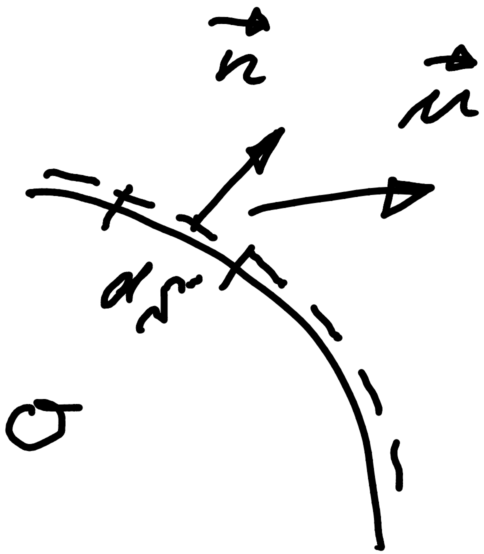
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

<u>Kontigleichung</u>

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$



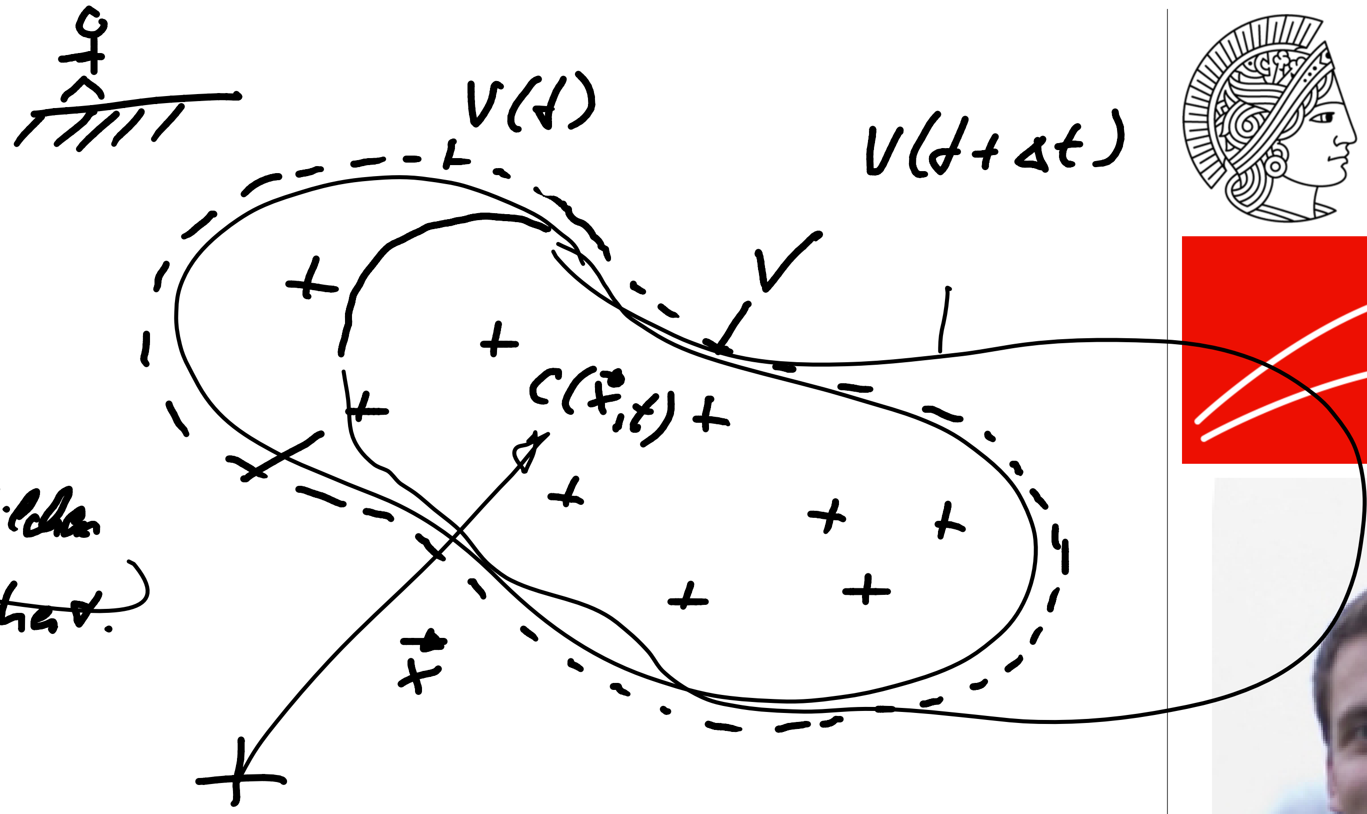
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \, dV}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{\oint_{S} \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS}_{} = 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



