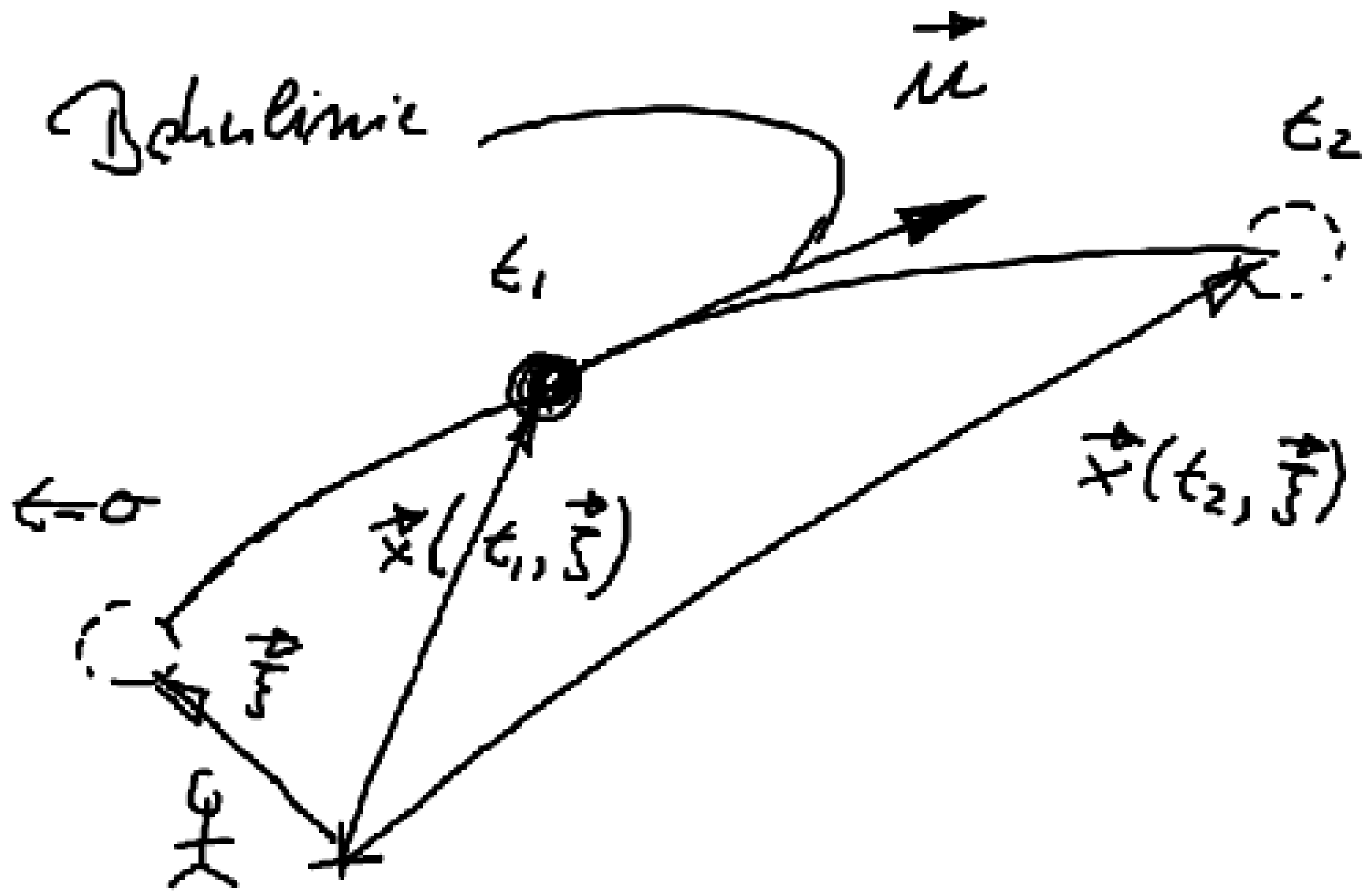
Klausurtermin 2.8.2012



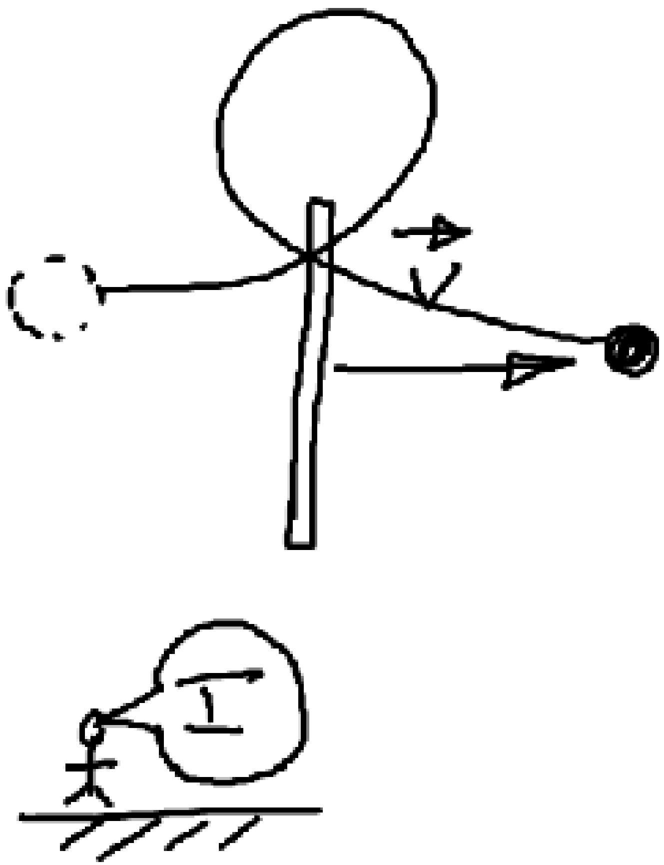
$\vec{\xi}$ ~~ξ~~

materielle Koordinate.

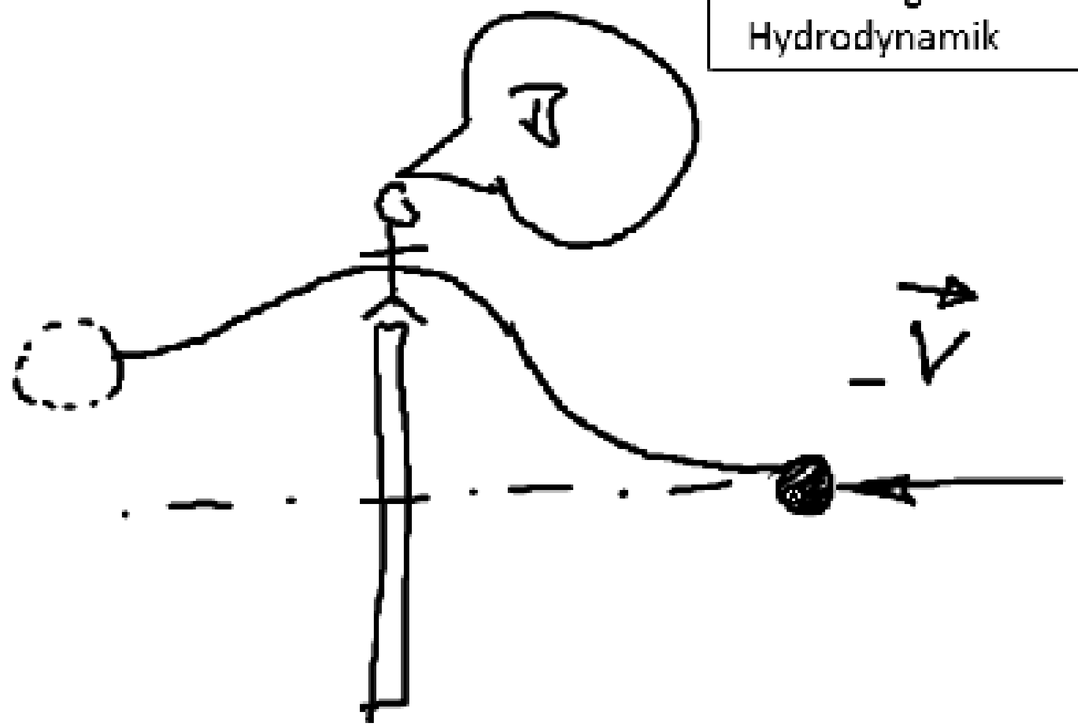
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \; ; \quad \vec{x}(0) = \vec{\xi}.$$

$\vec{u}(\vec{x},t)$ Geschwindigkeitsfeld.

Die Bahnlinien sind unterschiedlich je nach Beobachtung.



