Impulsbilanz

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underset{\sim}{T} \quad , \quad \text{mit}$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho k_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

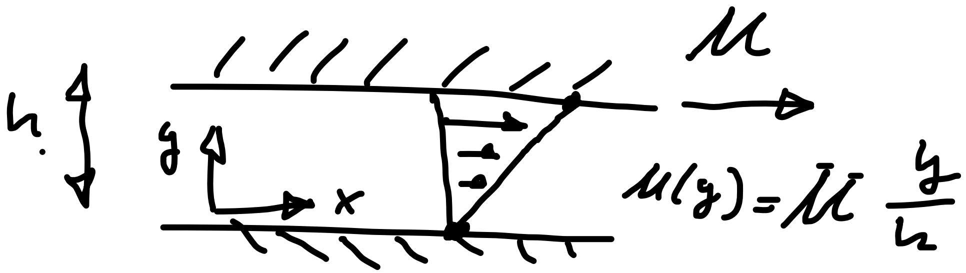
Newtonsches Material.

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + 2\eta\,\underset{\sim}{E} + \lambda^* \nabla \cdot \vec{u}, \qquad \boxed{\eta = \text{const.}}$$

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\eta\, e_{ij} + \lambda^* e_{kk}$$

Navier-Stokessche Gleich.

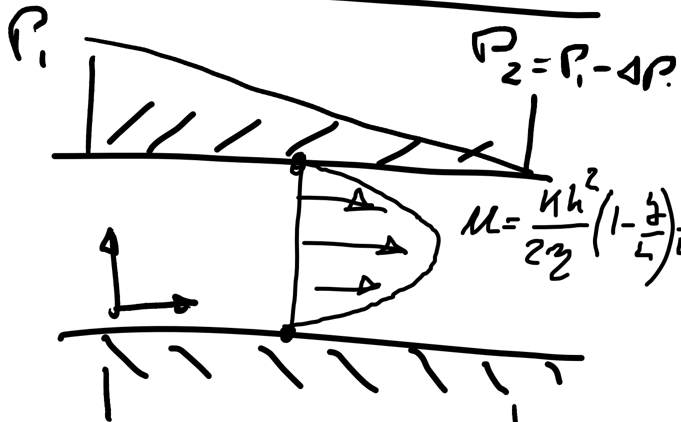
$$\rightsquigarrow \boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \eta \Delta \vec{u} - \nabla p}$$



$$u(y) = U \frac{y}{h}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv 0, \text{ für stationäre Strömg.}$$

$$\Delta \vec{u} = 0$$



$$u = \frac{K h^2}{2\eta}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\frac{y}{h}$$

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{u} \quad \Big| \cdot \vec{e}_x$$

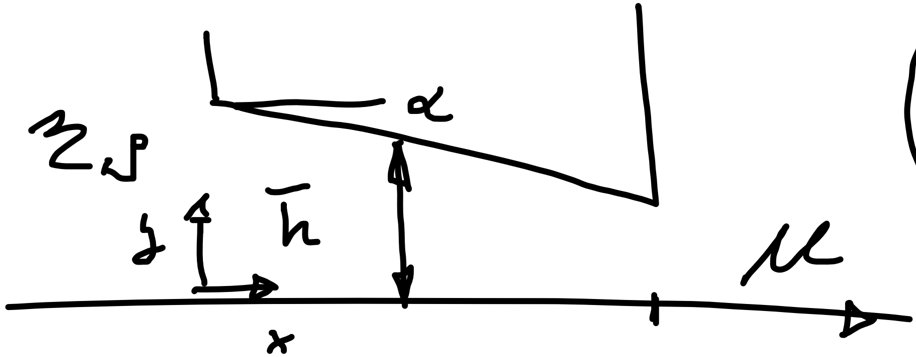
$$\frac{dp}{dx} = -K = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