Konzentration

$$c = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Volumeneinheit}}$$

Stoffmenge

$$N = \int_{V(t)} c \, dV$$

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} c \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V c \, dV + \oint_{\partial V} c \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dA$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

ϕ steht stellvertretend für

ρ Konti Masse pro Volumen.

c Stoffbilanz

$\frac{\rho}{2}u^2$ kinetische Energie pro Volumen

ρe innere Energie pro Volumen

$\rho\vec{v}$ Impuls pro Volumen

$\rho(\vec{x}\times\vec{v})$ Drall pro Volumen

$\vdots$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

$$\frac{D}{Dt}\Phi = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \phi \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \phi \, dV + \oint_{S} \phi \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS$$

Reynoldsche Transporttheorem.

$\hat{=}$ Satz von Leibniz.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

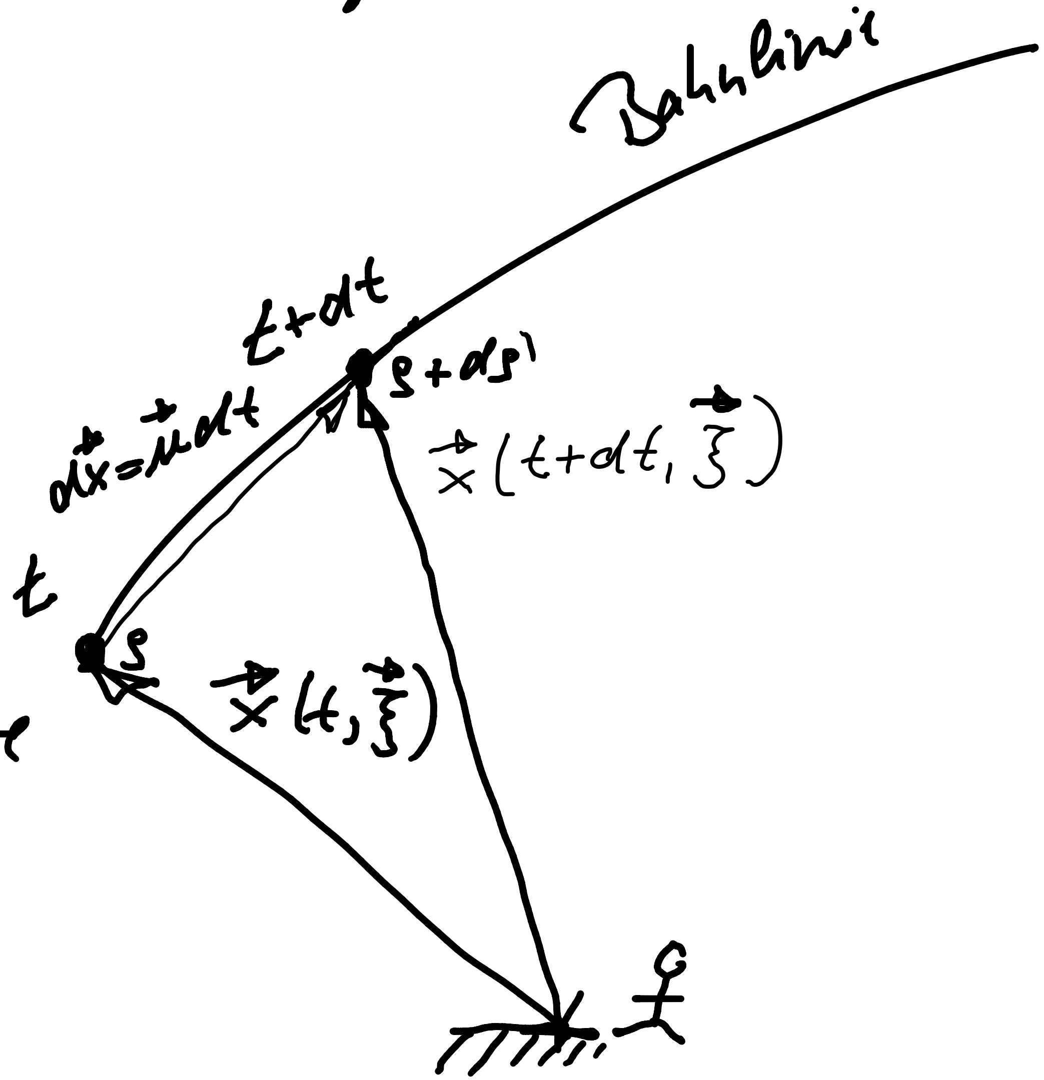
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