Inertialsystem

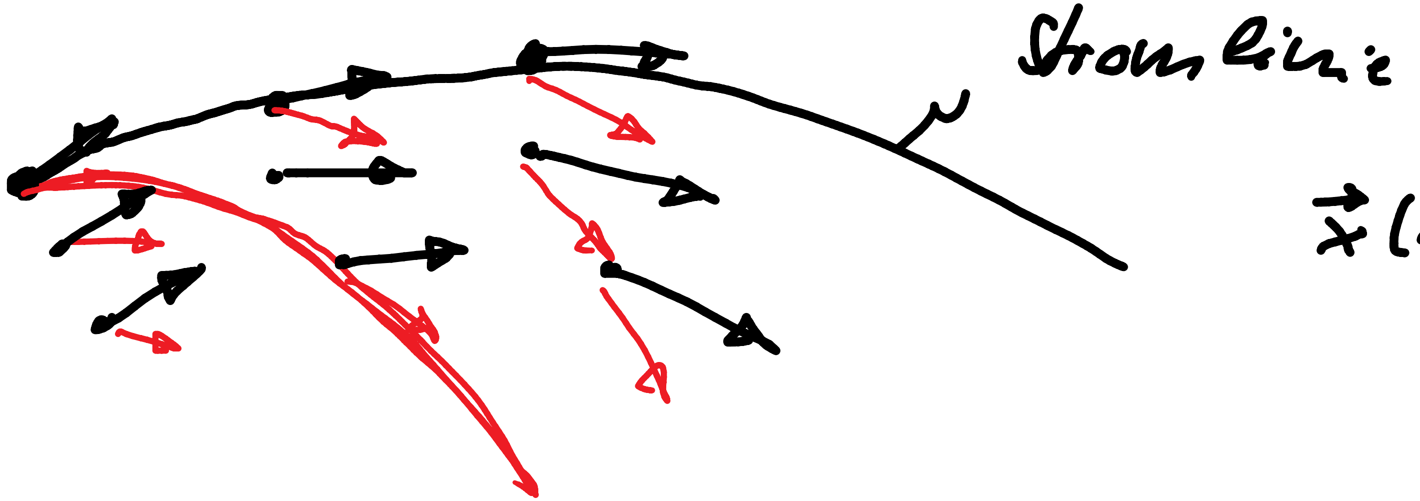


bewegtes System

Die Bahnlinie ist ein historische Entwicklg.

Die Stromlinie ist die Momentaufnahme.

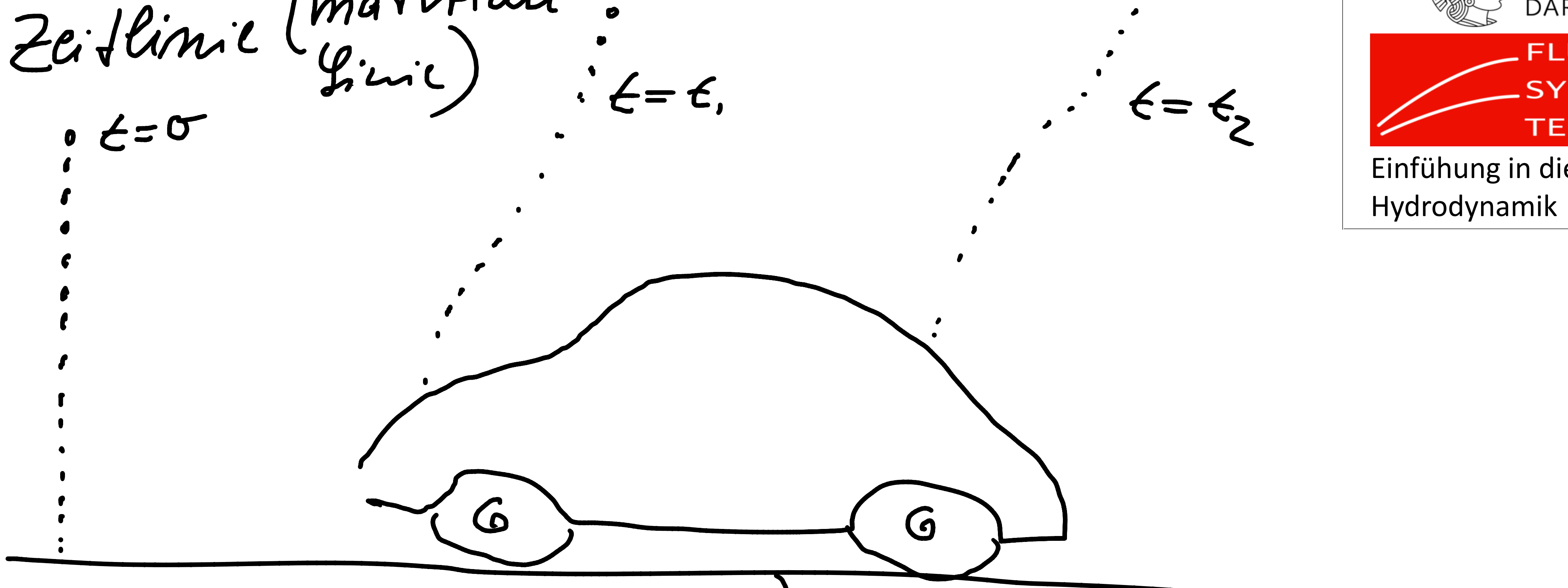
Sie ist die Tangentenlinie an das momentan herrschende Geschwindigkeitsfeld



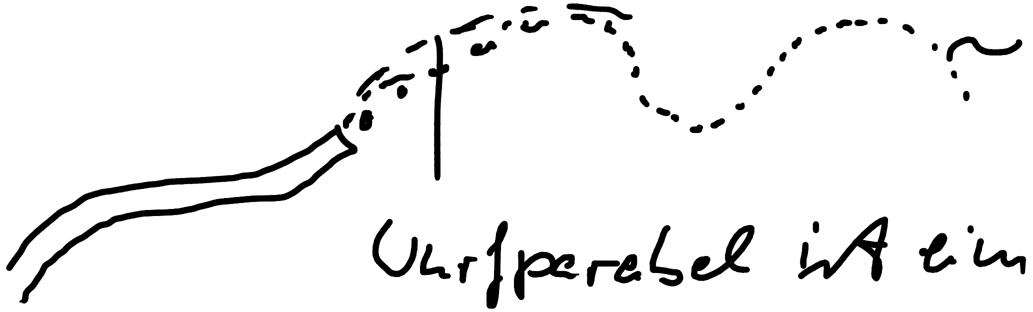
$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{x}(s=0) = \vec{x}_0$$