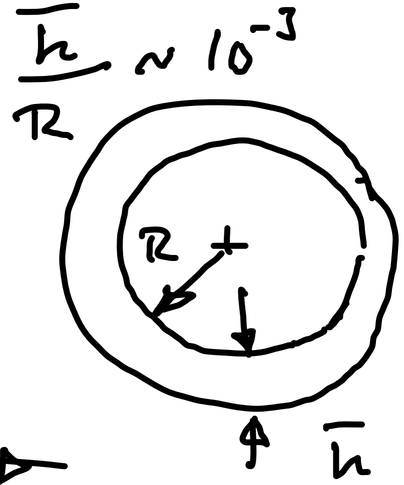
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

Gleitlagerströmung





$\boxed{\alpha Re \ll 1}$, dann ist die Trägheit $\rho \frac{Du}{Dt}$ sehr viel kleiner als Normal-spannung und Schubspannung.

~ Trägheit

ΩR

$$\text{Reynoldszahl} \quad Re = \frac{\text{Trägheit}}{\text{viskose Spannung}} = \frac{\rho u^2}{\eta \frac{u}{\bar h}} = \frac{\rho u \bar h}{\eta}$$

~ viskose Spannung.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} .$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

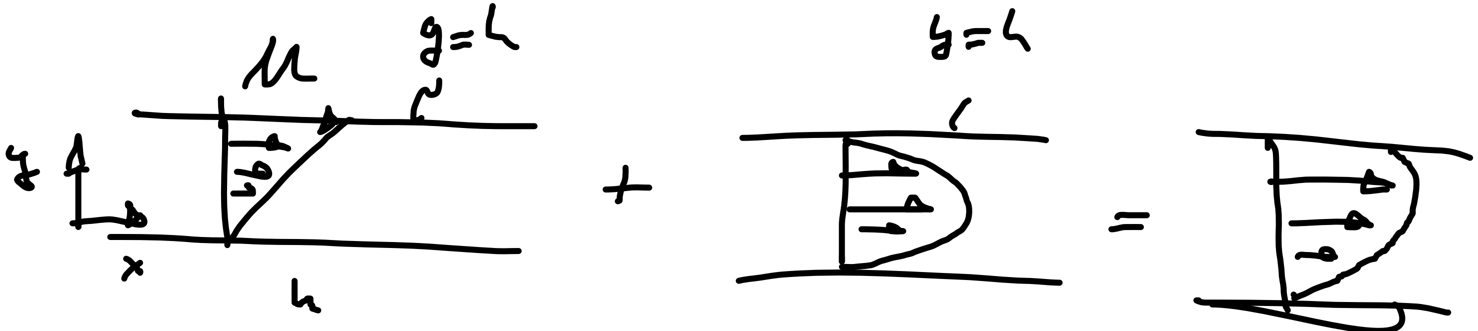
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

$\nabla p = \eta \Delta \vec{u}$: Stokessche Gleichung.

☺ lineare Gleichung.

☺ Superposition ist möglich.

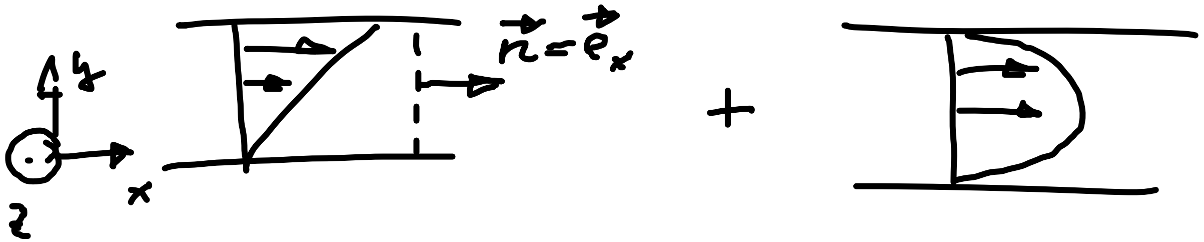


$$\bar{u}_D = \frac{1}{h}\int_0^h u(y)\,dy = \frac{1}{2}u$$

$$u(y) = K\frac{h^2}{2\eta}\left(1-\frac{y}{h}\right)\frac{y}{h}$$

$$\bar{u}_D = K\frac{h^2}{2\eta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = K\frac{h^2}{12\eta}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5