Konti-Gleichung in differentieller Form

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\rho}_{\text{konvektive Änderung}}$$

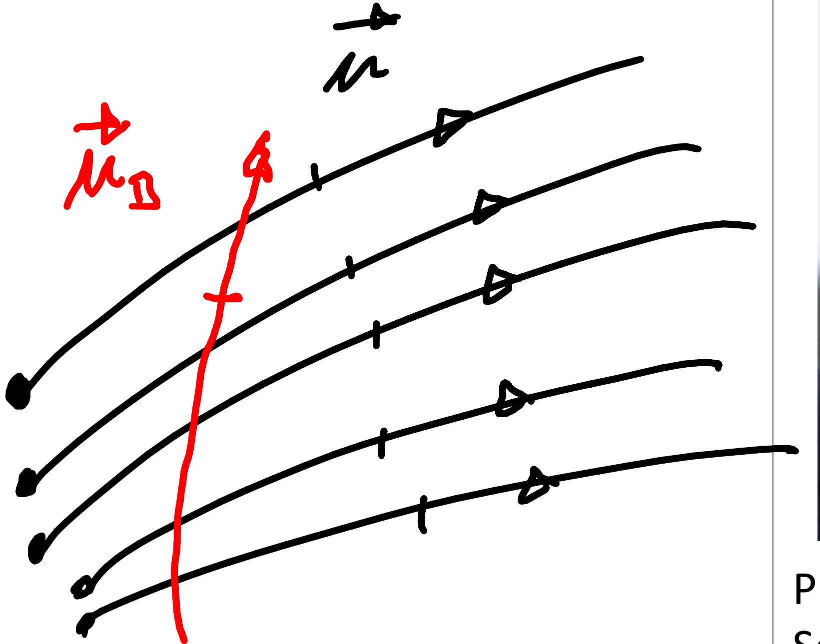


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

$$d\rho = \rho(t+dt, \vec{x}+d\vec{x}) - \rho(t, \vec{x}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} dx_3}_{d\vec{x} \cdot \nabla \rho}$$



$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla \rho$$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$: materielle Zeitableitung $D\rho / Dt$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}_B$: allgemeine Zeitableit.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

materielle Zeitableitung

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi$$

$\vec{u}$ ist die Geschw. des materiellen Teilchens.

allgemeine Zeitableitung

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}_B\cdot\nabla\phi$$

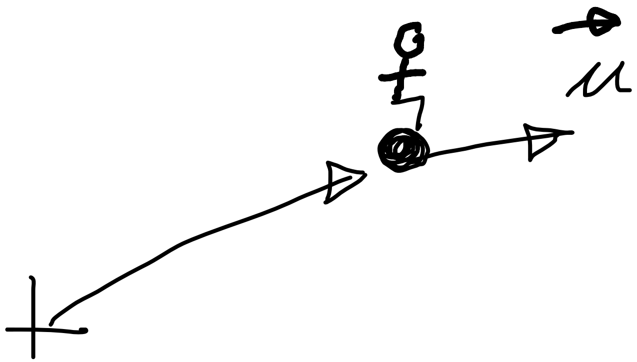
$\vec{u}_B$ Beobachter Geschwindigkeit

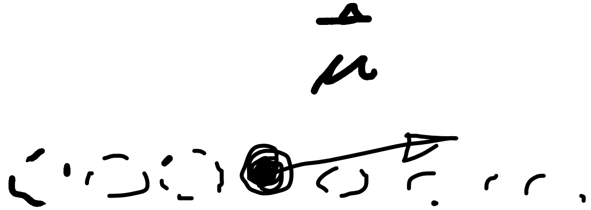
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

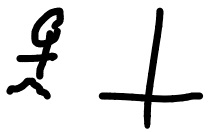
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

Unterschied zur Starrkörpermechanik.







