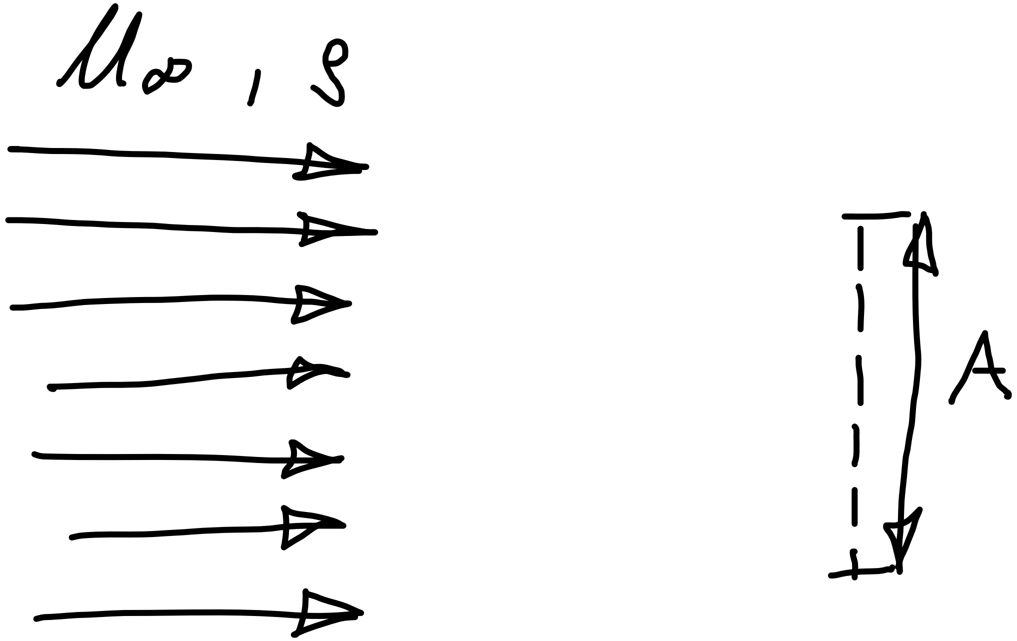
δ Grenzschichtdicke

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Idealisierung

1. Annahme u_∞ ist ein Blockprofil (keine Grenzschicht)

2. $u_\infty \neq fn(t)$



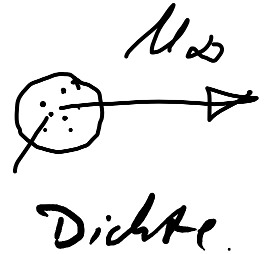
A projizierte Fläche der Maschine

Zur ersten Frage:

Was ist das Energieangebot pro Zeiteinheit?

Verfügbare Leistung $P_{avail} := \frac{\rho}{2} u_\infty^3 A$

Jedes Flüssigkeitsteilchen hat eine volumenspezifische kinetische Energie $\frac{\rho}{2} u_\infty^2$



$:=$ Definition

$=$ Gleichheit

$\equiv$ Identität

$\stackrel{!}{=}$ Forderung.

Zum 1. Hauptsatz

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{DK}{Dt} = P + \dot{Q}$$

Änderung der inneren Energie $E := \int_V \rho e \, dV$

plus die Änderung der kinetischen Energie $K := \int_V \frac{\rho}{2} \vec{u} \bullet \vec{u} \, dV$ ist gleich

der Leistung P plus dem Wärmestrom $\dot{Q}$ welche der Flüssigkeit zugeführt wird.

- wird bei uns nur für das Skalarprodukt verwendet

Leistung
$$P = \oint_S \vec{u} \cdot \vec{t} \, dS + \int_V \vec{u} \cdot \rho \vec{k} \, dV$$

Wärmestrom
$$\dot{Q} = - \oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

Wärmestromvektor $\vec{q}$ $\qquad \dfrac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$

Spannungsvektor
$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}$$
$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

02.11.2011

Spannungsvektor ist eine inkrementelle Oberflächenkraft

Volumenkraft $\vec{f} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$

Massenkraft $\vec{k}$ $\varrho \vec{k} = \vec{f}$

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{DK}{Dt} = P + \dot{Q}$$

Angebot.