Volumenstrom

$$\dot{V} := \int_{S} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\dot{V}_x = \int_0^h u \, dS = \bar{u} h = \bar{u}_\Delta h + \bar{u}_D h$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{1}{2} U h - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{12 \eta} \\ \dot{V}_x &\neq f_n(x) \end{aligned}\right\} \frac{\partial}{\partial x}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6\mu\frac{\partial h}{\partial x}.}$$

Reynoldssche Gleichung der hydrodynamischen Schmierung.

$$\frac{\partial \dot V_x}{\partial x} = 0$$

Kontinuität in integraler Form.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

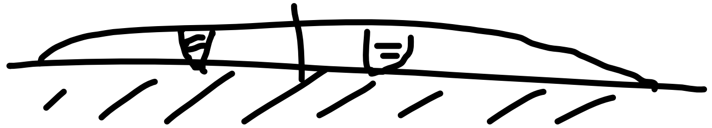
w ist die lokale Strömungsgeschwindigkeit in z-Richtung.

$$\dot V_z = \frac{1}{2}\bar W h - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{h^2}{12\eta}$$

$\bar W$ ist die Schleppgeschwindigkeit in z-Richtung.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

Kontigleichung



$$\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} = 0.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\left(\frac{\partial (hU)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(hW)\right) + 12\frac{\partial h}{\partial t}\\ h = h(x, z, t).\end{gathered}}$$

☺ linear.

☺ nur zwei Raumkoordinaten.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Anwendungen:

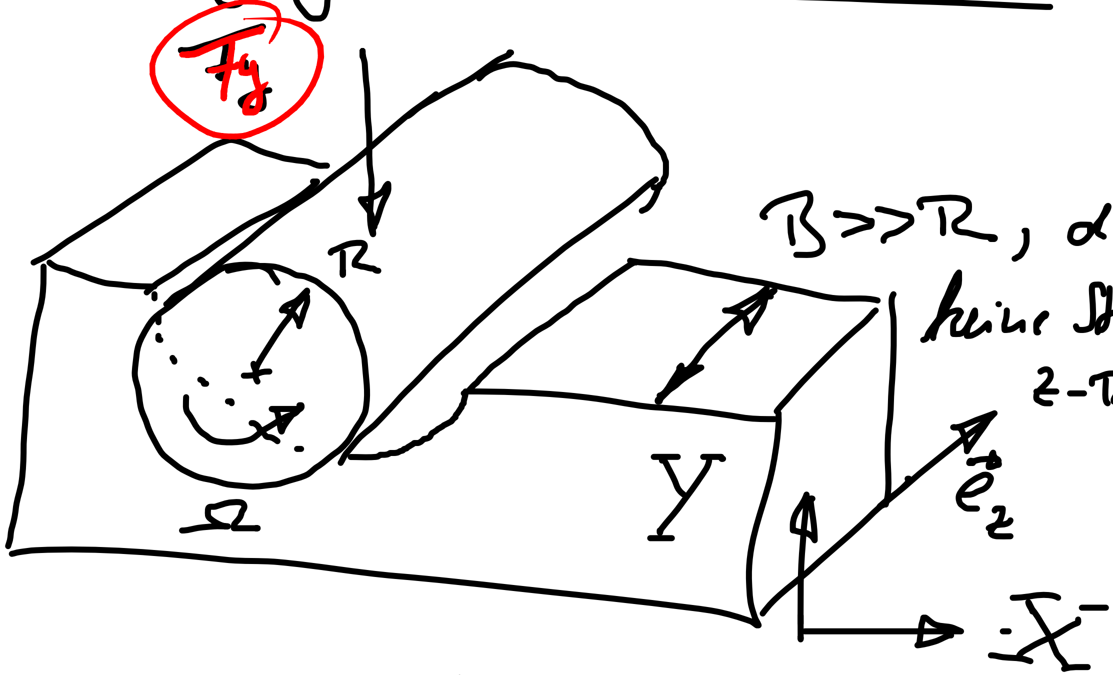
- Gleitlager
- ~~Spritz~~ Schraubenpumpen
-
- ⋮ } Ihr Job.
- Festplattenlaufwerk ...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