Lagrange-System

Eulersches System

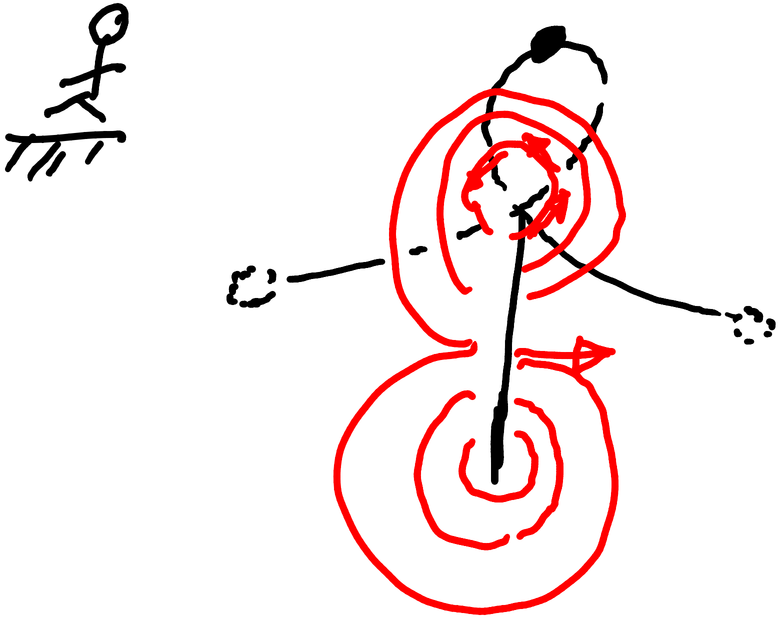
$$\frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

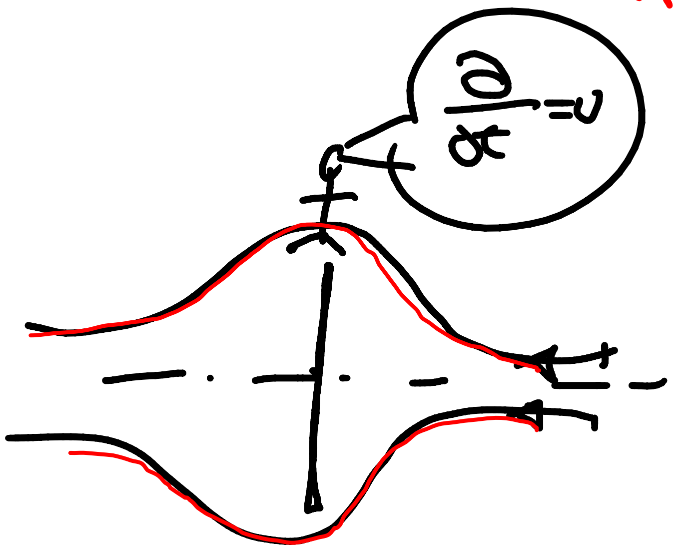
Bahnlinie $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$

$\vec{x}(0) = \vec{\xi}$



Stromlinie $\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{x}(s=0) = \vec{x}_0$.



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Impulssatz → Bernoullische Gleichung

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \psi + \int \frac{\partial u}{\partial t}\, ds = C$$

gilt längs der Stromlinie für Strömung ohne Energieverlust/Zufuhr.

$u = |\vec{u}|$ Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen.

$\frac{u^2}{2}$ kinetische Energie pro Masseneinheit.

$\int \frac{dp}{\rho} = P$ Druckfunktion

C Bernoullische Konstante.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

Bernoullische Konstante ist konstant für

a) reibungsfreie Strömungen $\eta \to 0$

$$Re = \frac{u_\infty L_S}{\eta} \to \infty$$

b) für rotationsfreie Strömung

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 0$$

$\to$ Potentialströmungen.

$$\vec{u} = \nabla \Phi$$

Φ Geschwindigkeitspotential.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

I.d.R. entsteht Rotation in einer Flüssigkeit durch Reibung an benetzten Wänden.

Ausnahme: Entstehung von Rotation durch starke Gradienten in der Dichte.

rot $\vec{u} = 0$ / rot $\vec{u} \neq 0$.