Zeitlinie (materielle Linie)



Streichlinie (materielle Linie)



Wurfparabel ist ein Bahnlinie

Bei stationären Strömungen sind Bahnlinie und Stromlinie nicht zu unterscheiden. (Genauer Richtungsstationär)

Hydrostatik

$\vec{u} \equiv 0$ Die Relativgeschwindigkeit zwischen Flüssigkeitsteilchen ist Null

↳ Die Reibungsspannungen

$\underset{\sim}{P} \equiv 0. \quad \underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I}$

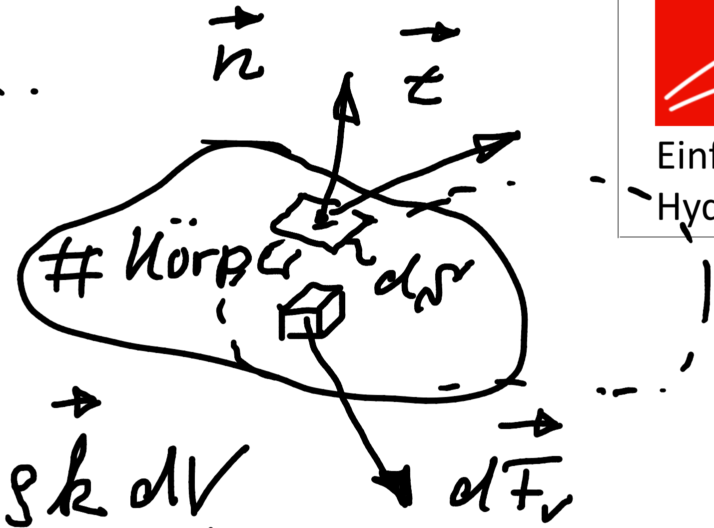
$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Einfühung in die Hydrodynamik

Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu einer Gleichgewichtsbeziehung.



Impulssatz: $\sum \vec F_i = 0$

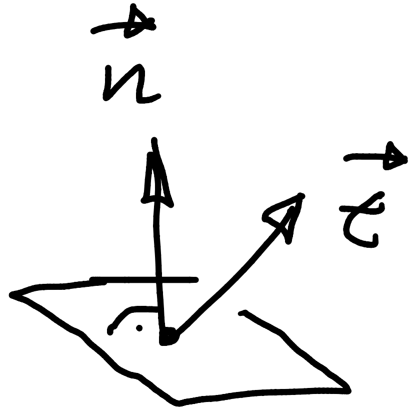
$$\frac{D\vec I}{Dt} = \vec F = \oint_S \underbrace{\vec t\, dS}_{d\vec F_S} + \int_V \underbrace{\rho \vec k\, dV}_{d\vec F_V}$$

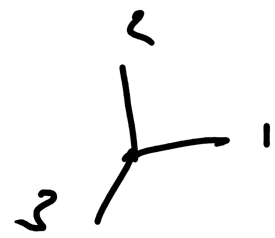
Die zeitliche Änderung des Impulses $\vec I$ ist gleich der Kraft auf den Körper

$0 = \vec F$ Hydrostatik.

Unterscheidung nach

1. Oberflächenkräfte

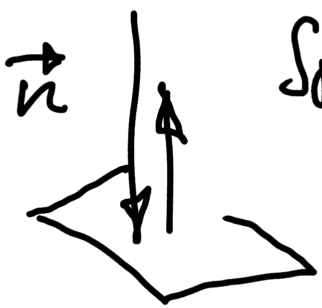




$$d\vec F_S = \vec t \, dS$$

$\vec t$ Spannungsvektor.

$$\vec t = -p\vec n \qquad \vec t = \vec n \cdot \underset{\sim}{T} \qquad t_i = n_j \tau_{ij} = n_1 \tau_{i1} + n_2 \tau_{i2} + n_3 \tau_{i3}$$



Spezialfall Hydrostatik:

$$\underset{\sim}{T} = -p \underset{\sim}{I} \Rightarrow \vec t = -p\vec n$$

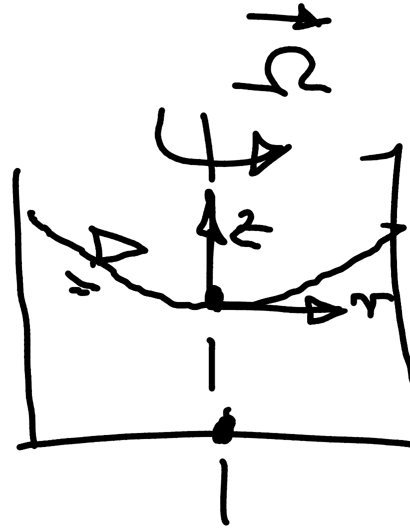
$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad t_i = n_j(-p)\delta_{ij} = -pn_i$$

2. Volumenkraft

$$d\vec{F}_V = \varrho \vec{k}\, dV$$

$$\vec{k} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} \qquad \text{Massenkraft.}$$

$$\varrho \vec{k} = \vec{f} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Volumen}} \qquad \text{Volumenkraft}$$



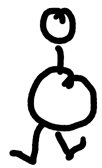
Beispiel: Zentrifugalkraft $\vec{k} = \underbrace{r\Omega^2 \vec{e}_r}_{\text{Zentrifugal}} - \underbrace{g\vec{e}_z}$ Massenkraft der Schwere.

