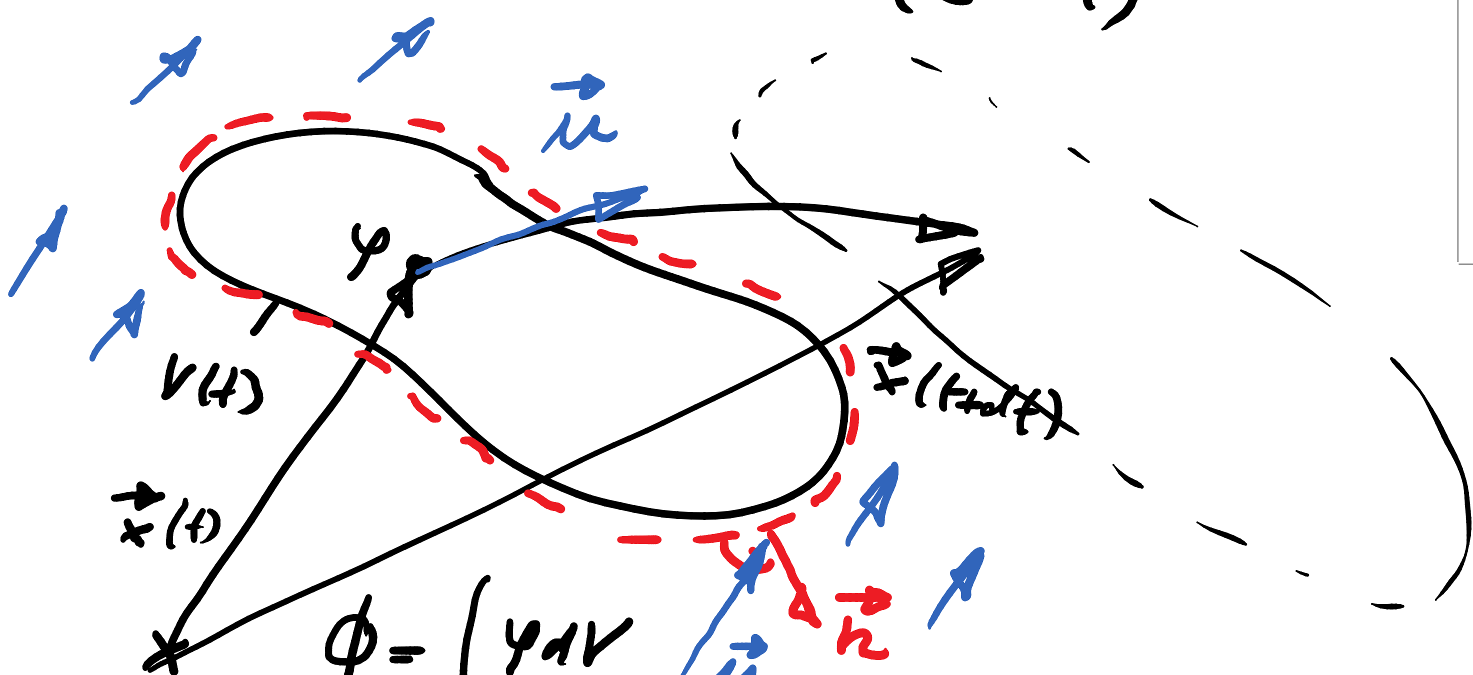
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

Reynoldsche Transporttheorem (RT)