Lösung der Gleichung für eine unendlich Tiefe Zapfenlager.



$B >> R$, d.h. keine Strömung in z-Richtung.

1905 Arnold Sommerfeld.

Empfehlung: Mehrbändige Physik Serie

- Mechanik der deformierbaren Medien
- Elektrodynamik
- Optik
- Mechanik ....

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

⇝ Sommerfeldzahl ≙ dimensionslose Lagerlast.

$$\boxed{So = \frac{F_y}{\eta\Omega}\,\frac{1}{R}\,\psi^2}$$

$$[\eta\Omega] = \frac{F\,\cancel{T}}{L^2}\,\frac{1}{\cancel{T}}$$

$$[F_y] = \frac{F}{L}$$ Kraft pro Tiefeneinh.

$$\psi := \frac{\bar{h}}{R}$$ relatives Lagerspiel

$\bar{h}$ absolutes Lagerspiel.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

$\rightsquigarrow$

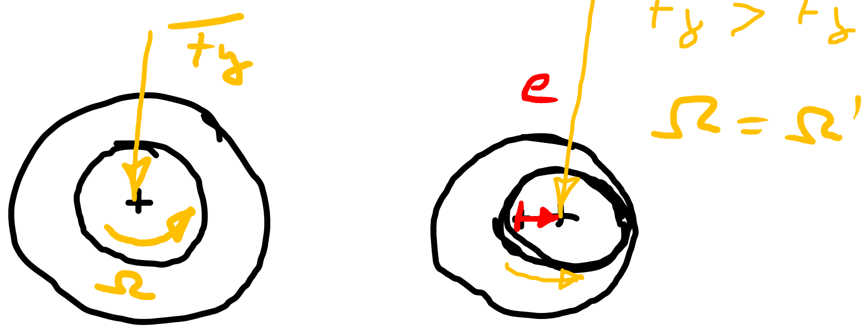
$$So = \frac{12\pi \quad \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(2+\varepsilon^2)}$$

$$\frac{B}{\Omega} \to 0.$$

$$\frac{F_y}{2\Omega R}\left(\frac{\bar{h}}{R}\right)^2$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$0 \le \varepsilon \le 1$$



$\varepsilon = 0$, $e = 0$

$\varepsilon = 1$, $e = \bar{h}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

Reibmoment

1905 Arnold Sommerfeld.

$$\frac{M}{\eta \Omega R^2}\left(\frac{h}{R}\right) = \frac{4\pi\,(1+2\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(2+\varepsilon^2)}$$

Im Grenzfall „schnell" laufender Lager $\varepsilon \to 0$.