$\vec{k} = -g\,\vec{e}_z$ Massenkraft der Schwere.

(Sprachlich nicht sauber von Erdbeschleunigung zu sprechen)

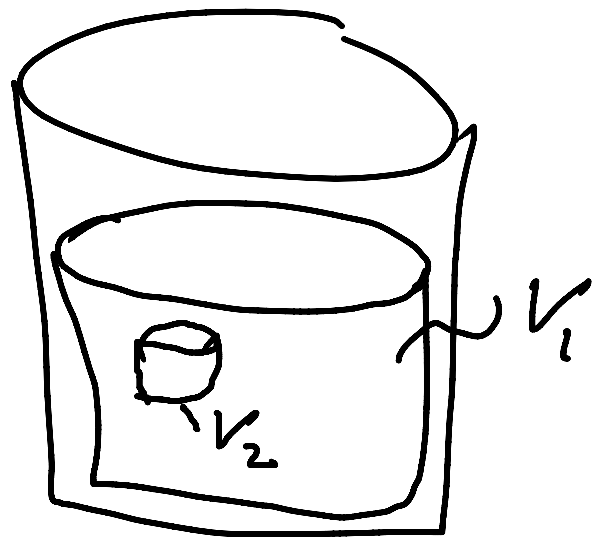
Hydrostatik

$$\int_V \vec{f}\, dV + \oint_S -p\vec{n}\, dS = 0$$



Gauß

$$\int_V \vec{f}\, dV + \int_V -\nabla p\, dV = 0$$



$$\int_V \vec{f} - \nabla p\, dV = 0$$

Gleichung muß gelten für beliebige Volumen → Integrand muß Null sein.

$$\boxed{\vec{f} = \rho \vec{k} = \nabla p}$$

$$\boxed{f_i = \rho k_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad i = 1,2,3}$$

hydrostatische Grundgleichung.

Der Druckgradient ist mit der Volumenkraft im Gleichgewicht

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$ Kartesische Koordinat.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$ Zylinderkoordi..

$\nabla = \ldots$ Kugelkoordinaten

$\nabla \times$

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$

Spurk: Strömungslehre

Anhang.

Frage: Ist die hydrostatische Grundgleichung immer erfüllbar?

$$\nabla p = \vec{f} \quad \Big| \; \nabla \times$$

$$\underbrace{\nabla \times \nabla p}_{\vec{0}} = \nabla \times \vec{f}$$

$$= \nabla \times \vec{f}$$

Notwendige Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht: Die Volumenkraft ist rotationsfrei.

Wenn vektorielle Größe rotationsfrei ist, dann kann sie als Gradient einer skalaren Funktion (Potential) gebildet werden.

$$\nabla \times \vec{f} = \vec{0} \rightsquigarrow \vec{f} = -\nabla \Psi$$

Ψ ist das Potential der Volumenkraft.

↳ Einsetzen in die hydrodynamische Grundgleich.

$$\nabla p = \vec{f} = -\nabla \psi$$

$$p = -\psi + p_*$$

p_* Piezometrischer Druck

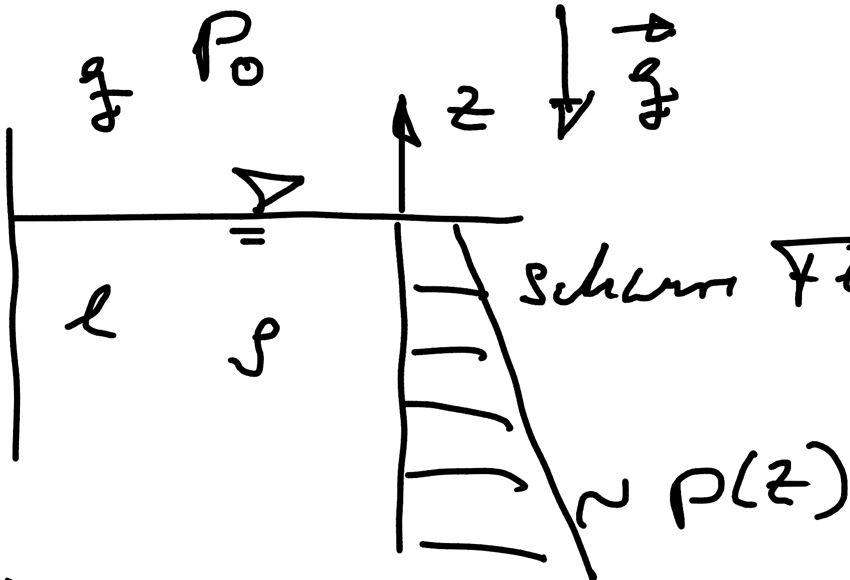
p statischer Druck

ψ Potential.

