▷ Nachtrag zum Thema Stick-Slip und vgl. Artikel

$$\mu_{krit} = \frac{H-R}{\sqrt{mc}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\exp(4\pi D)-1}}}_{f(D)}$$

$$mc \;\hat{=}\; \frac{K^{-1}A^2}{V}$$

$\mu < \mu_{krit}$ Stick Slip

$\mu \geq \mu_{krit}$ gleichförmige Bewegung

$$\boxed{D := \frac{\alpha}{2m\omega}}$$ Dämpfungsgrad.

$$\alpha = 2D\, m\omega$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Allgemeine Dimensionsanalyse.

$$M_{krit} = fn(H-R,\ m,\ \omega,\ D)$$

	$M_{krit}\ \frac{m}{H-R}$	$H-R$ ~~m~~	m	ω	D
L	~~1~~ 0	1			0
M		1	1		0
T	+1	−2		−1	0
	+0				

$$\Pi_1 = \omega M_{krit} \frac{m}{H-R}$$

$$\Pi_2 = D$$

$$\Pi_1 = fn(\Pi_2) \leadsto M_{krit} = \frac{H-R}{m\omega} f(D)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

(+) führt zu einem Ergebnis auch wenn die Gleichungen nicht bekannt sind

Spezielle Form der Dimensionsanalyse

sog. inspektionelle Dimensionsanalyse od. Methode der Differentialgleichungen.

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = \hat{F}\sin(\Omega t) \qquad t := t_+/\omega$$

$$\frac{m}{c}\ddot{x} + \frac{d}{c}\dot{x} + x = \frac{\hat{F}}{c}\sin(\Omega t) \qquad \omega^2 := \frac{c}{m}$$

$$x := x_+ \frac{\hat{F}}{c}$$

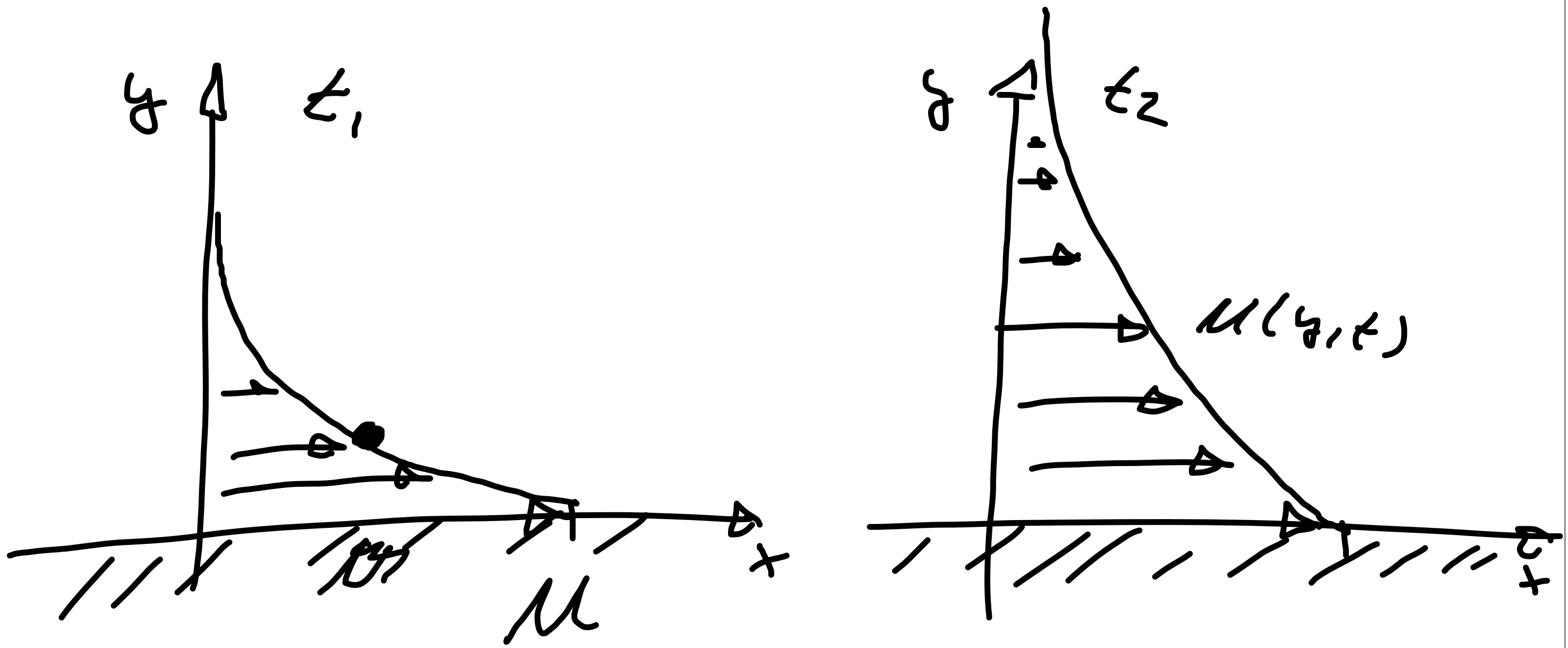
$$\cancel{\omega^2}\,\cancel{\frac{m}{c}}\,\frac{d^2 x_+}{dt_+^2}\,\cancel{\frac{\hat{F}}{c}} + \frac{\omega d}{c}\,\frac{dx_+}{dt_+}\,\cancel{\frac{\hat{F}}{c}} + x_+\,\cancel{\frac{\hat{F}}{c}} =$$