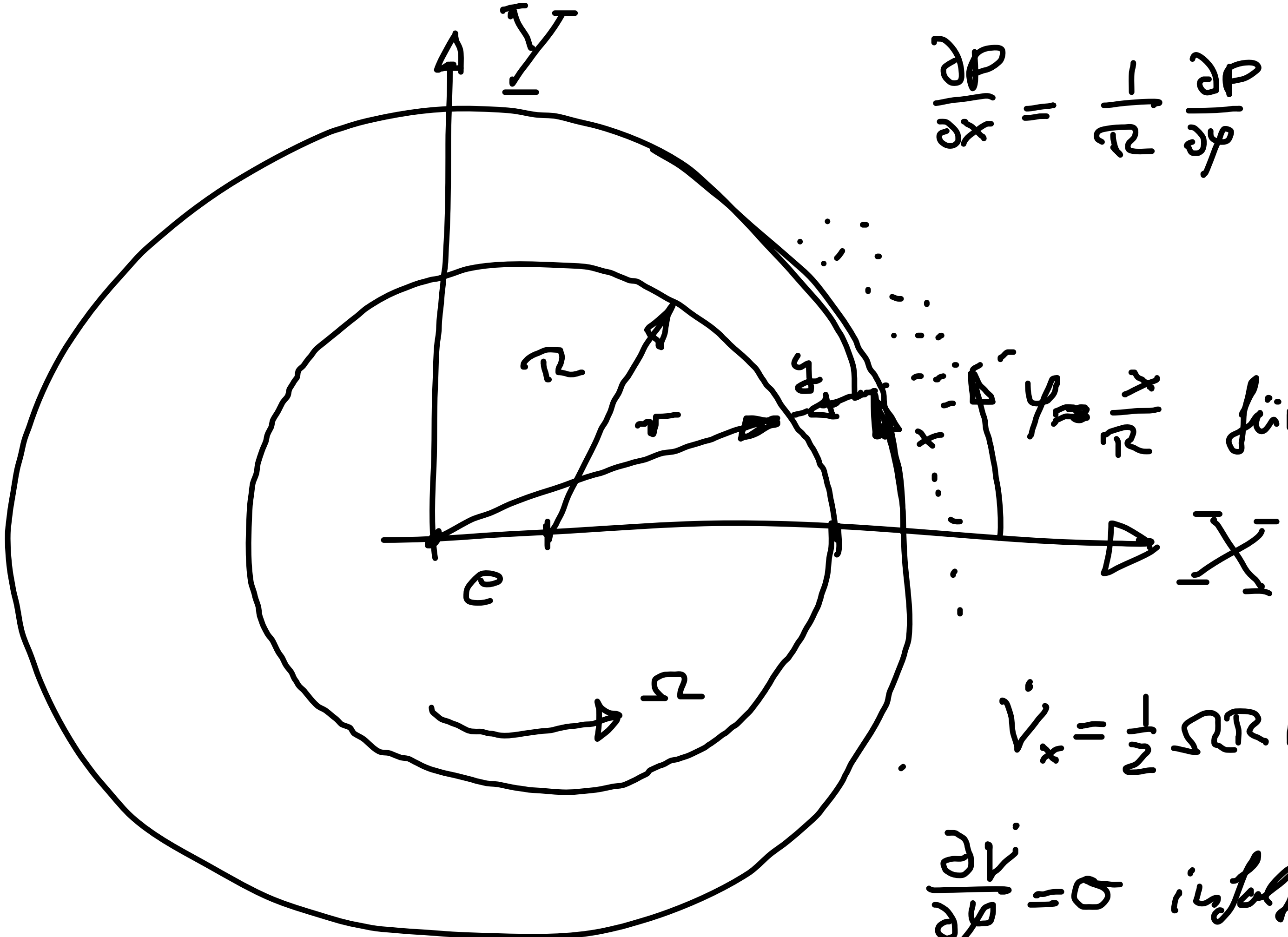
$$M = 2\pi\,\underline{\eta}\,\Omega\,\frac{R^2}{(h/R)}$$

$P_V = M\Omega$ Verlustleistung $\to$ Verlust an Wirkungsgrad.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad \text{für } \psi \ll 1$$

