

## 2.1.7 Keimmodell „kugelförmiger Porenkeim“

⇒ In Flüssigkeiten können Keime nur über längere Zeit existieren, wenn sie sich an Vertiefungen einlagern.

### Keime in

	ruhender Flüssigkeit	strömender Flüssigkeit
Porenkeime	X	X
Mikroblasen		X

The diagram shows a 2x2 grid. The top row is labeled 'Keime in' and has two columns: 'ruhender Flüssigkeit' and 'strömender Flüssigkeit'. The left column has two rows: 'Porenkeime' and 'Mikroblasen'. In the 'Porenkeime' row, there is an 'X' in the 'ruhender Flüssigkeit' column and an 'X' in the 'strömender Flüssigkeit' column, with a horizontal arrow pointing from the 'X' in the first column to the 'X' in the second column. In the 'Mikroblasen' row, there is an empty cell in the 'ruhender Flüssigkeit' column and an 'X' in the 'strömender Flüssigkeit' column, with a vertical arrow pointing from the 'X' in the top row down to the 'X' in the bottom row.

⇒ Für Kavitationsereignisse müssen nur Mikroblasen betrachtet werden.

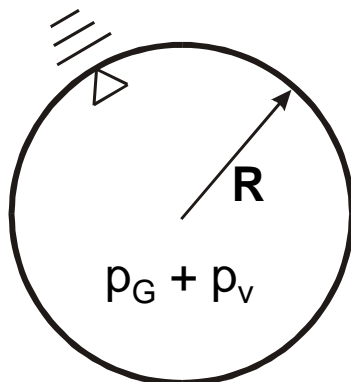


- Annahmen:**
- 1.)  $m_G = \text{const.}$  (keine Diffusion)
  - 2.)  $\dot{R}$  ausreichend klein (keine Trägheitskräfte)
  - 3.)  $\vartheta_G = \text{const.}; p_v = \text{const.}$  (isotherme Änderung)
  - 4.) kugelförmige Keime

**Druckgleichgewicht:**

$$p_{FL} - p_v = p_G - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

$p_{Fl}, \vartheta, \alpha_\infty$



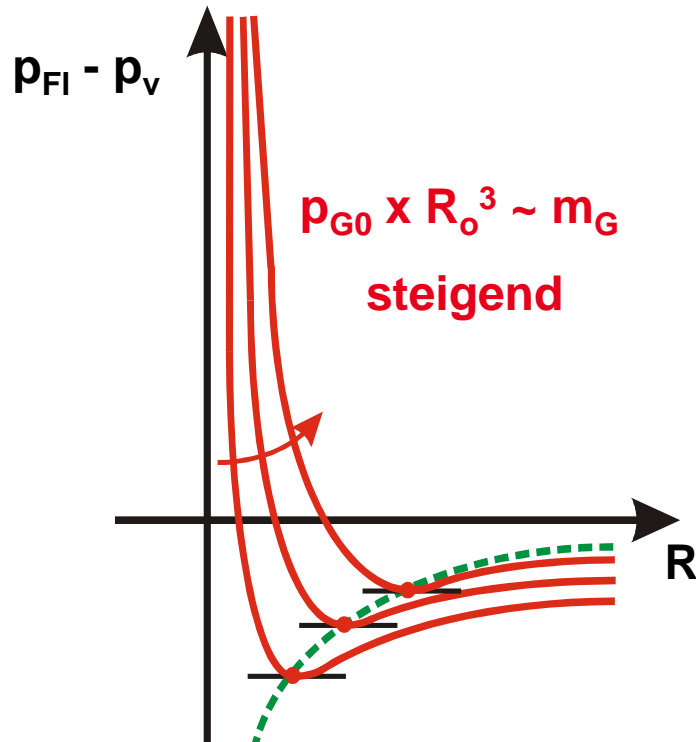
$$p_G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = m_G \cdot R_G \cdot \vartheta_G = \text{const.}$$

$$p_G = \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \cdot p_{G0}$$

$$\Rightarrow p_{FL} - p_v = \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \cdot p_{G0} - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