P_f ist der mechanische Anteil von P

$$P_f = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}$$

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \frac{\rho}{2} u^2 \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \frac{\rho}{2} u^2 \, dV + \oint_{S} \frac{\rho}{2} u^2 \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS$$

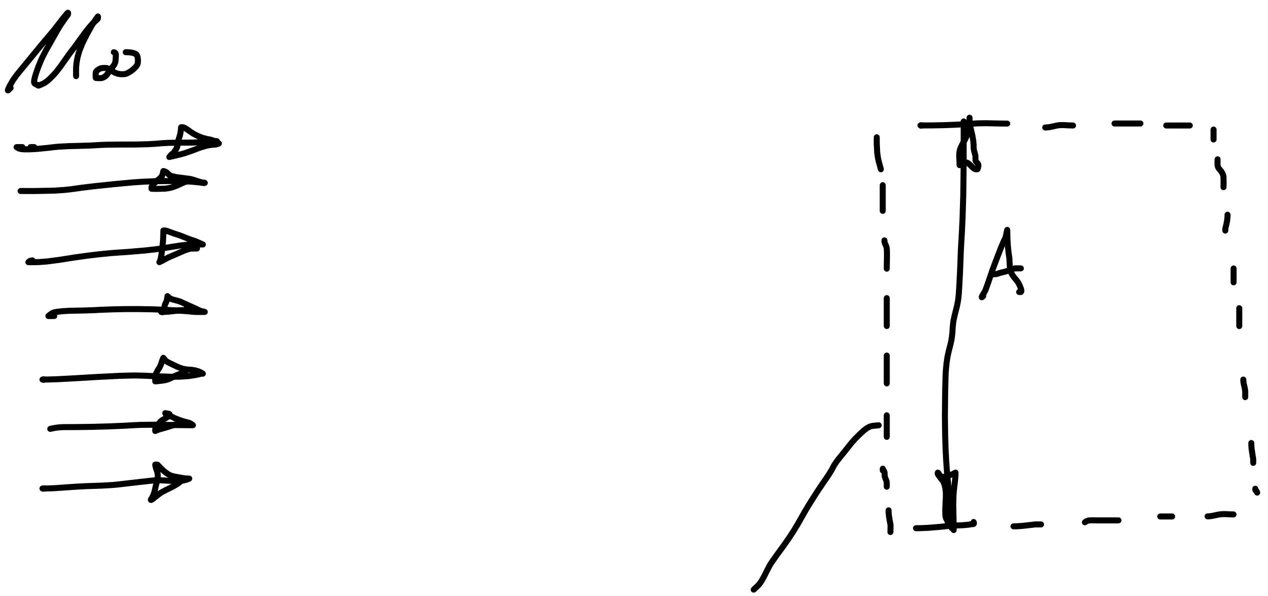
∇ $u = |\vec{u}|$ Δ

Reynolds'sche Transporttheorem. | siehe hier.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

Annahme kein Böen $u_\infty(t) = \text{const.}$

↳ Im zeitlichen Mittel ist die Strömung stationär $\left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0\right)$



$$\int_A \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \, u_\infty \, dA = \frac{\rho}{2} u_\infty^3 A$$

Annahme A sei eine Kontrollfläche und ein Teil der geschlossenen Kontrollvol.

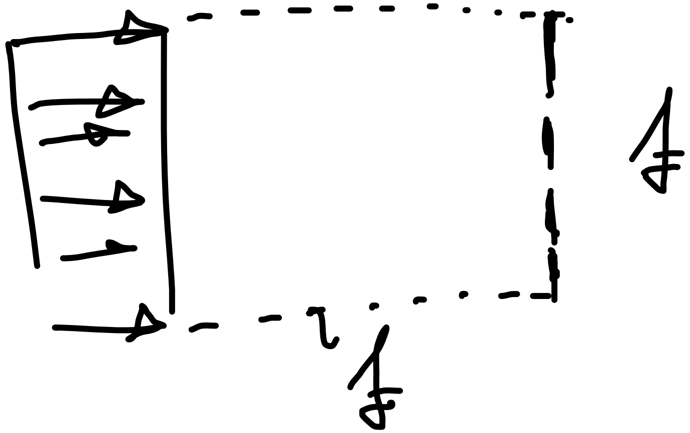
Die definiert verfügbare Leistung ergibt sich aus dem Gedankenexperiment einer idealen Windkraftmaschine.