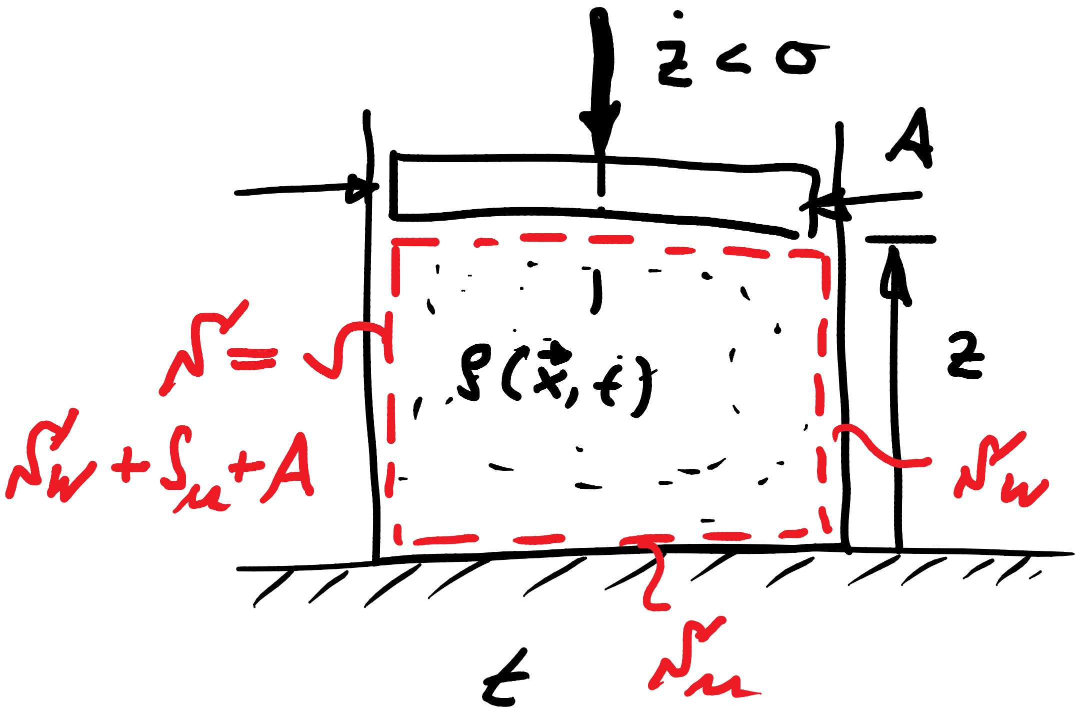


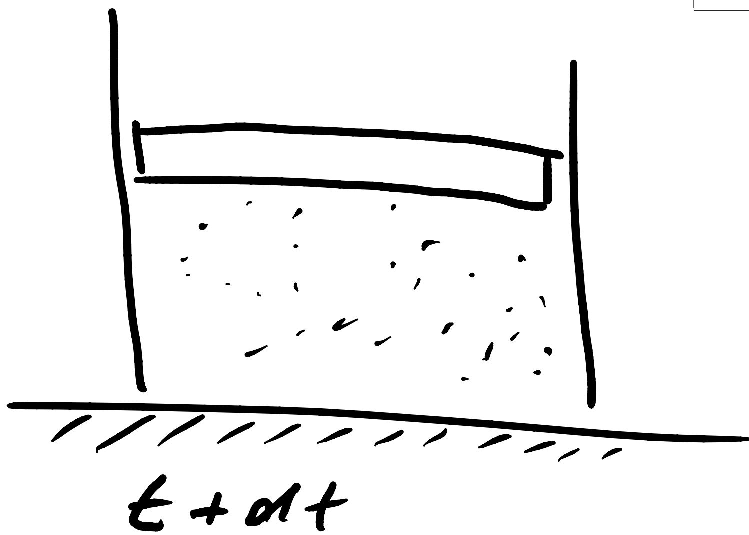
$$\Phi = \int_{V(t)} \varphi \, dV$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \varphi \, dV \overset{RT}{=} \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \varphi \, dV + \oint_{S} \varphi \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS$$

Leibnitzsche Satz.

Einfaches Beispiel



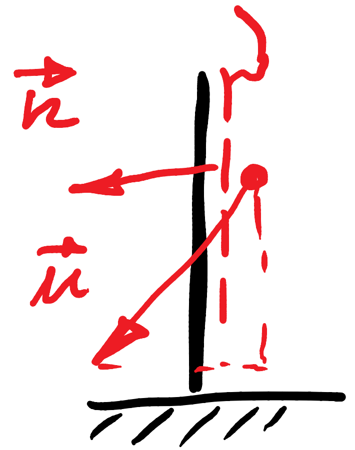


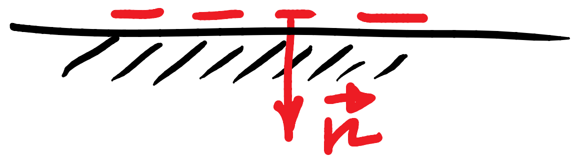
$$\frac{Dm}{Dt} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

$$S = S_W + S_u + A$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{S_W} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{\equiv 0}\, dS + \underbrace{\int_{S_u} \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{\equiv 0}\, dS}_{\dot{m}_u = 0} + \int_A \rho \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{n}}_{=\vec{u}_w\cdot\vec{n} = \dot{z}}\, dS = 0$$





Kinematische Randbeding.

