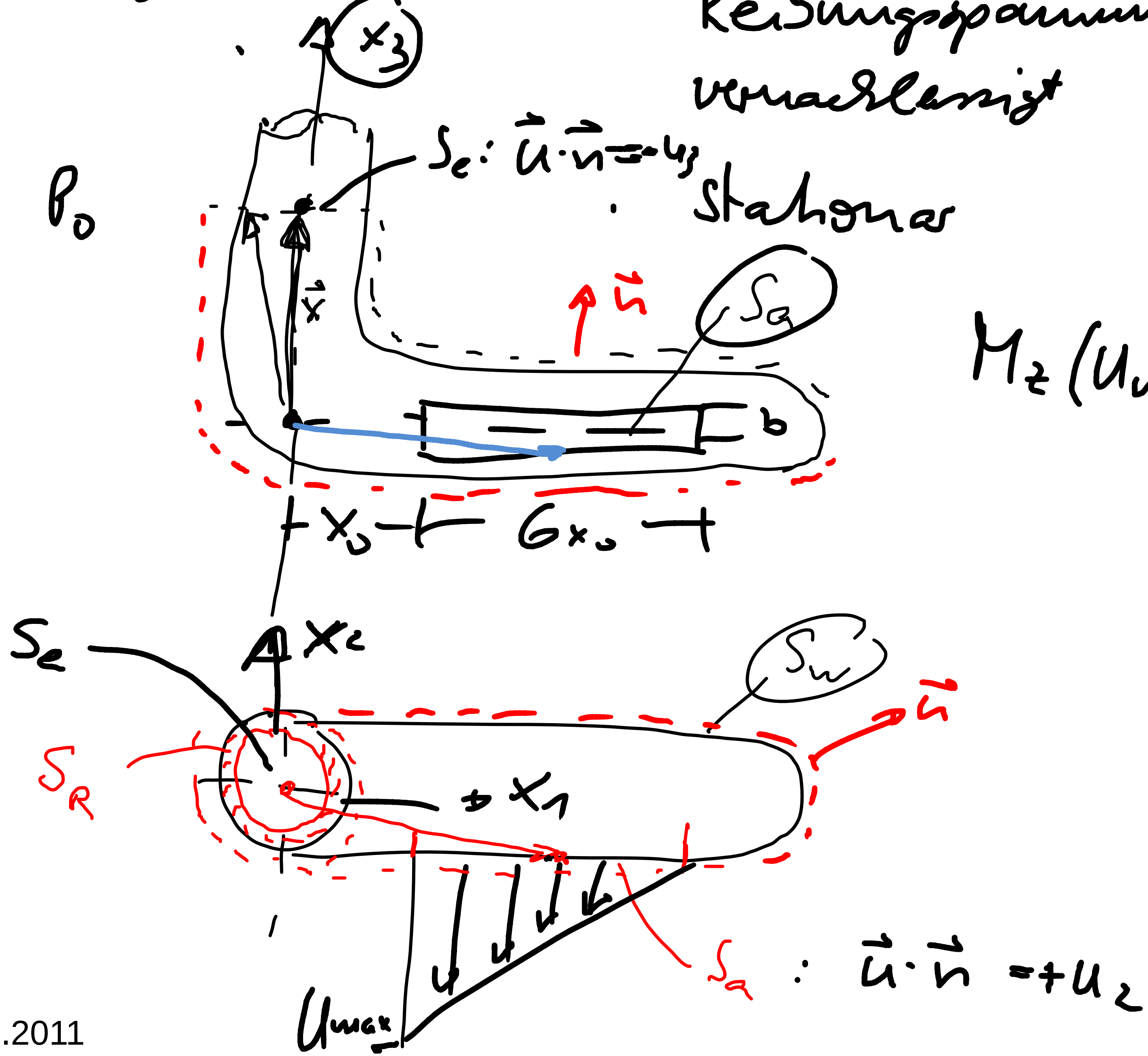
Drallsatz

- Reibungsspannungen vernachlässigt
- stationär

$M_z(U_{max}) = ?$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

$$\oint_S (\vec{x}\times\vec{u})\,\varrho\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \oint_S \vec{x}\times\vec{t}\;dS$$