~ Verdichtungsstoß

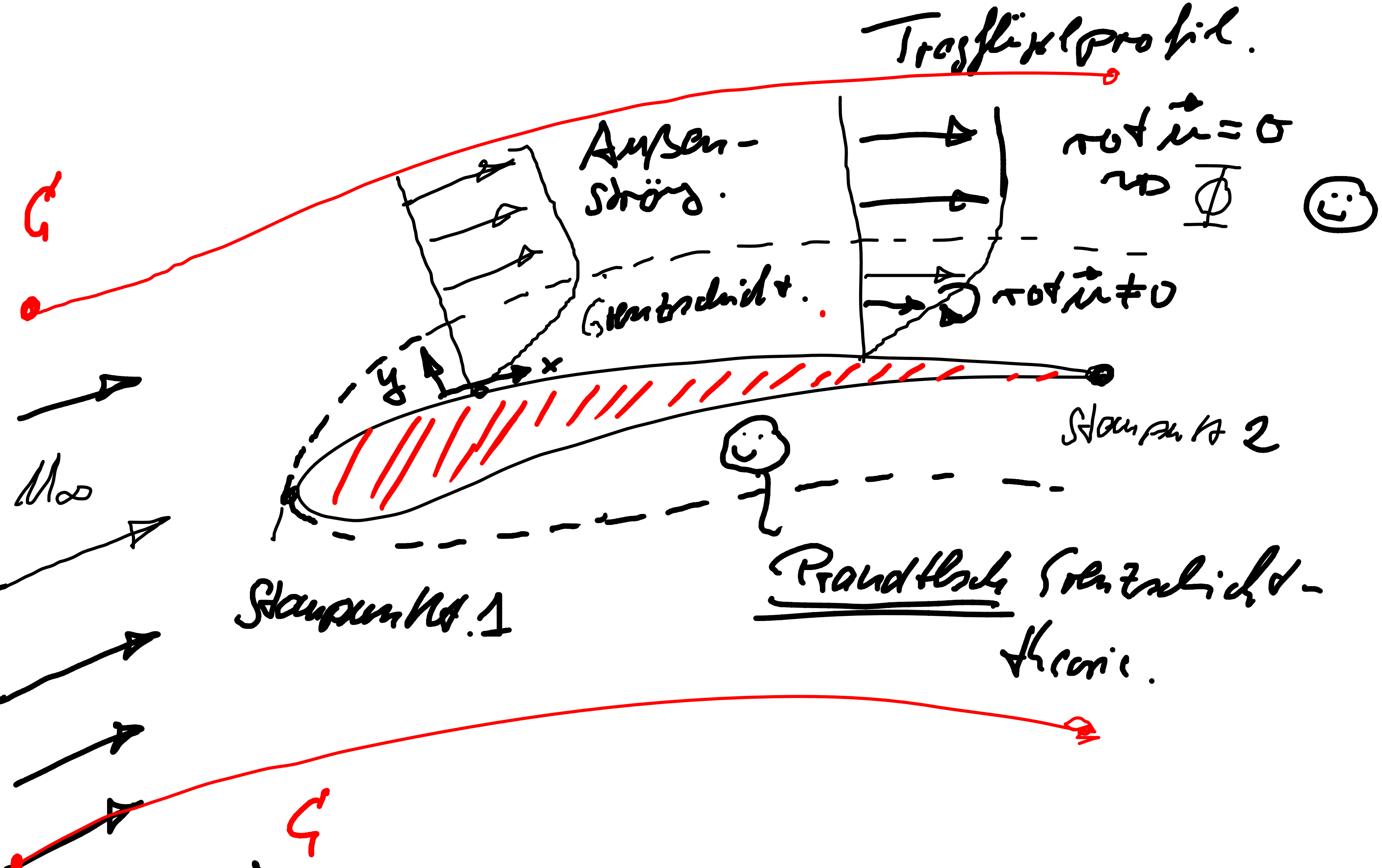
▷ Hyperschallströmung.