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{an undurchlässigen Wänden}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{u}_w\cdot\vec{n} \quad \text{" bewegten Wände.}$$

D

$$F(x,y,z,t) = 0 \quad \text{z.B.} \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0 \;\Big|\; \overset{\Longleftrightarrow}{\frac{DF}{Dt} = 0} \quad \text{an der W...}$$

$$F = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_A \rho\, \dot z\, dA = 0 .$$

<u>Spezialfall</u>: homogener thermodynamischer Zustand

$\rho = \rho(t)$

$$\frac{d\rho}{dt} V + \rho \dot z A = 0$$

$$\dot\rho z A + \rho \dot z A = 0$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\rho z A\right)} = 0$$

Massenstrom

$I := \int_{A_a} \vec{i}\cdot\vec{n}\,dS$

$\hat{=}$ $\quad A_a$ $\hat{=}$

$\dot{y}$ $\quad \vec{u}$

$\rho \hat{=} u$

$\dot{m} := \int_{A_a} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$

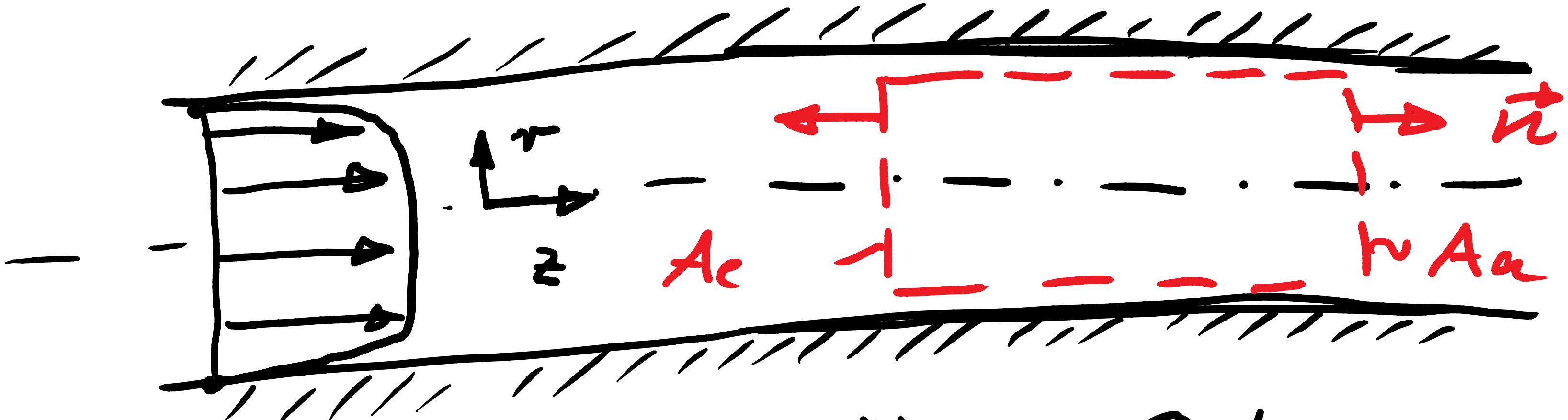
$\dot{m} := -\int_{A_e} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$

Volumenstr.

$\dot{V} := \int_{A_a} \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$

$\dot{V} := -\int_{A_e} \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$

$\cancel{\dot{V} = \frac{dV}{dt}}$



Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt.