## 2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten

(2/5)



$$R = R_{\text{krit}}$$

für  $\frac{d(p_{\text{Fl}} - p_v)}{dR} = 0$

d.h.  $\frac{dR}{d(p_{\text{Fl}} - p_v)} \rightarrow \infty$

$$\frac{d(p_{\text{Fl}} - p_v)}{dR} = -3 \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R^4} + \frac{2 \cdot \tau}{R^2} = 0$$

$$\Rightarrow R_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\tau}}$$

$$(p_{\text{FL}} - p_v)_{\text{krit}} = \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R_{\text{krit}}^3} - \frac{2 \cdot \tau}{R_{\text{krit}}} = \frac{1}{R_{\text{krit}}} \left[ \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\frac{3 p_{G0} \cdot R_0^3}{2 \tau}} - 2\tau \right] = \frac{1}{R_{\text{krit}}} \left[ \frac{2}{3} \tau - 2\tau \right]$$

$$(p_{\text{FL}} - p_v)_{\text{krit}} = \ominus \frac{4}{3} \frac{\tau}{R_{\text{krit}}}$$

## 2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten

(3/5)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Zusammenhang zwischen $R_{\text{krit}}$ und $R_0$ :

$$R_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{3 p_{G0} \cdot R_0^3}{2 \tau}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left( \frac{p_0 - p_v}{\tau} \cdot R_0^3 + 2 \cdot R_0^2 \right)} = R_0 \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{p_0 - p_v}{\tau} \cdot R_0 + 2 \right)}$$

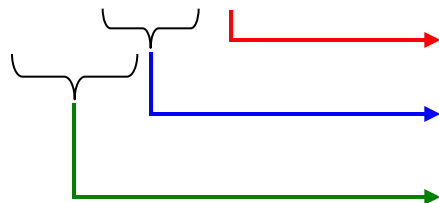
$$p_{G0} = p_0 - p_v + \frac{2 \cdot \tau}{R_0}$$

$$\Rightarrow \frac{R_{\text{krit}}}{R_0} = \sqrt{3 \cdot \left( \frac{p_0 - p_v}{2 \cdot \tau} \cdot R_0 + 1 \right)}$$

$$(p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_{\text{krit}}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_{\text{krit}}}$$

$$\Rightarrow (p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \left( \frac{p_0 - p_v}{2 \cdot \tau} \cdot R_0 + 1 \right)}}$$

$$\text{d.h.: } (p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = f(p_0 - p_v, \tau, R_0)$$



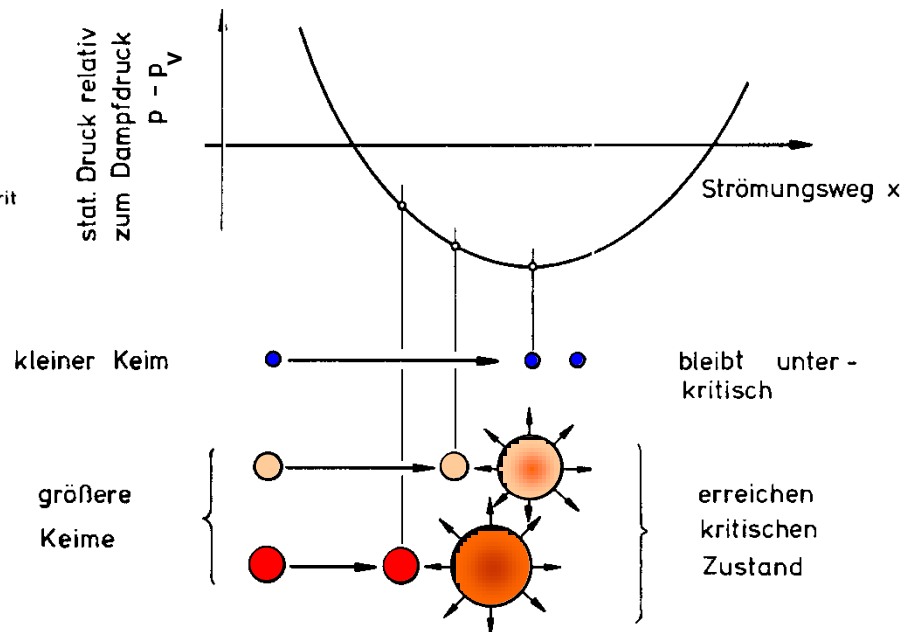
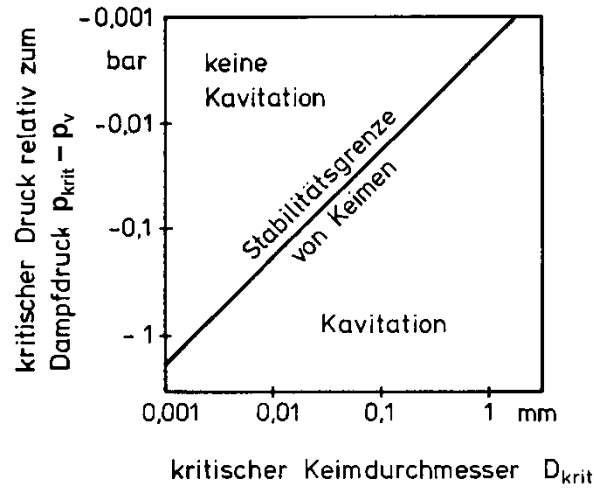
**Keimgröße am Referenzort**