▷ Strömung mit Phasenübergang Verdampfung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6



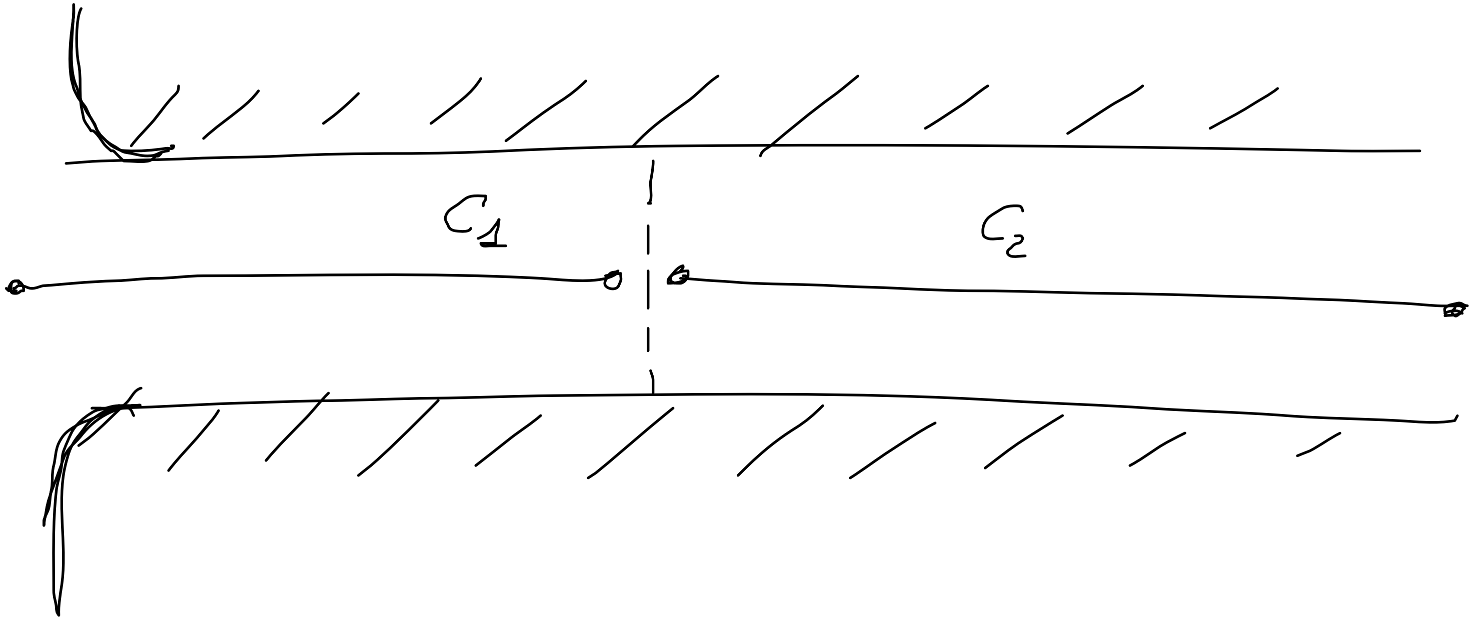
$\mathrm{rot}\,\vec{u} = 2\,\vec{\omega}$

$\vec{\omega}$ Vektor der Drehgeschwindigkeit.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6



$\frac{u^2}{2}$ ✓

G ✓

nicht alle rotationsfreie Strömungen müssen reibungsfrei sein!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

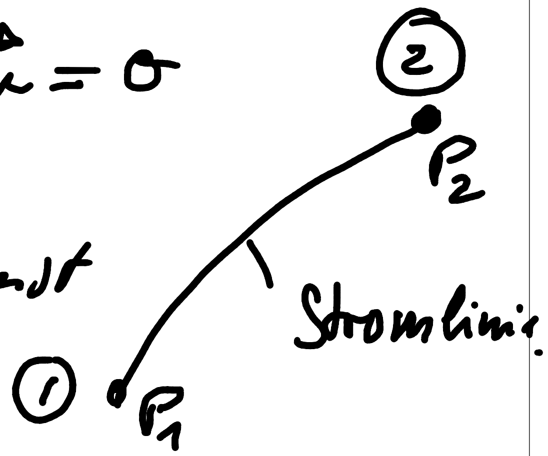
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

$$\int \frac{dp}{\rho} = P \quad \text{Druckfunktion.}$$

1. Spezialfall inkompressible Strömung

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0$$

homogene Dichte $\rho \equiv const$



$$\hookrightarrow \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\int dp = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

2. Spezialfall

barotrope Störungen

!

$$p = p(\rho, s) = p(\rho) = C\rho^{\gamma}$$

Entropie $s = \text{const.}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \text{ für}$$

Zweiatomige Gase.