$$= \cancel{\frac{\hat{F}}{c}}\,\sin\left(\frac{\Omega}{\omega}\,t_+\right)$$

$$\Pi_1 = \frac{\Omega}{\omega} = \eta \qquad \Pi_2 = \frac{\omega d}{c} = 2D$$

$$\ddot{x}_+ + 2D\,\dot{x}_+ + x_+ = \sin(\eta\, t_+).$$

Wichtige Methode um auf sogenannte Ähnlichkeitslösungen zu kommen



$$\rho \frac{Du}{Dt} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0}\right) = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \text{mit} \quad u(0) = U \;\text{für}\; t \geq 0$$

$$u(0) = 0 \;\text{für}\; t < 0$$

$$u(\infty) = 0.$$

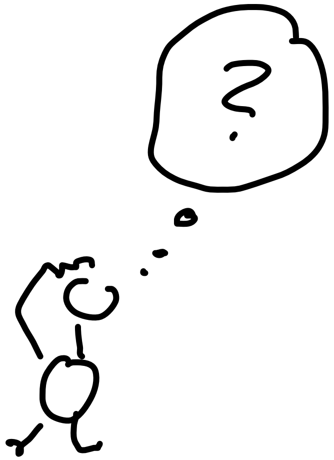
$$u = \text{fn}(U, y, t, \nu)$$

	u	U	y	$\sqrt{t\nu}$	ν
L	1	1	1	1	2
T	-1	-1		0	-1

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

	$\frac{u}{U} = u_+$	U	$\frac{y}{\sqrt{\epsilon \nu}}$	$\sqrt{\epsilon \nu}$	ν
L	0	1	0	1	2
T	0	-1	0	0	-1

$$u_+ = u_+\left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{\epsilon \nu}}}\right)$$



Dimensionslose Produkte

$\rightsquigarrow$ Ähnlichkeitsvariable. $\eta := \frac{y}{\sqrt{\epsilon \nu}}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 14

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\eta := \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{y}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}\,\nu = -\frac{1}{2}\,\eta\,\frac{\cancel{\nu}}{\cancel{\nu} t}$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_+}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} = \underbrace{\frac{d u_+}{d\eta}}_{u_+'}\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_+'\left(-\frac{1}{2}\,\eta\,\frac{1}{t}\right).$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial y} = u_+'\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_+'\frac{1}{\sqrt{\nu t}}$$

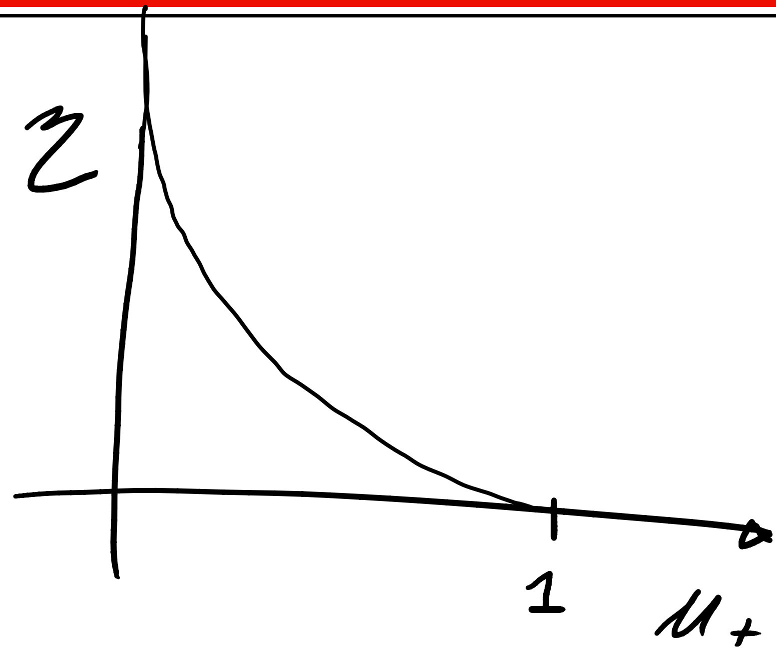
$$\nu\frac{\partial^2 u_+}{\partial y^2} = u_+''\frac{\nu}{\nu t} = u_+''\frac{1}{t}$$

$$\boxed{u_+'' + \frac{1}{2}\,\eta\, u_+' = 0}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

$$u_+(0) = 1$$

$$u_+'(\infty) = 0$$



$$\boxed{u_+(\eta) = \cancel{1}\,\mathrm{erfc}(\eta)}$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2\nu t}}$$