gefragt: $M = \vec{M}\cdot\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_S \vec{e}_3\,\varrho\,(\vec{x}\times\vec{u})(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS}_{LS} = \underbrace{\oint_S \vec{e}_3\cdot(\vec{x}\times\vec{t})\,dS}_{LS}$$

$$S = S_R + S_e + S_a + S_w$$

S_w: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

S_R: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

Auswerten der Integrale auf der linken Seite (S_e und S_a)

$$\iint_{S_e} \varrho \underbrace{\vec{e}_3 \cdot (\vec{x} \times \vec{u})}(\vec{u} \cdot \vec{n})\, dS$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} &= u_3 \vec{e}_3 \\ \vec{x} &= x \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \vec{x} \times \vec{u} = x \underbrace{\vec{e}_3 \times u_3 \vec{e}_3} = 0$$

S_a:

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ \vec{u} &= -u_2 \vec{e}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{x} \times \vec{u} = x_3 u_2 \vec{e}_1 + x_1 u_2 \vec{e}_3$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

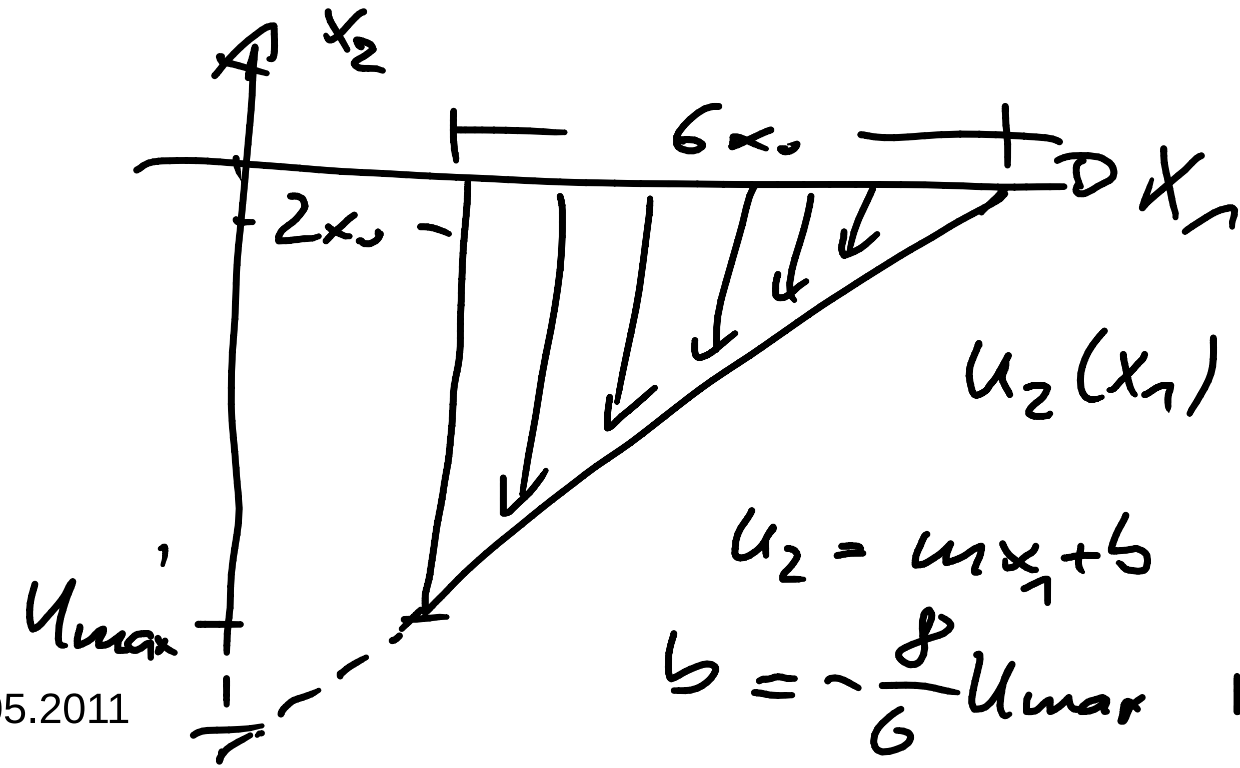
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