**Flüssigkeit**

**Dampfdruckabstand am Referenzort**

# 2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten

(4/5)



## 2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten

(5/5)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

**Wasser:**  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $\vartheta = 20 \text{ °C}$   
 $p_v = 0,0234 \text{ bar}$   
 $\tau = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$

a.) Für welche Keimgrößen ergeben sich Zugspannungen?

$$p_{\text{FL,krit}} < 0 \quad \text{für} \quad R_0 < 9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$D_0 < 18 \mu\text{m}$$

b.) Wie groß sind die kritischen Drücke bei realistischen Keimgrößen?

$D_0 \text{ [}\mu\text{m]}$	1	10	100
$p_{\text{FL,krit}} \text{ [bar]}$	- 0,949	- 0,030	+ 0,021

( $\approx p_v$ )

## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (1/6)



- Annahmen:**
- 1.)  $m_G = \text{const.}$  (keine Diffusion)
  - 2.)  $p_\infty = p_\infty(t)$
  - 3.) kugelförmige Einzelblase

### 1.) Potentielle Energie der Blase

(infolge Ausdehnung der Blase  $\hat{=}$  Feder):

$$E_{\text{pot}} = (p_\infty - p_{\text{FI,W}}) \cdot \underbrace{V_{\text{BI}}}_{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \frac{dE_{\text{pot}}}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = (p_\infty - p_{\text{FI,W}}) \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R}$$

## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (2/6)



### 2.) Kinetische Energie der Flüssigkeit

(Kinetische Energie des gasförmigen Inhalts der Blase wird vernachlässigt)

$$E_{\text{kin}} = \frac{\rho_{\text{Fl}}}{2} \int_R^{\infty} c_r^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{dV} dr$$

aus Kontinuität:  $4\pi R^2 \cdot \dot{R} = 4\pi r^2 \cdot c_r \quad \Rightarrow \quad c_r^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^4 \cdot \dot{R}^2$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= 4\pi \cdot \frac{\rho_{\text{Fl}}}{2} \cdot R^4 \cdot \dot{R}^2 \cdot \int_R^{\infty} r^{-2} dr \\ &= 2\pi \rho_{\text{Fl}} \cdot R^3 \cdot \dot{R}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = 2\pi \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot \left( 2 \cdot R^3 \cdot \dot{R} \cdot \ddot{R} + 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R}^3 \right)$$



## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (3/6)



3.)  $\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{kin}}}{dt}$  (Annahme: reibungsfrei):

$$R \cdot \ddot{R} + \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{\text{Fl}}} (p_{\text{Fl,W}} - p_{\infty})$$

### RAYLEIGH-PLESSET-ZWICK-Gleichung

- nichtlineare
- gewöhnliche (= f(Zeit))