$\vec{u}(\underbrace{r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}_{\vec{x}}) = u_z(r)\,\vec{e}_z$

stationärer Vorgang $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0.$

im zeitlichen
Mittel stationärer Vorgang $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \equiv 0.$ $\overline{\varphi} := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \, dt$

instationär $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0.$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

Für im zeitlichen Mittel stationäre Vorgänge

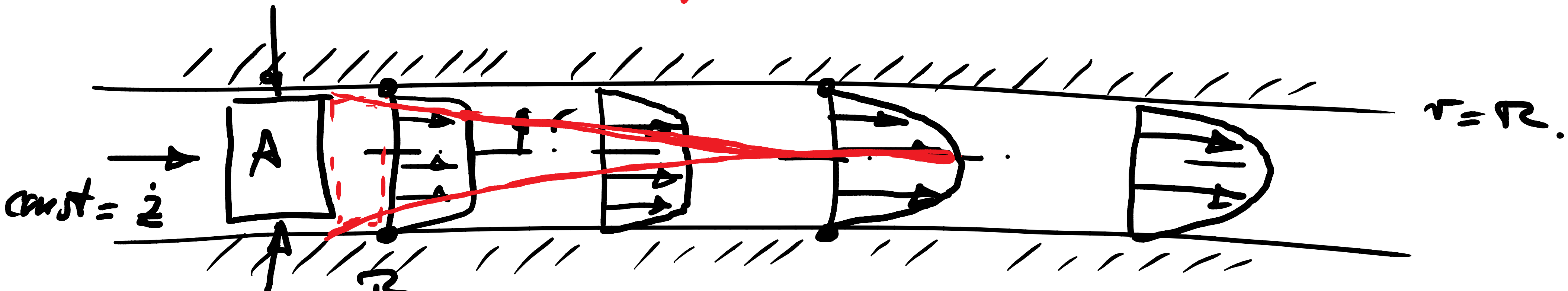
$$\oint \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

$$S = A_e + A_a + S_w$$

$$\dot{m}_e = \dot{m}_a$$

Unterscheidung stationär und instationär

quasistationäre Strömungen verhalten sich wie stationäre Strömungen, obgleich sie instationär sind, d.h. Erregung und Antwort sind im Gleichtakt.



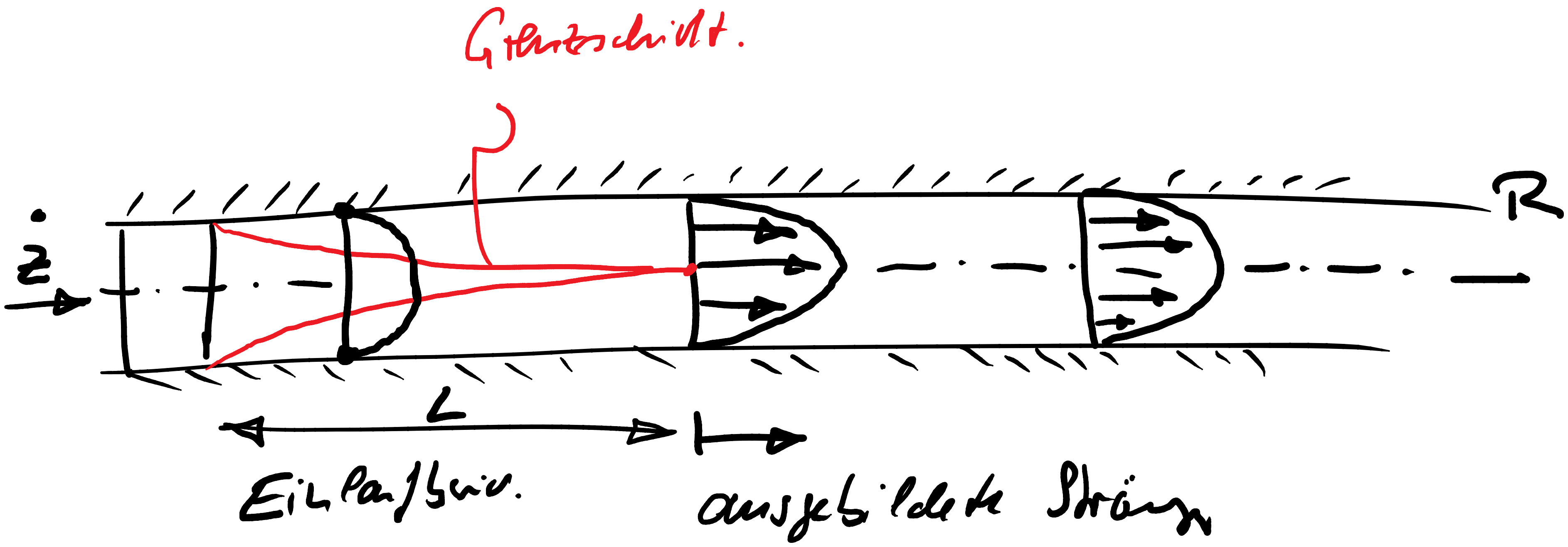
$$\dot{z} A = \underbrace{\int_0^R u_r \, r \, dr \, 2\pi}_{\int_{A_a} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dA}$$