100% Umsetzung des Energieflusses in mechanische Leist.

$$\boxed{P_{wind} := \frac{\rho}{2} u_\infty^3 A}$$

Annahme: • Keine Aufstauung der Luft vor der Maschine

• Keine Energie in der Abströmung.



Zweite Frage:

Welchen Anteil an P_{avail} kann maximal in mechanische Leistung umgesetzt werden? P_A

Erntefaktor $C_p := \dfrac{P_A}{P_{avail}}$

(engl. Coefficient of Performance

$\triangleright$ COP_Δ)

Wie groß ist $c_{P,opt}$?

Die Frage führt auf eine Optimierungsaufgabe, die bei Windkraft relativ einfach ist.

Albert Betz hat 1920 erstmals ~~[illegible]~~ $c_{P,opt}$ angegeben.

Betzsches Gesetz

$$c_{P,opt} = \frac{16}{27}\eta = 0{,}59\,\eta$$

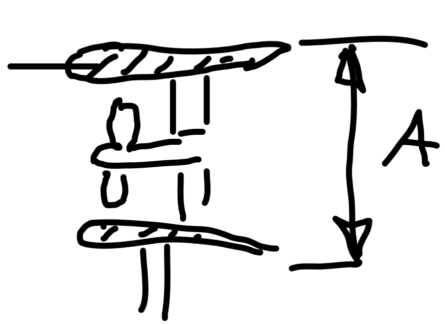
η bezeichnet den hydraulischen od. aerodynamischen Wirkungsgrad der Maschine.

Literaturhinweis

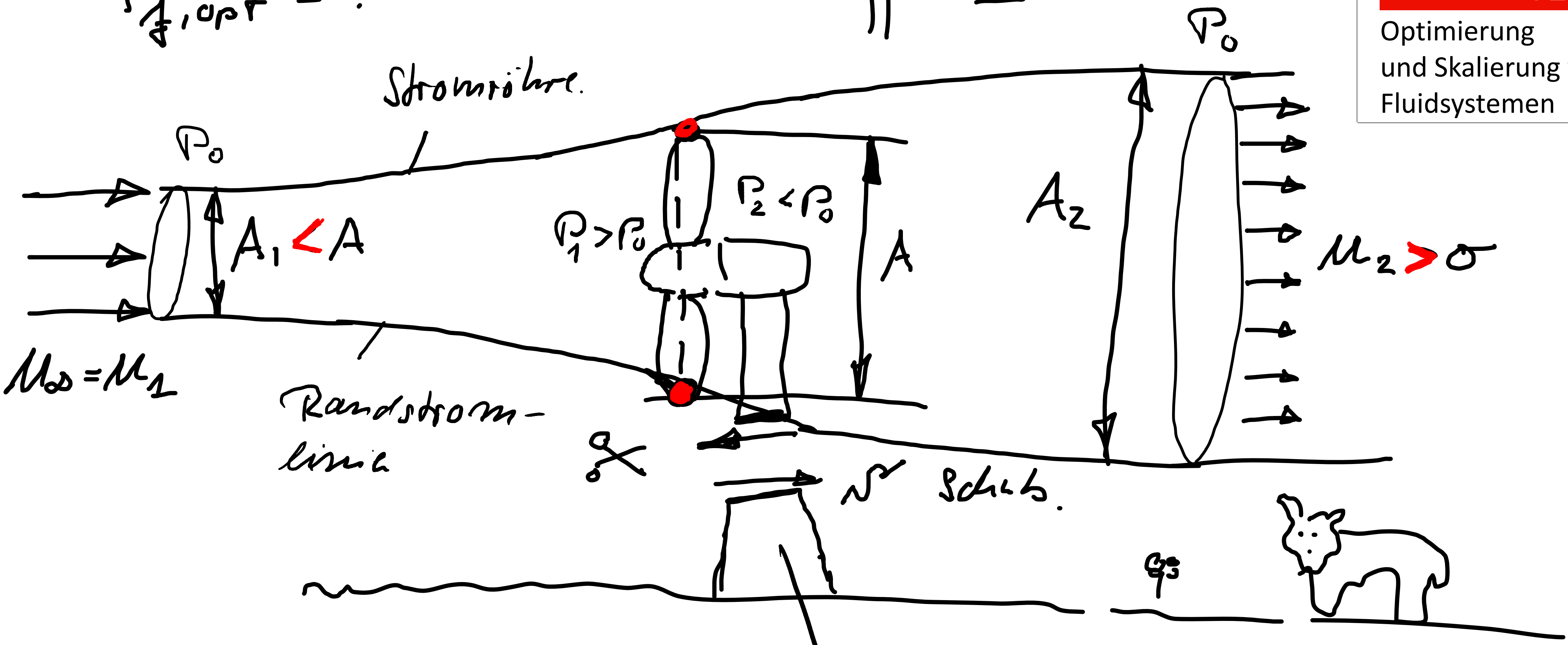
Theorie der Strömungsmaschinen (1959)
Albert Betz
Teubner ich student.
Homepage FST pdf student.