$$\vec e_3\cdot(\vec x\times\vec u) = \begin{pmatrix} x_3u_2\\ 0\\ -x_1u_2\end{pmatrix}\cdot\vec e_3 = \underbrace{x_3u_2\,\vec e_1\cdot\vec e_3}_{0} - x_1u_2\underbrace{\vec e_3\cdot\vec e_3}_{1}$$

Sei:

$$\Rightarrow \vec e_3\cdot(\vec x\times\vec u) = -x_1u_2$$



$$u_2(x_1) = \frac{U_{max}}{6x_0}(x_1-8x_0)$$

$$u_2 = m x_1 + b$$

$$b = -\frac{8}{6}U_{max} \qquad m = \frac{U_{max}}{6x_0}$$

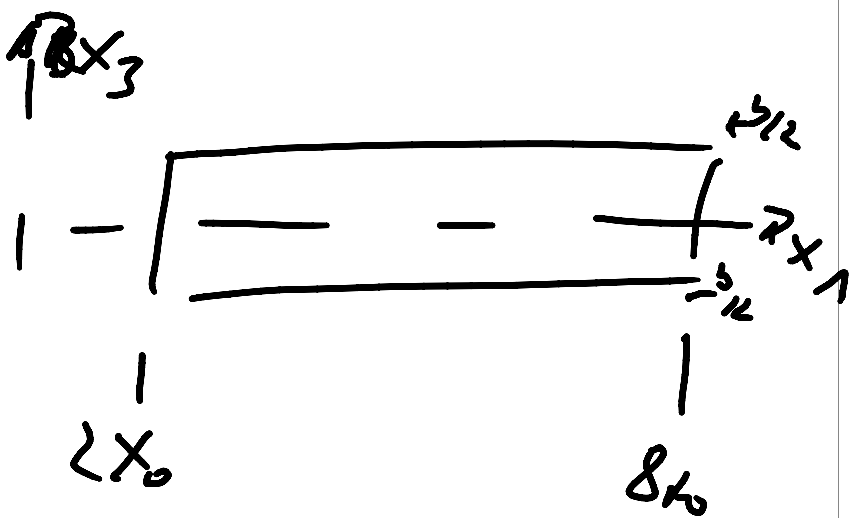
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

$$\iint_{S_a} \rho\, \vec{e}_3 \,(\vec{x}\times\vec{u})(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dS$$

$$= \int_{S_a} \rho\,(\underbrace{-x_1 u_2}_{\vec{x}\times\vec{u}})\underbrace{u_2}_{\vec{u}\cdot\vec{n}}\, dS \qquad dS = dx_1\, dx_3$$



$$= \int_{-b/2}^{b/2}\int_{2x_0}^{8x_0} \rho\,(-x_1 u_2)\, u_2\, dS = -7\rho b\, U_{max}^2\, x_0^2$$

LS.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

$$\oint_S \vec{x} \times \vec{t}\, dS$$

$S_a: \quad \vec{t} = -p\vec{n}$

$S_e: \quad \vec{t} = -p\vec{n}$ $\qquad \vec{x} = x\vec{e}_3$

$$S_w + S_a: \quad \int_{S_w+S_a} \vec{x} \times \vec{t}\, dS = 0$$

Argumentation:

$\Rightarrow S_e ; S_R$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Kreuzprodukt S_e: $\vec{x} \times \vec{t}$

$$\oint \vec{x} \times \vec{t} = \vec{x} \times (-p\vec{n}) \qquad \vec{n} = \vec{e}_3, \quad \vec{x} = x\vec{e}_3$$

$$= \underbrace{x\vec{e}_3 \times (-p\vec{e}_3)}_{=0}$$

S_R: $\iint (\vec{x} \times \vec{t}) \cdot \vec{e}_3 \, dS = M_{\to Fl}$

$M_{\to Fl} = -M_{\to Rohr}$ RS

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$+7\rho b U_{max}^2 x_0^2 = + M_{\to Rohr}$$