$\vec{u} = 0$ an der Wand

$\vec{u} = \vec{u}_W$ "

dynamische Randbed.

Haftbedingung



Wachsen der Grenzschicht ist ein <u>diffusiver Prozess</u>, der durch die kinematische Viskosität $\nu = \eta/\rho$ bestimmt ist.

$L = f(\dot z, \nu, R)$ dimensionshomogener Zusammenhang

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R} = f\left(\frac{\dot z R}{\nu}\right) \qquad \frac{\dot z R}{\nu} = Re \text{ Reynolds-Zahl.}$$

$$L = f(\nu, \dot{z}, R)$$

Einlauflänge.

Läng

Weg / Zeit

Länge

sec, h, a ... Willkürliche Größe

$$\left[\frac{\eta}{\rho}\right] = \frac{\text{Kraft} * \text{Zeit} * \text{Länge}^3}{\text{Länge}^2 * \text{Masse}} = \frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}$$

$$L = f\left(\frac{\dot{z}}{\nu}, \cancel{\dot{z}}, R\right)$$

$$\underbrace{\frac{L}{R}}_{\text{dimensionslos}} = f\Big(\underbrace{\frac{\dot{z}R}{\nu}}_{Re}, \cancel{R}\Big)$$

dimensionslos

Produkt ist invariant gegenüber Änderung der Basisgrößen.

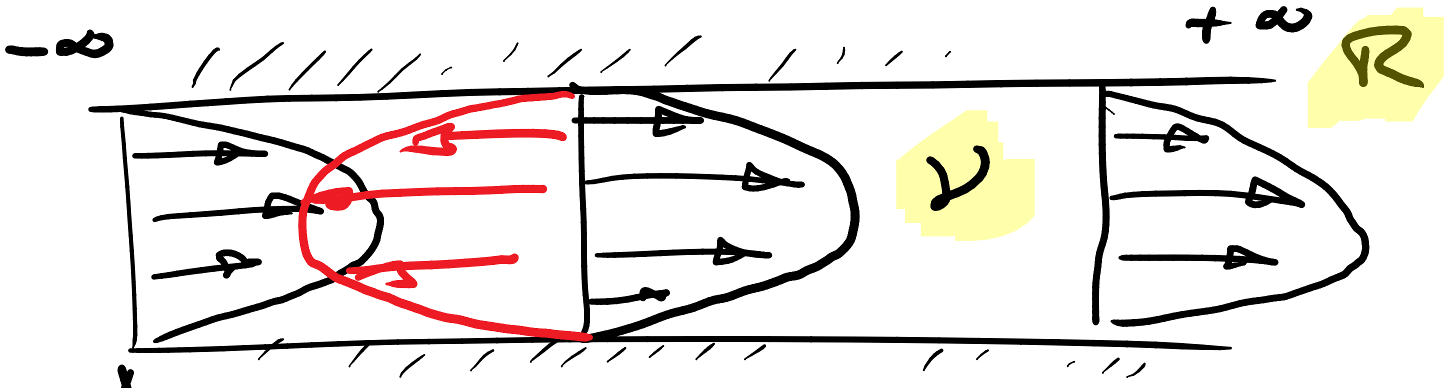
$$\underline{\underline{\frac{L}{R} = f(Re)}}$$