} Differentialgleichung

$$p_{\text{FL,W}} = p_v + p_G - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

$$p_G = \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3n} \cdot p_{G0}$$

isotherm :  $n = 1$

adiabat :  $n = \kappa$

$$p_{G0} = p_0 + \frac{2 \cdot \tau}{R_0} - p_v$$

## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (4/6)



### 4.) Berücksichtigung weiterer Einflüsse

#### a.) Viskosität $\mu_{FL}$ (nur an der Blasenwand)

Zusatzterm: 
$$-\Delta p_{Rbg} = 4 \cdot \mu_{FL} \cdot \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{p} = p_v + p_G - \underbrace{\frac{2\tau}{R}}_{\Delta p_{Kr}} - \underbrace{4\mu_{FL} \cdot \frac{\dot{R}}{R}}_{\Delta p_{Rbg}} - p_\infty$$

#### b.) Verdampfungsenthalpie $\hat{r}$

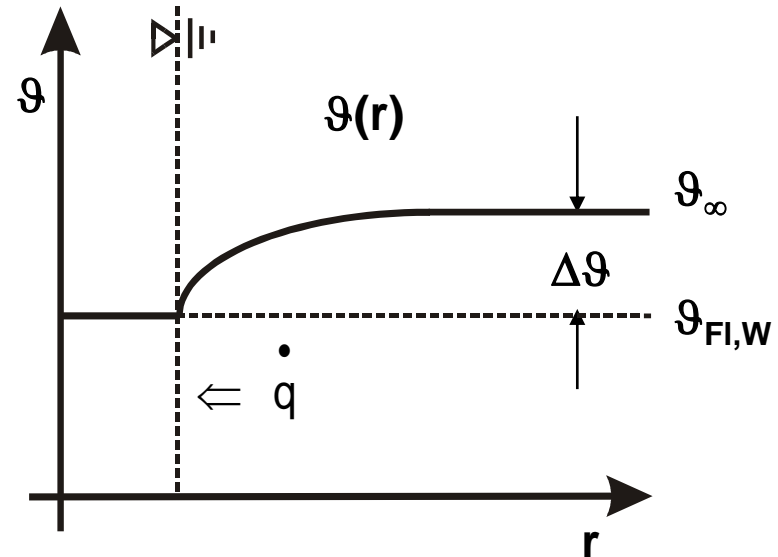
Zusatzterm: 
$$\Delta p_v = \frac{dp_v}{d\vartheta} \Delta \vartheta$$

aus Gesetz von CLAUSIUS-CLAPEYRON: 
$$\frac{dp_v}{d\vartheta} = \frac{\hat{r}}{\vartheta(v_v - v_{Fl})} \approx \frac{\hat{r}}{\vartheta \cdot v_v} \approx \frac{\hat{r} \cdot p_v}{R_v \cdot \vartheta^2}$$

## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (5/6)



### Wärmebilanz



$$\dot{q} = \begin{cases} = \hat{r} \cdot \rho_V \cdot \dot{V}_{BI} \\ = \lambda_{FL} \cdot \left( \frac{d\Theta}{dr} \right)_W \cdot 4\pi R^2 \\ = \frac{d}{dt} \int_R^{\infty} \rho_{FL} \cdot c_{FL} \cdot \Theta \cdot 4\pi r^2 dr \end{cases}$$

Wärmestromdichte für die Verdampfung/  
Kondensation an der Blasenwand

Wärmestromdichte Durch Leitung

Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit

## 2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (6/6)



### c.) Kompressibilität der Flüssigkeit

Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$

Annahme:  $\dot{R} \ll a$

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot R \cdot \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3a}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot \frac{1}{\rho_\infty} \cdot \tilde{\Delta p} + \frac{R}{a} \left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot \frac{1}{\rho_\infty} \cdot \frac{d(\tilde{\Delta p})}{dt}$$

mit:  $\tilde{\Delta p} = p_v(\vartheta_\infty) + \Delta p_v + p_G - \Delta p_{kr} - \Delta p_{Rbg} - p_\infty$