LS RS

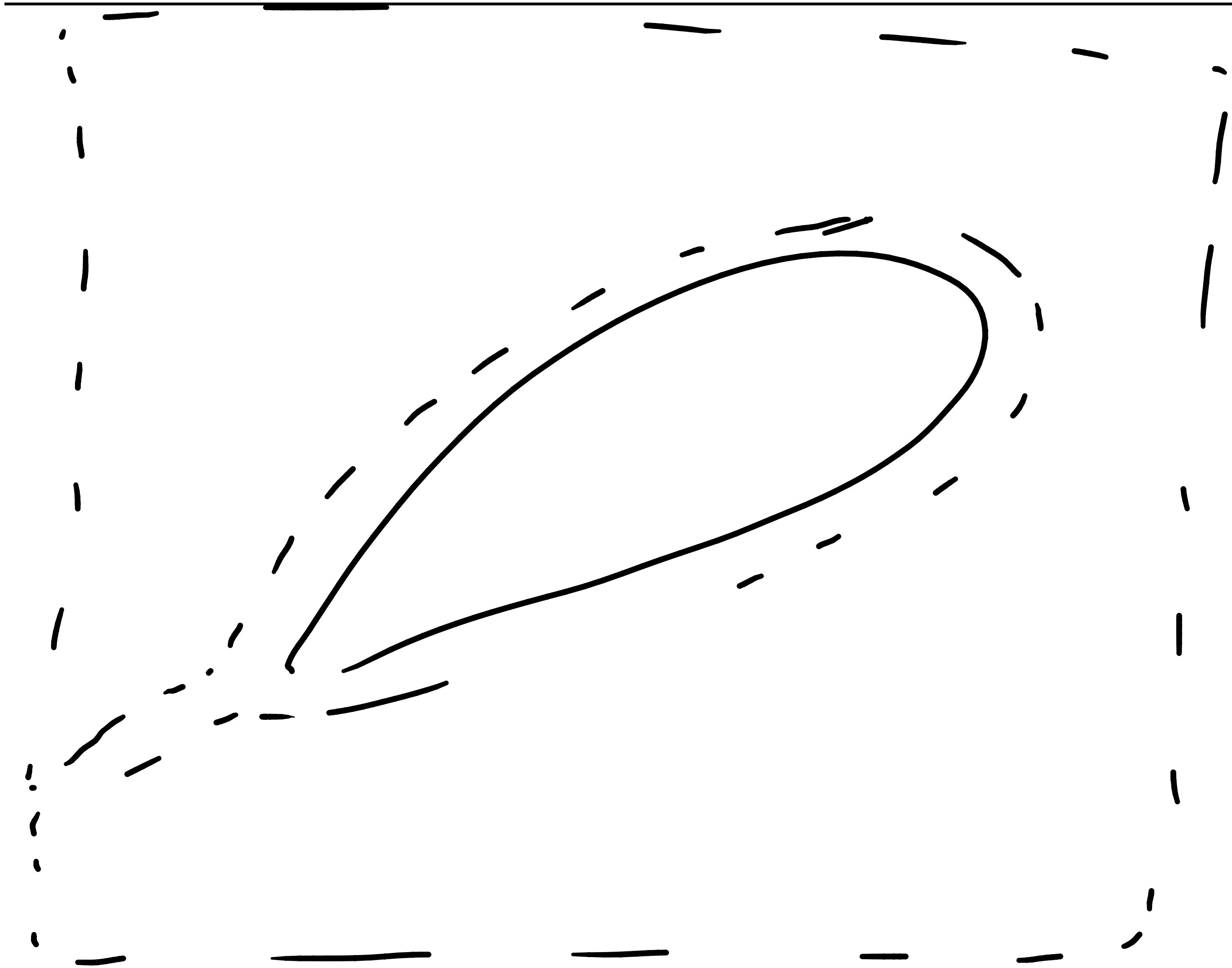
gegeben Q, gesucht ist $U_{max} = f(Q)$

$$Q = \int_{S_a} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \qquad \vec{u} \cdot \vec{n} = u_2$$