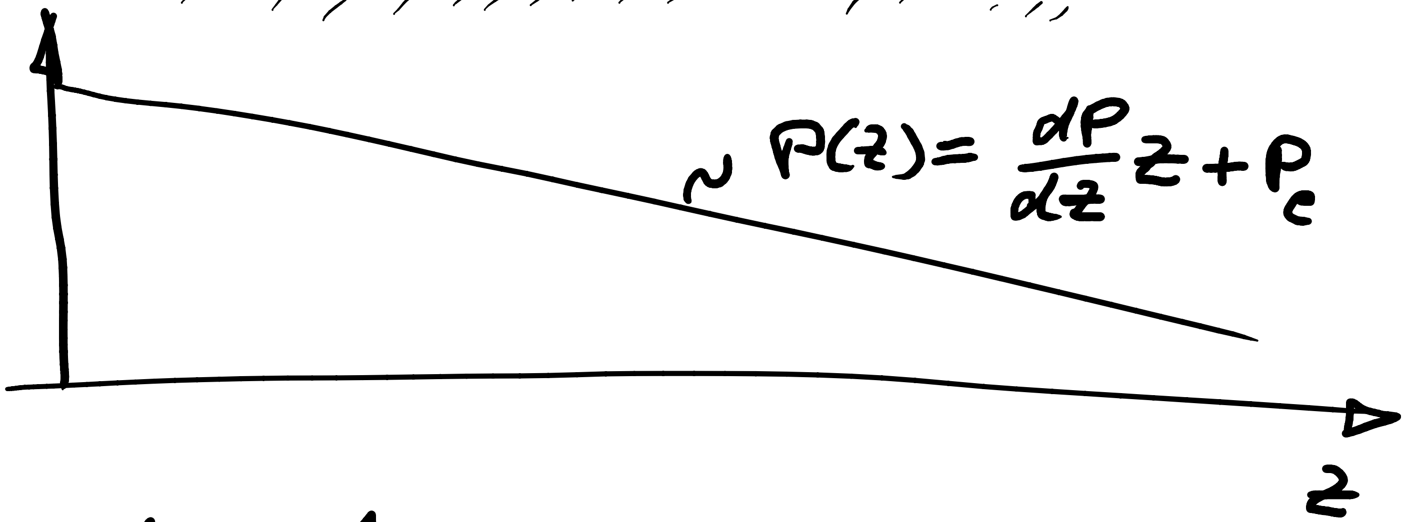
$$L = \frac{Re}{32} d,$$

mit $d = 2R$

Dimensionsanalyse.

= <u>Bridgman Postulat</u> "Absolute Bedeutung relativ Größen"





$$\sim p(z) = \frac{dp}{dz} z + p_c \qquad \frac{dp}{dz} < 0.$$

$$\underbrace{\frac{dp}{dz} = \hat{K} \sin(\Omega t)}$$

Instationär Erreg.

$$\Omega_{crit} = fn(R, \nu)$$

$\ll$ „sehr viel kleiner"

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\Omega_{crit} R^2}{\nu} = const \sim 1$$