Ernst Becker
Thermodynamik
Gasdynamik
Kontinuumsmechanik
Strömungslehre.

Zum Betzschen Gesetz. Leit-apparat.



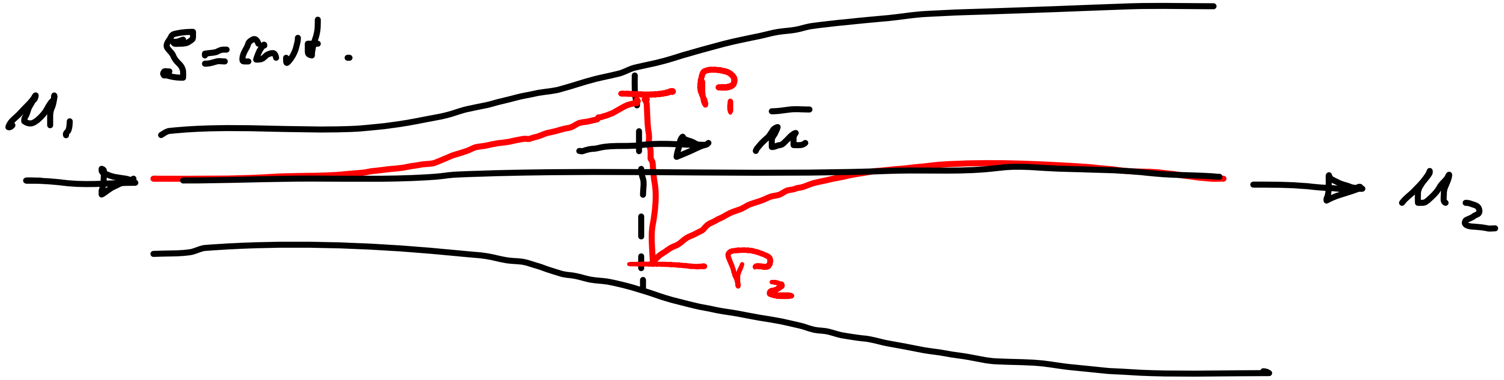
$P_{f,opt} = ?$



Wichtig: A ist die projizierte Fläche der gesamten Maschine einschließlich Leitapparat.

$P_f = \vec{M} \cdot \vec{\Omega} < P_{avail}$.

$$p_0 \overset{!}{\equiv} 0.$$



Da inkompressible Strömung angenommen ist, kann der Umgebungsdruck auf Null gesetzt werden.

Zustandsgleichung $\rho = \text{const}$

⇝ Entkopplung von Energiegleichung und Impulsbilanz.

⇝ Nur Druckdifferenzen sind wichtig für Strömungsvorgänge, aber nicht der Absolutdruck.

Wann sind Dichteänderungen vernachlässigbar klein?

1. $\left(\frac{u}{a}\right)^2 \ll 1$

$a = \sqrt{\gamma R T}$

Schallgeschwindigkeit

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$ für Luft

$R = c_p - c_v$ Gaskonstante

T Absoluttemperatur.

$u \sim$ Blattspitzengeschwindigkeit

$R\Omega$

R ist Radius der Scheibe.

2. $\left(\frac{f L}{a}\right)^2 \ll 1$

Verletzt in der Akustik.

f ist eine typische Frequenz

L ist eine typische Länge.

3. Bei Wärmetransfer kann i.d.R. $\rho = \text{const}$ nicht erfüllt sein.

4. $\frac{\sqrt{g H}}{a} \ll 1$

Verletzt in der Meteorologie.