$$\Rightarrow Q = b \frac{U_{max}}{6 x_0} \int x_0 - x_1 \, dx_1$$

$$\Rightarrow U_{max} = \frac{Q}{3 b x_0}$$

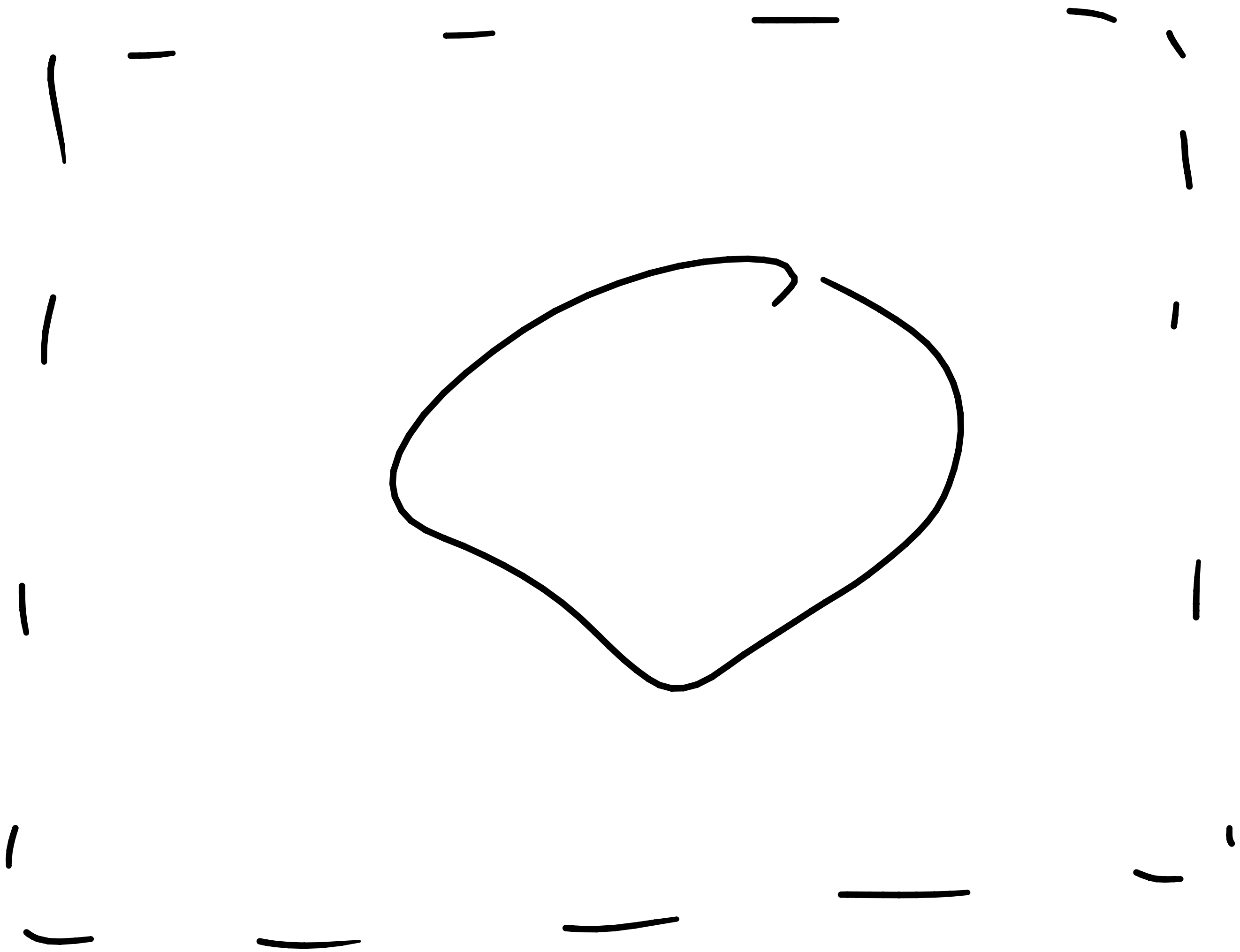
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