$\sim$ von gleicher Ordnung

quasistationäre Strömung

$$\Omega \ll \Omega_{crit} \sim \frac{\nu}{R^2}$$

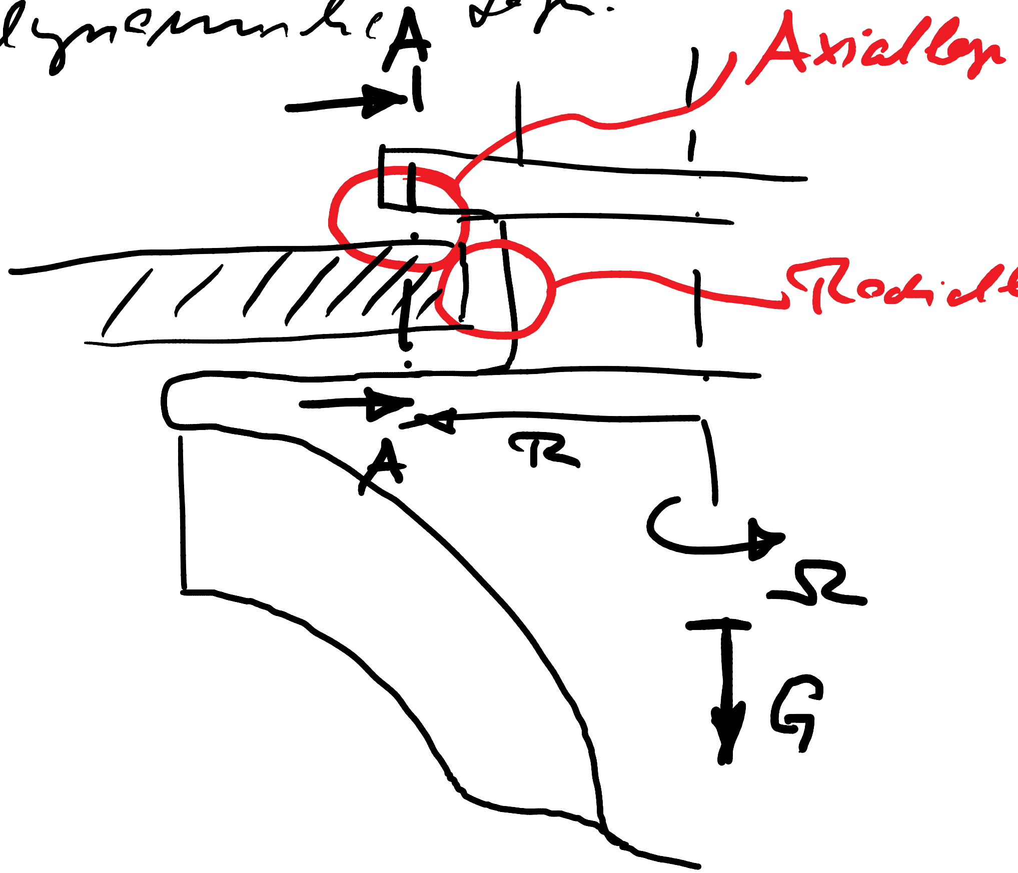
$\frac{R^2}{\nu}$ ist eine Diffusionszeit.

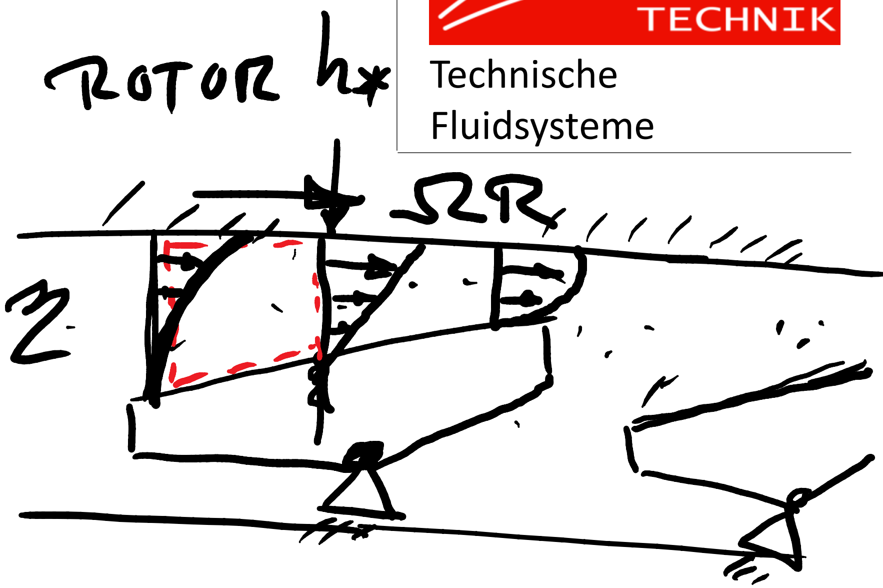
instationär

$$\Omega \sim \Omega_{crit} \sim \frac{\nu}{R^2}$$

Zweites Beispiel

Hydrodynamische Lager.





INERTIALSYS.

$$\dot V = \int \vec u \cdot \vec n \, dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \varrho = \text{const.} \quad : \quad \dot V_e = \dot V_a = \frac{1}{2} h_* \Omega R$$

$$\vec{F}_\mu = -\int \rho \vec{n} \, dS$$