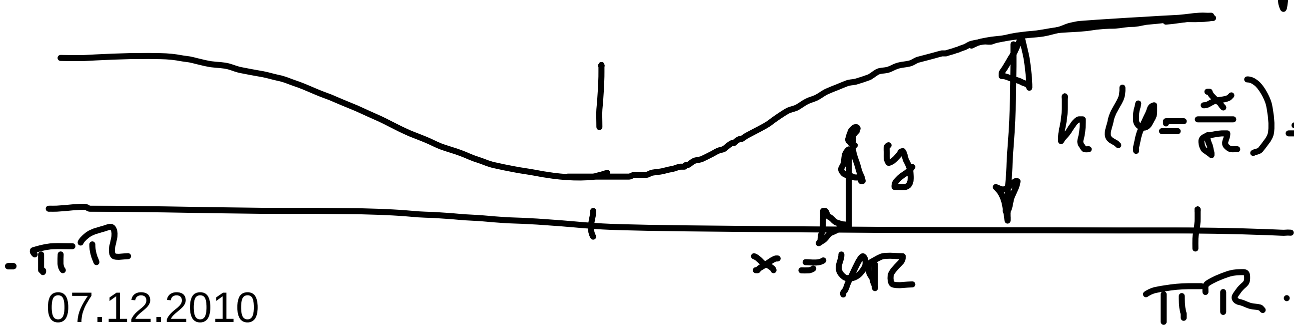
$$\varphi \approx \frac{x}{R} \quad \text{für } \psi = \frac{\bar{h}}{R} \ll 1$$

$$\dot{V}_x = \frac{1}{2}\Omega R\, h(\varphi) - \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{h^3(\varphi)}{12\eta R}$$

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{infolge Kontinuität.}$$

$$p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi)$$

$$h\left(\varphi = \frac{x}{R}\right) = \bar{h}\left(1 - \varepsilon \cos\varphi\right).$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

$$\dot V_x = \frac{1}{2}\,\Omega R^2 \psi \,\frac{I_2}{I_3}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar h}{h(\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{2\pi}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar h}{h(\varphi)}\right)^3 d\varphi = \frac{\pi\left(2+\varepsilon^2\right)}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{5/2}}.$$

$$\dot V_x = \frac{1}{2}\,\Omega R h - \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{h^3}{\eta\, 12}$$

$\rightsquigarrow$ Auflösen nach $\frac{\partial p}{\partial x}$ und Integration.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

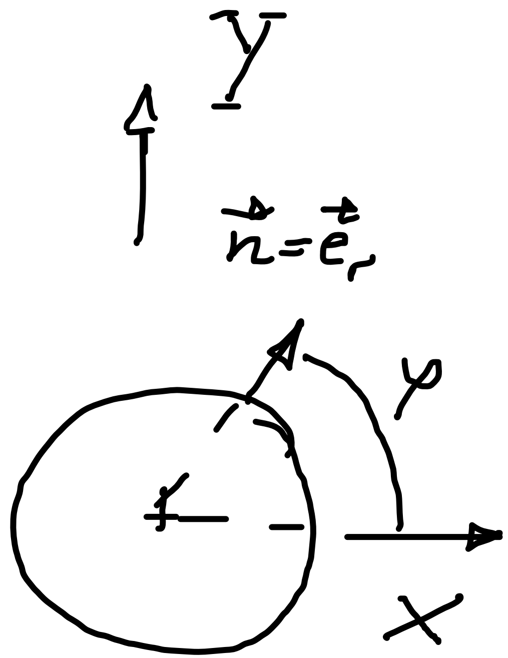
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\,\frac{\eta\,\Omega R}{h^2(\varphi)}\left(1 - \frac{\bar{h}}{h(\varphi)}\,\frac{I_2}{I_3}\right)$$

$$\rightsquigarrow p(x)$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} -p\,\overset{\overset{\vec{e}_r}{\parallel}}{\vec{n}}\,R\,d\varphi \;\Big|\; \cdot\,\vec{e}_x \;\;\; \cdot\,\vec{e}_y$$



$$F_x = \int_0^{2\pi} -p\cos\varphi\,R\,d\varphi \equiv 0.$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} -p\sin\varphi\,R\,d\varphi \quad \text{Tragkraft.}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 5