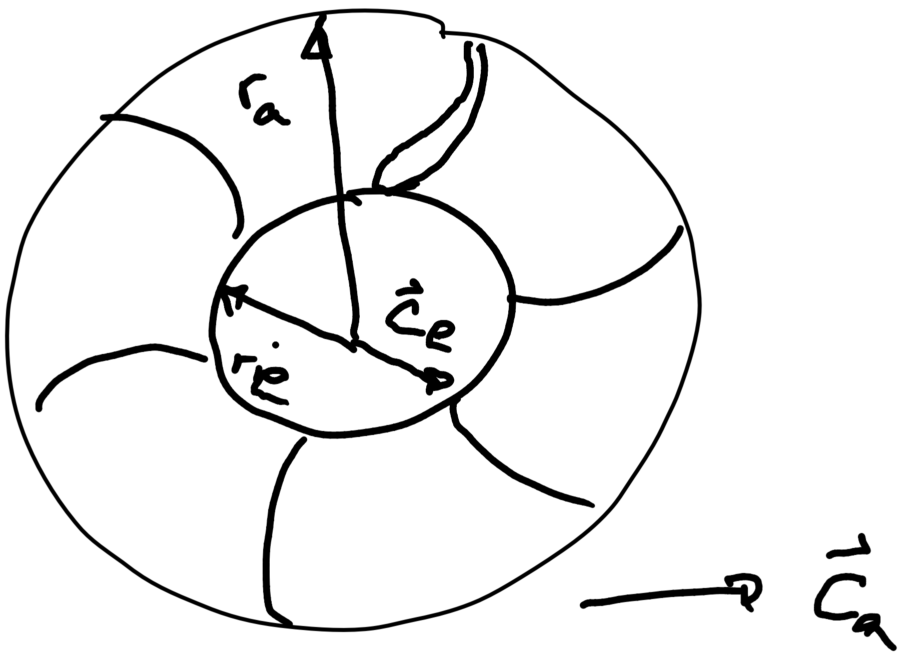
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

Zirkulation um einen Flügel



alles bekannt

gefragt $M = M(\Gamma)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Zirkulation $\Gamma = \oint_C \underline{\vec c} \cdot d\underline{\vec x}$

$u \hat{=} \varphi$

Moment: $M_z = \dot m \left(r_a c_{ua} - r_e c_{ue} \right)$

$\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_a$

$\vec c_e = c_{re} \vec e_r + c_{ue} \vec e_\varphi$

$d\vec x_e = r \, d\varphi \, \vec e_\varphi$

$\Gamma: \oint_C \underline{\vec c}_e \cdot d\underline{\vec x}_e = \int_0^{2\pi} \left(c_{re} \vec e_r + c_{ue} \vec e_\varphi \right) \cdot \left(r \, d\varphi \, \vec e_\varphi \right)$

(underbraces: $\vec e_\varphi \cdot \vec e_\varphi = 1$, $\vec e_r \cdot \vec e_\varphi = 0$)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6

$$\Rightarrow 2\pi r_e c_{ue} = \Gamma_e \Rightarrow r_e c_{ue} = \frac{\Gamma_e}{2\pi}$$

analog am Auslass

$$\vec{c}_a = c_{ra}\vec{e}_r + c_{ua}\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{x} = r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow 2\pi r_a c_{ua} = \Gamma_a \Rightarrow r_a c_{ua} = \frac{\Gamma_a}{2\pi}$$