Beispiele:

Massenkraft der Schwere $\vec{f} = \rho \vec{k} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z$

p_0 Umgebungsdruck



$$\psi = \rho g z$$

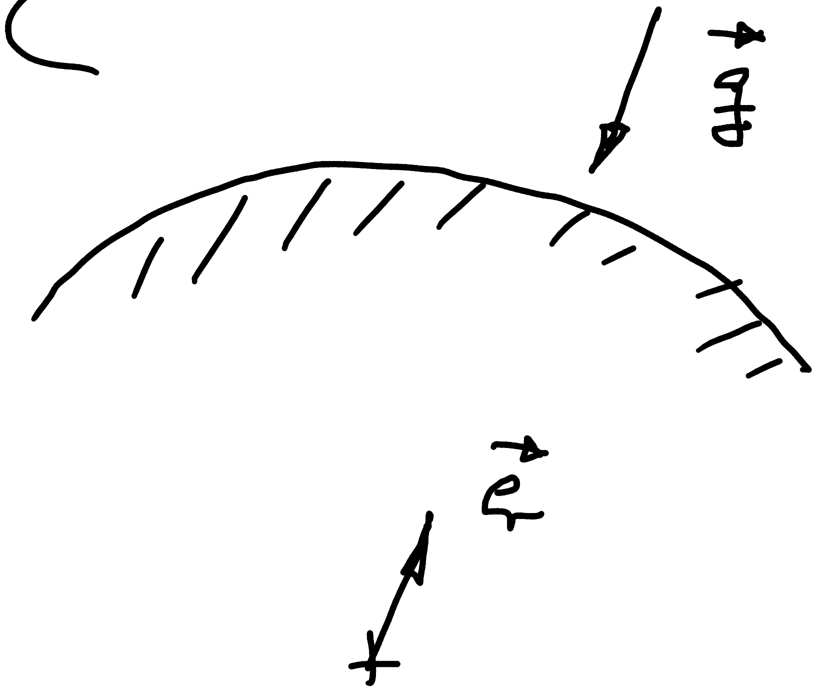
$$p + \rho g z = p_* = p_0$$

Integration bei bekannten Materialgesetz $\rho(p,T)$

$$\left\{ \frac{dp}{dr}\vec{e}_r = \nabla p = \vec{f} = \rho\,\vec{g}(r) = \rho\, g(r)\,\vec{e}_r \right.$$

$\rho(p,T)$

$p = \rho R T$ Materialgesetz für ein thermisch ideales Gas



↳ Druckverteilung in der Atmosphäre

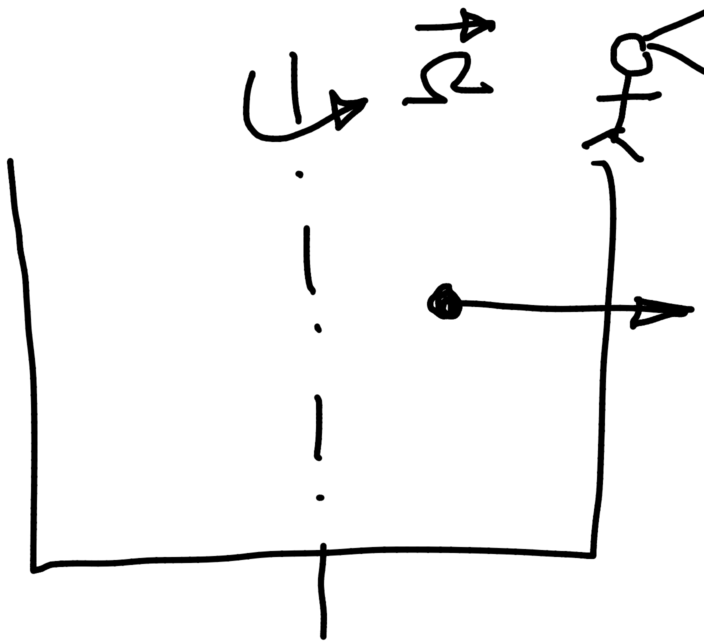
$T = \text{const} \rightarrow p \sim \rho$

$p = C\rho^{n}$ polytrope Zustandsänderung

vgl. Becker Strömungslehre

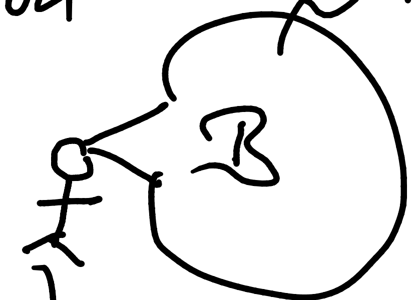
Zentrifugalkraft

Scheinkraft infolge Rotation

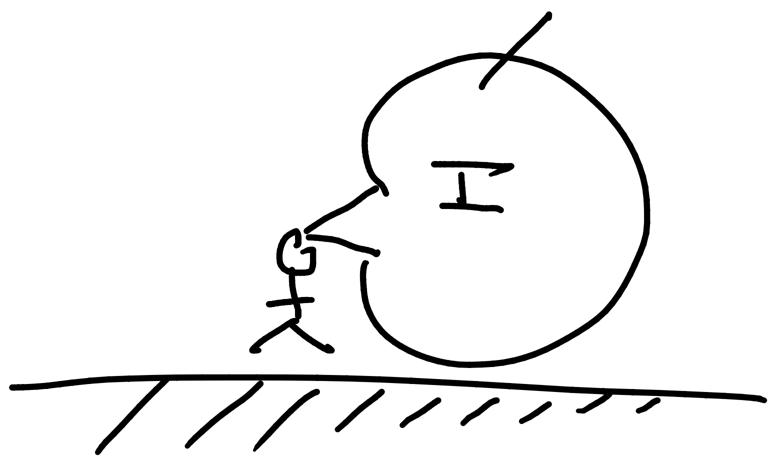


$$\vec{f} = \rho r \Omega^2 \vec{e}_r$$

kein Bewg.



kein Hydrost.