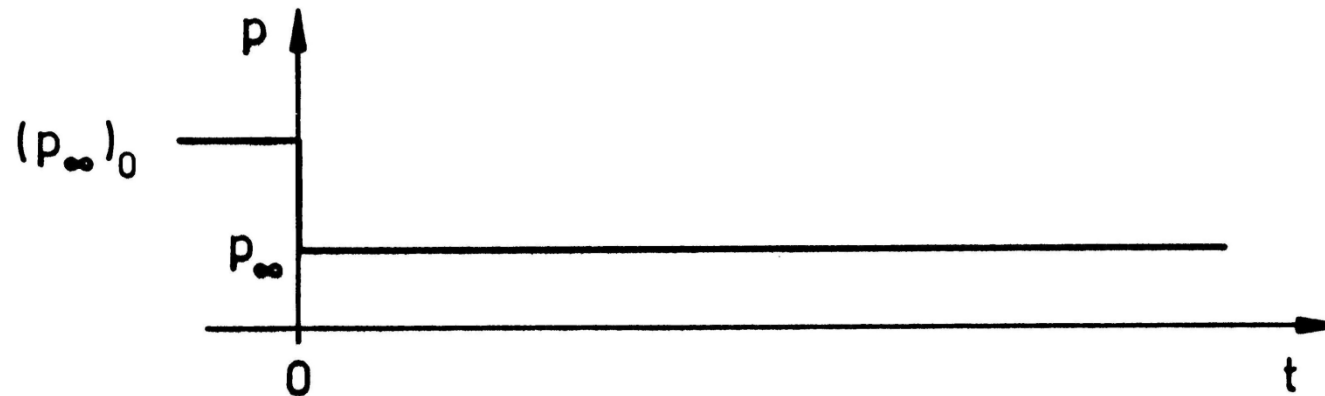
## 2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen

(1/3)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Sprungfunktion des Druckes zum Zeitpunkt  $t = 0$  von  $(p_\infty)_0$  auf  $p_\infty$