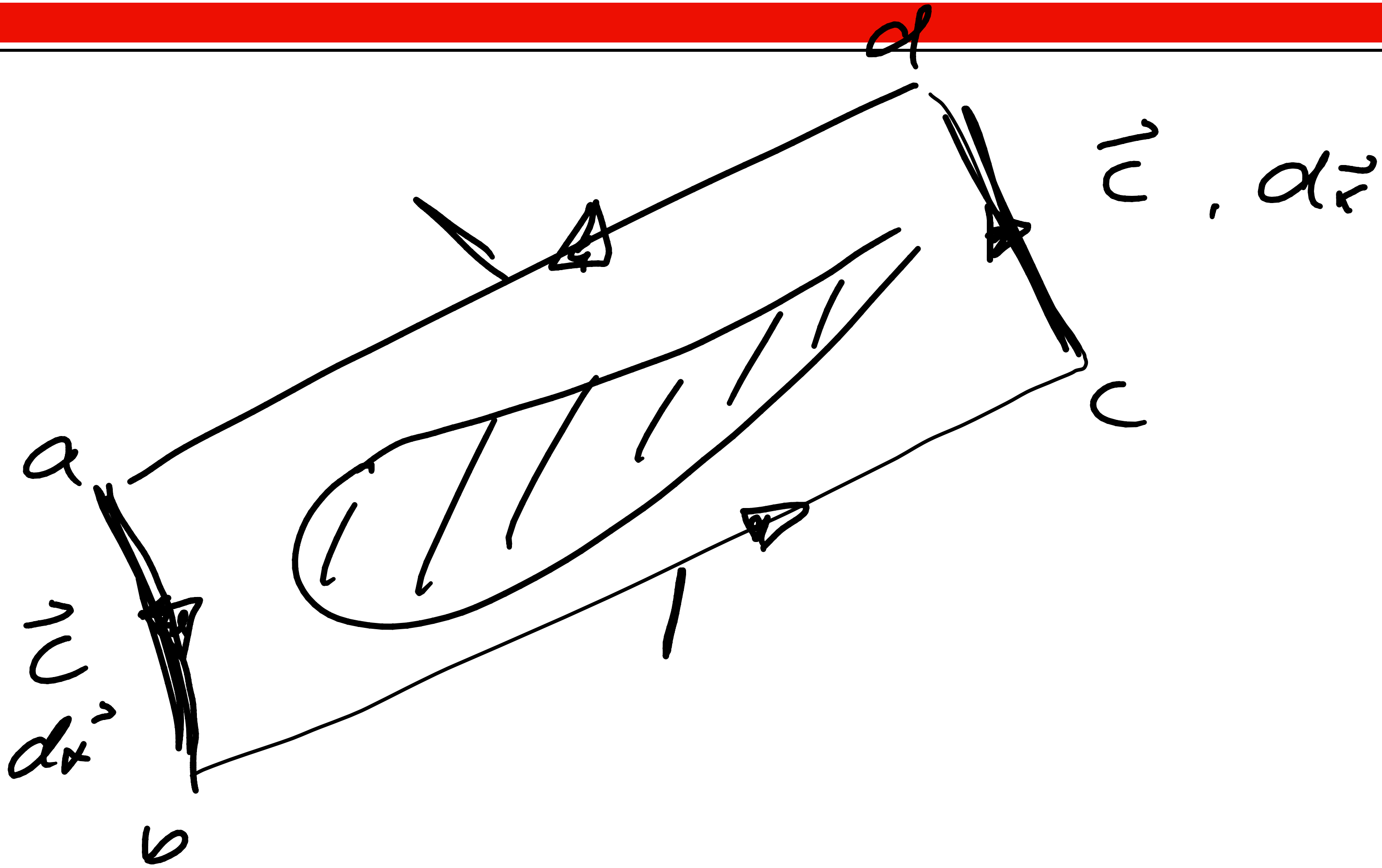
$$M_z = \dot{m}(r_a c_{ua} - r_e c_{ue})$$

$$\Rightarrow M_z = \frac{\dot{m}}{2\pi}(\Gamma_a - \Gamma_e)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6



$$\Gamma_{bc} = -\Gamma_{da}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorrechenübung 6