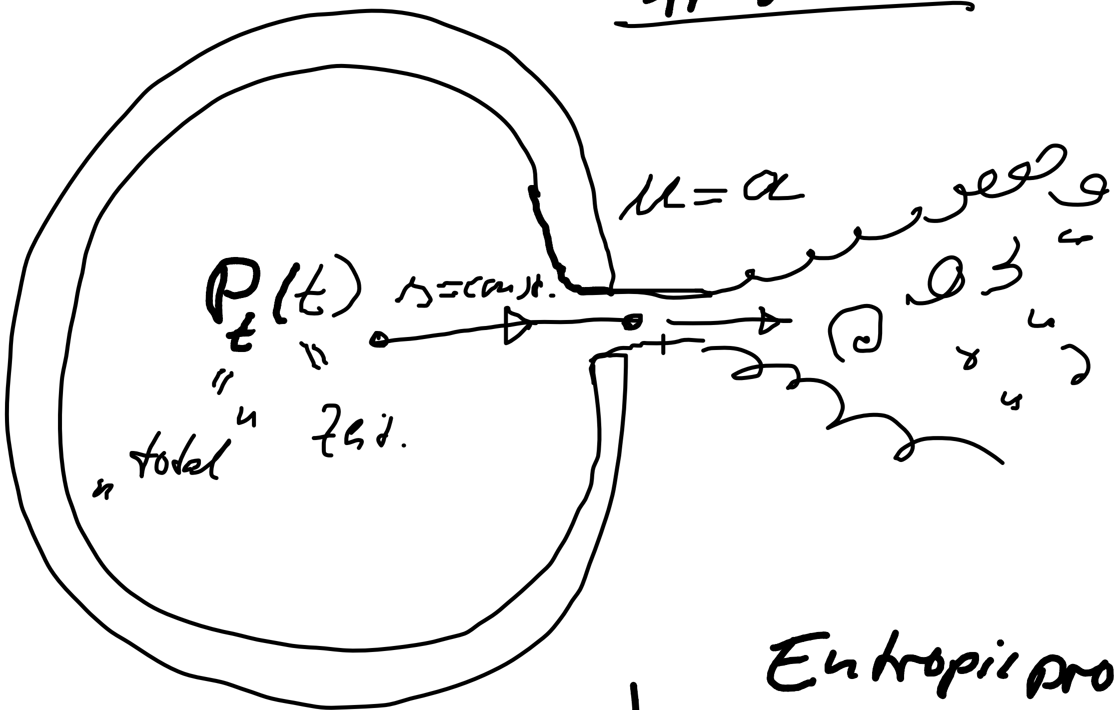
$$p = p(\rho, T) = p(\rho) = RT\rho$$

Temperatur $T = \text{const.}$

R Gaskonstant.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

turbulenter Freistrahl



$\left| s = \text{const} \right|$

Entropieproduktion

$\dot{s} > 0$

a Schallgeschwindigkeit.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\int \frac{dp}{\rho}$$

$$p = C \rho^{\gamma}$$

$$p_1 = C \rho_1^{\gamma}$$

$$p_2 = C \rho_2^{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{C \gamma \rho^{\gamma-1} \, d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

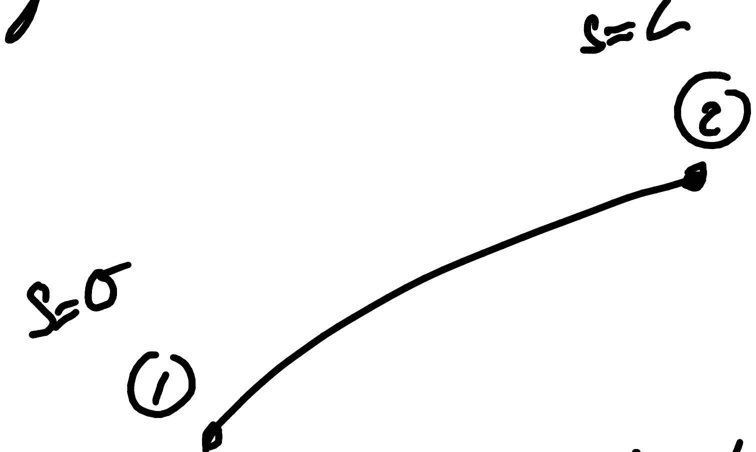
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

Ψ ist das Potential der Volumenkraft

$\Psi = g z$ für das Schwerefeld

$\Psi = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2$ für das Zentrifugalfeld.