Betrachtet werden unterschiedlich große Werte von  $R_0 = R(t \leq 0)$

$$(p_\infty)_0 = 1 \text{ bar}$$

$$p_\infty - p_v = -0,0034 \text{ bar}$$

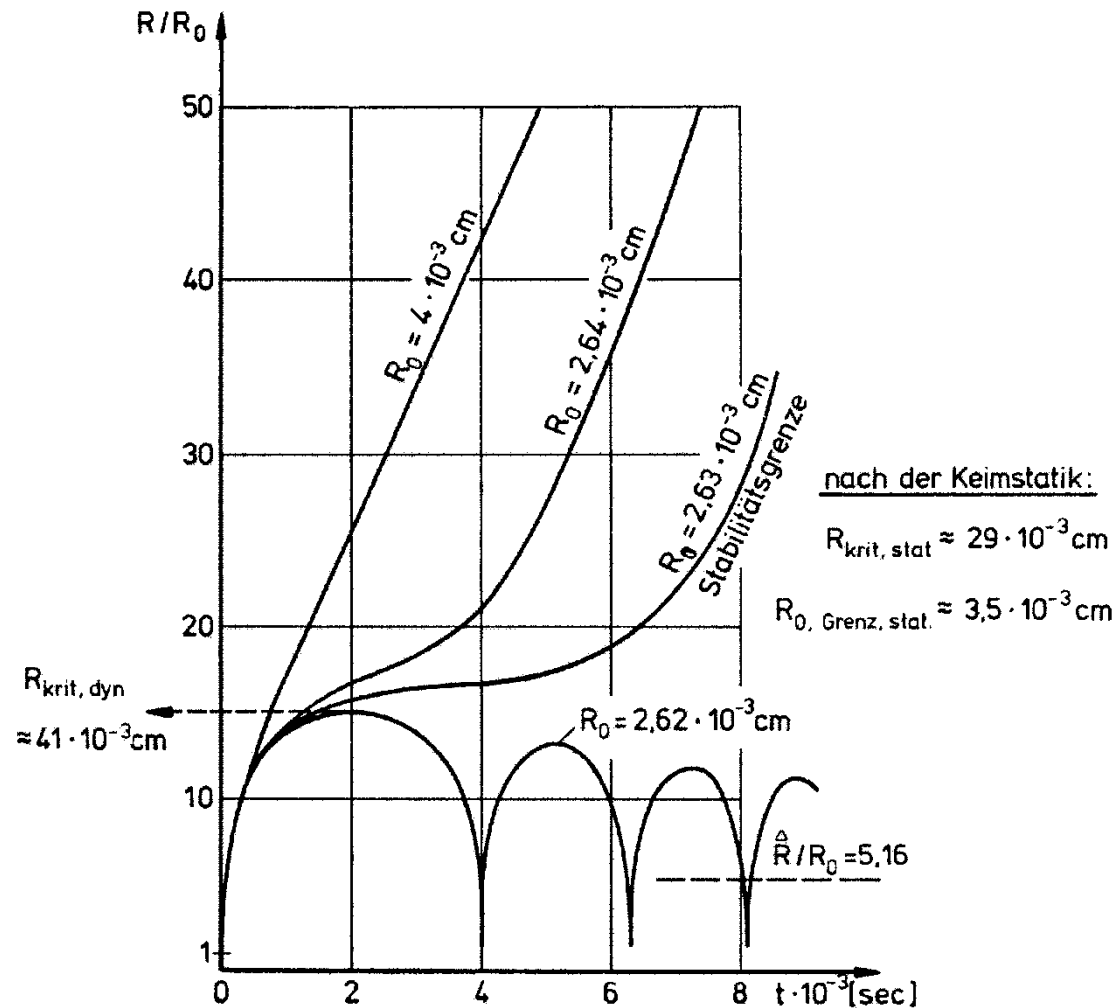
$$p_\infty = 0,02 \text{ bar}$$

## 2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen

(2/3)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



## 2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen

(3/3)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Ergebnisse:

1.)  $R_0 < R_{0,Grenz}$ :

abklingende, nichtlineare Schwingung mit neuem GG-Radius  $\hat{R} > R_0$  der für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird.

2.)  $R_0 \geq R_{0,Grenz}$ :

Übergang in die asymptotische Lösung mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{R} = \text{const}$

3.)  $R_0 = R_{0,Grenz}$ :

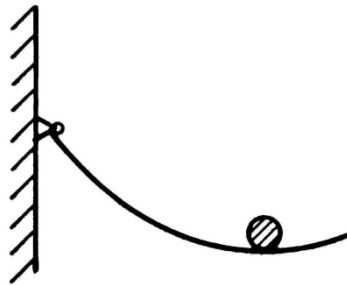
kritischer Zustand bei dynamischen Keimverhalten (Wendepunkt mit  $\dot{R} = 0$ )

4.) Es ist  $R_{\text{krit,dyn}} > R_{\text{krit,stat}}$ , jedoch  $R_{0,Gr,dyn} < R_{0,Gr,stat}$

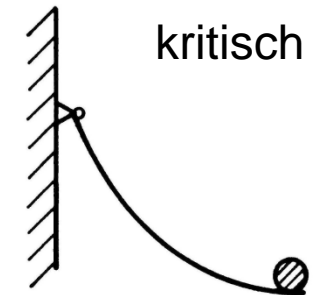
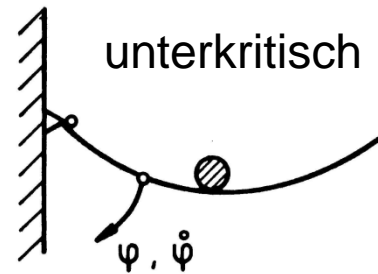
Anschauliche Deutung des Unterschieds zwischen Stabilitätsgrenze bei quasistatischer bzw. dynamischer Druckabsenkung: **Analogie aus Mechanik**