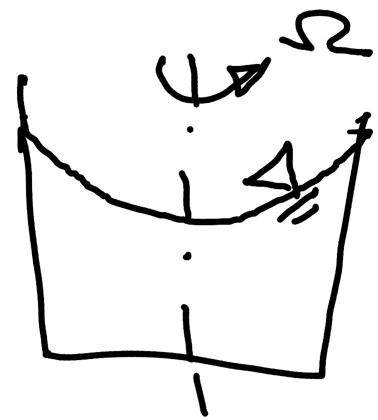


Potential der Zentrifugalkraft

$$\psi = -\frac{\rho}{2}(r\Omega)^2$$

✗ Potentiale können addiert werden (Superposition, da lineare Gleichung)

Zentrifugalkraft + Schwere



$$p + \frac{\rho}{2}(\Omega r)^2 + \rho g z = p_*$$

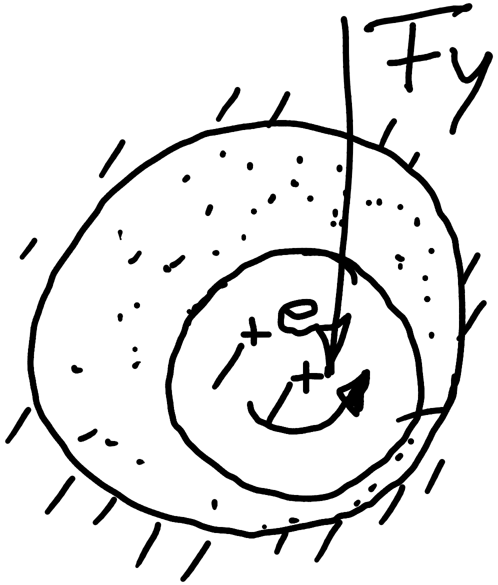
Für die freie Oberfläche $p = p_0 = p_*$

$\cancel{r(z)}$

$$z(r) = \frac{1}{2}(\Omega r)^2 \frac{1}{g}.$$

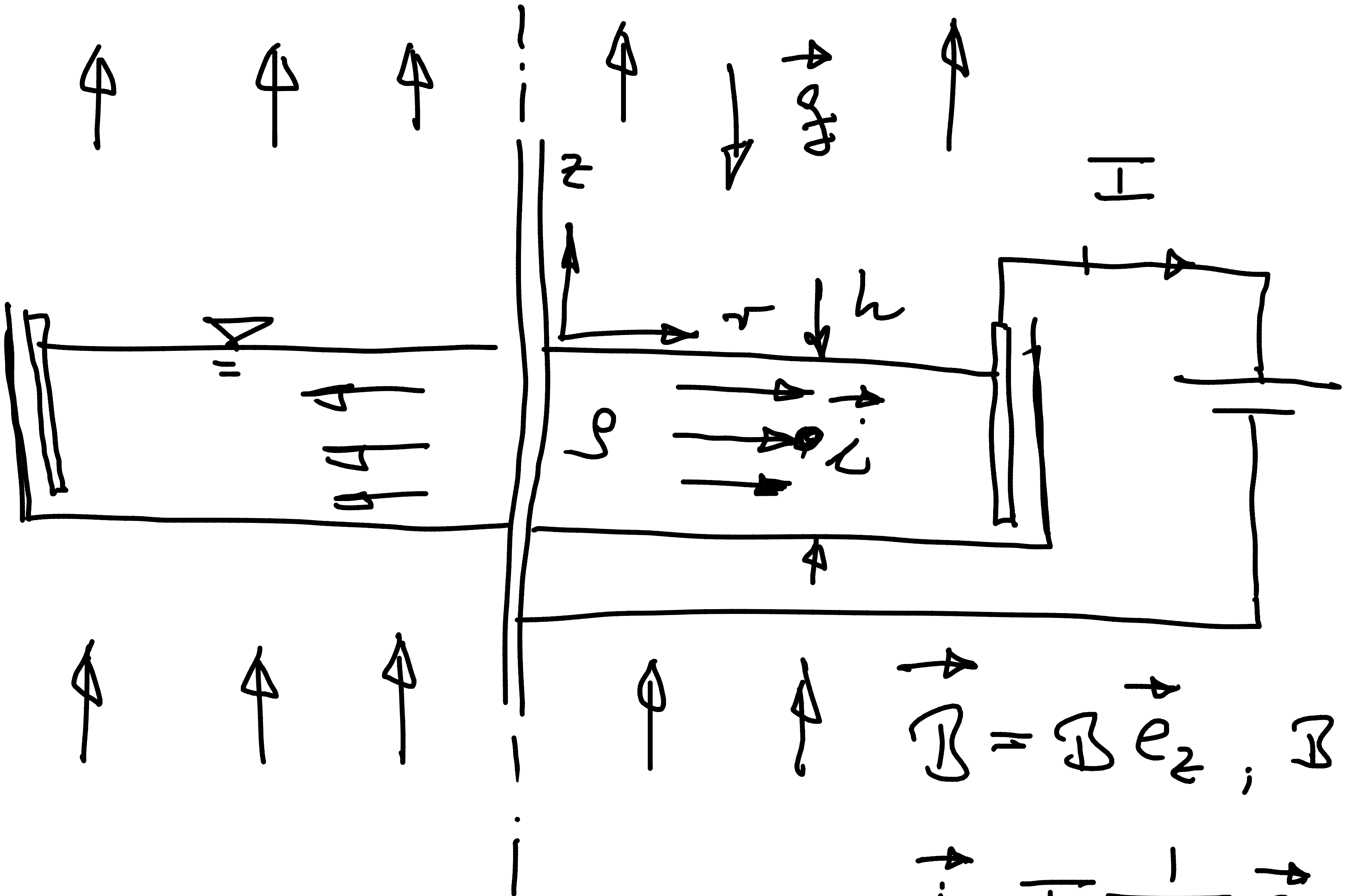
Hydrostatisches Gleichgewicht stellt sich nur ein, wenn das Potential eindeutig ist:

Arnold Sommerfeld



Mechanik der deformierbaren Medien

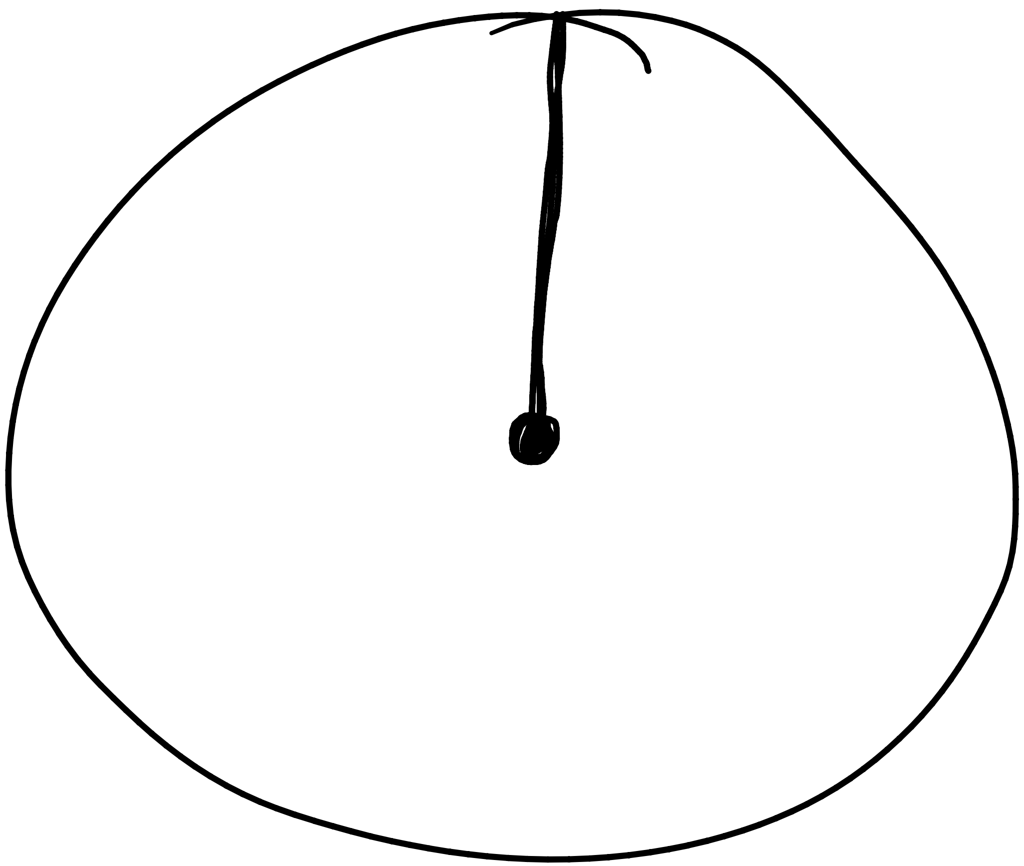
$$So = \frac{F_y}{\mu \Omega D B}\left(\frac{\bar{h}}{D}\right)^2 = fn\left(\frac{e}{\bar{h}}\right)$$



$$\vec{B} = B\,\vec{e}_z\,; \quad B = \text{const.}$$

$$\vec{i} = I\,\frac{1}{2\pi r h}\,\vec{e}_r$$

Lorentzkraft: $\vec{f} = \vec{i} \times \vec{B}$



→ Zuhause nachrechnen.