$\int \frac{\partial u}{\partial t} \, ds$



Beschleunigung der Flüssigkeitsmasse bei instationärer Strömung.

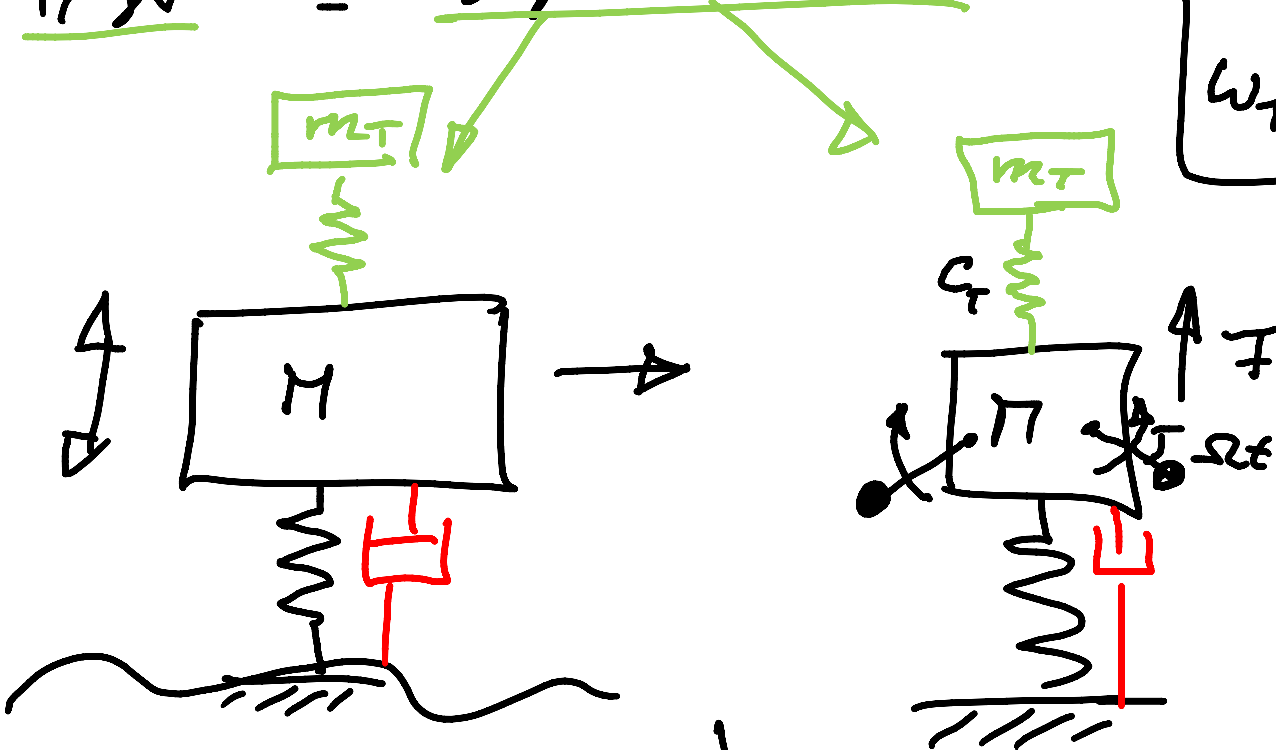
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

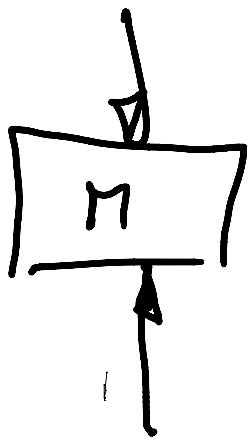
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6

Tilger $\hat{=}$ dynamic Absorber.

$$\boxed{\omega_T = \sqrt{\frac{c_T}{m_T}} \stackrel{!}{=} \Omega}$$



Fußpunkterregung.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 6