## 2.2.3 Mechanische Analogie zum kritischen Blasen Zustand

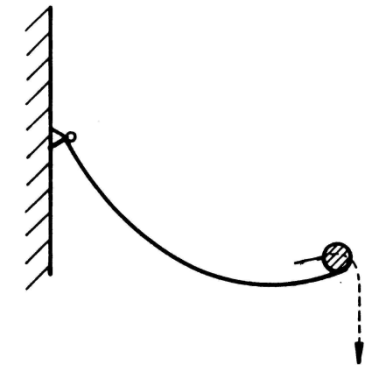
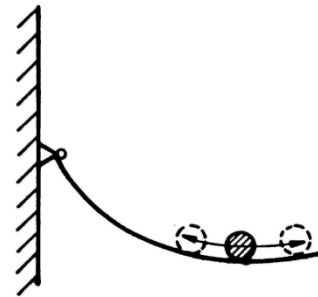
Ausgangszustand „0“



1.) quasistatische Änderung:  $\dot{R} \approx 0 \rightarrow$  hier:  $\dot{\varphi} \approx 0$



2.) Änderung mit Trägheitseinfluss



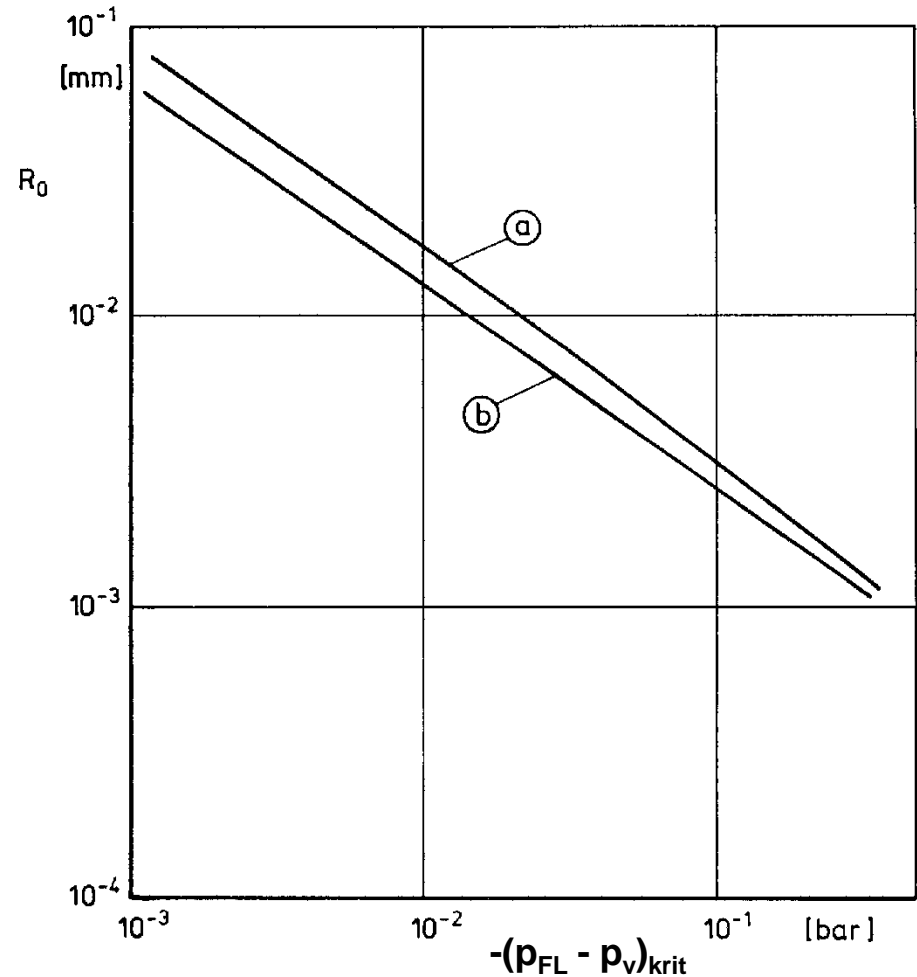


## 2.2.4 Kritischer Druck in Abhängigkeit vom Anfangs-Keimradius

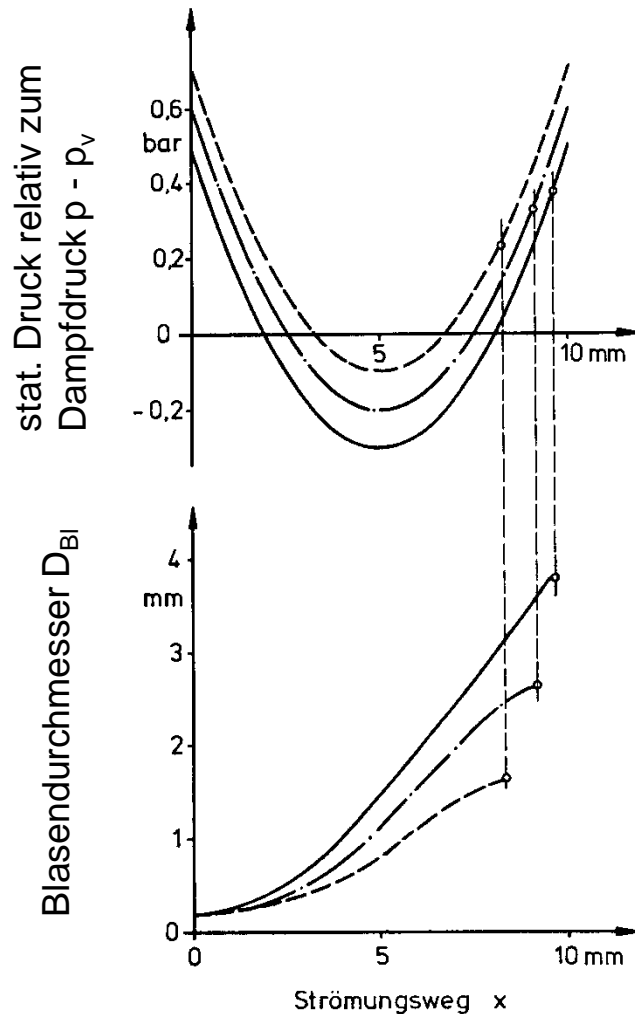
$p_0 = 1 \text{ bar}$ ;  $\vartheta = 20 \text{ °C}$

- a.) Keimwachstum quasi-statisch
- b.) Keimwachstum dynamisch  
(bei sprungartiger Druckänderung)

⇒ für technische Belange  
quasi-statische Betrachtung  
ausreichend



## 2.2.5 Berechnetes Blasenwachstum in einer Unterdruck-Zone



$$D_{BI,0} = 0,2 \text{ mm}; c_0 = 10 \text{ m/s}$$

### Ergebnisse:

- 1.) Für  $R_0 = \text{const}$  werden unterschiedliche  $R_{\max}$ -Werte erreicht.
- 2.)  $x(R = R_{\max})$  befindet sich bei  $p > p_v$
- 3.) Nach gewisser Wachstumszeit ist die erreichte absolute Blasengröße  $R$  weitgehend unabhängig von  $R_0$

## 2.2.6 Blasen-Implosion (1)

### Erste Theorie von Lord RAYLEIGH (1917)

- Annahmen:
- $p_G = 0$
  - $\tau = 0$
  - $\mu_{Fl} = 0$
  - $\rho_{Fl} = \text{const}$
  - $\vartheta = \text{const}$
  - $p_\infty = \text{const} > p_v$

$$t = 0: R = R_{\max}, \quad \dot{R} = \ddot{R} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{p_\infty - p_v}{\rho_{Fl}} \cdot \left[ \left( \frac{R_{\max}}{R} \right)^3 - 1 \right]}$$

$$R_{\min} = 0$$

$$t_{\text{Impl}} = 0,915 \cdot R_{\max} \sqrt{\frac{\rho_{Fl}}{p_\infty - p_v}}$$

### Beispiel

$$p_\infty = 1 \text{ bar}, \quad \vartheta = 20 \text{ °C}$$

$$\rho_{Fl} = 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad R_{\max} = 1 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow t_{\text{Impl}} = 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 93 \text{ } \mu\text{s}$$