<u>Wichtiger Hinweis</u>

Ähnlichkeitslösungen treten nur dann auf, wenn in dem Problem keine Länge auftaucht.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

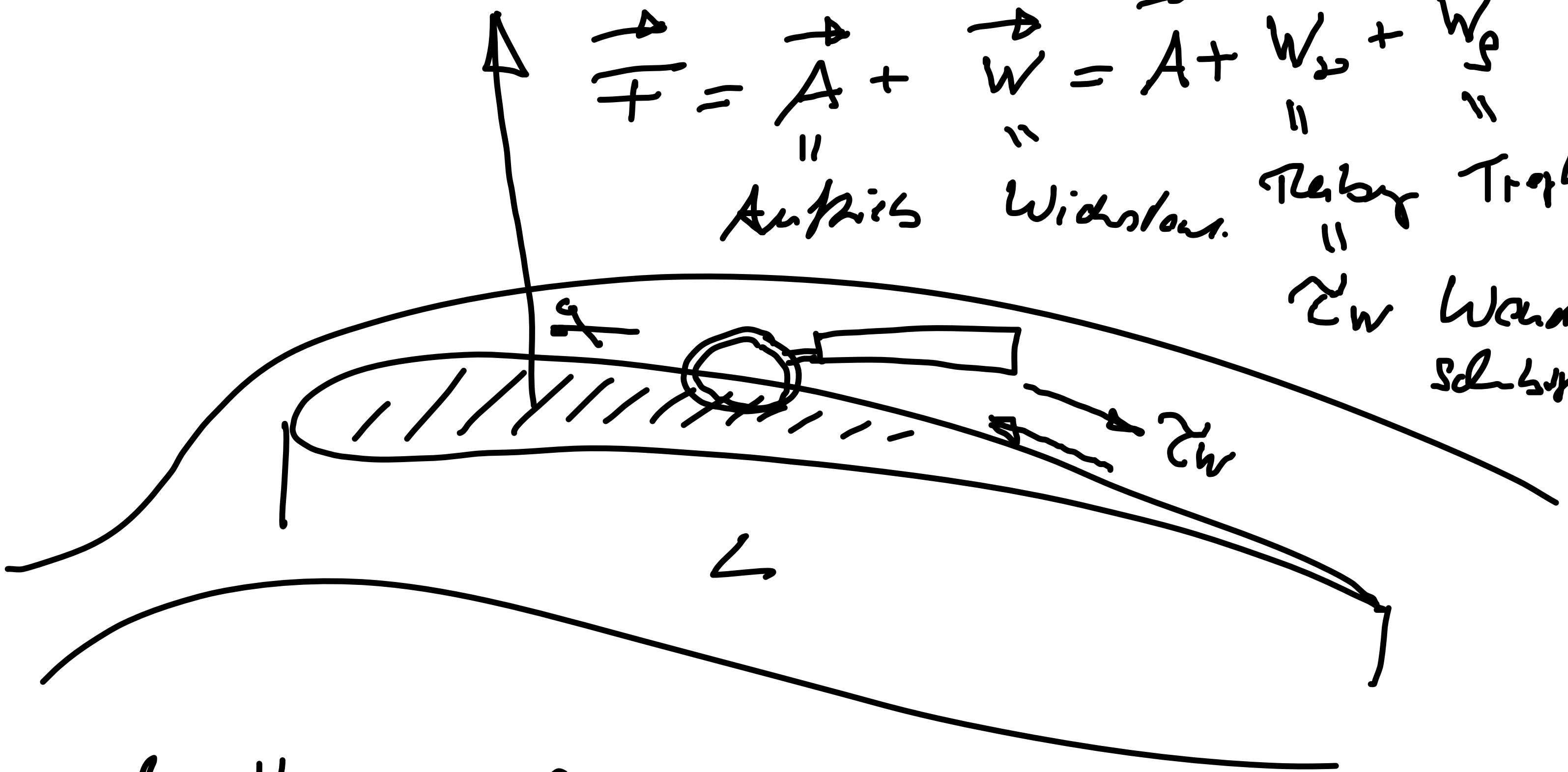
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Technisch wichtig

Prandtl'sche Wandgesetz

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{W} = \vec{A} + \vec{W}_{\tau} + \vec{W}_{p}$$

$\vec{A}$ = Auftrieb, $\vec{W}$ = Widerstand, $\vec{W}_{\tau}$ = Reibung = τ_w Wandschubspannung, $\vec{W}_{p}$ = Tragfl.



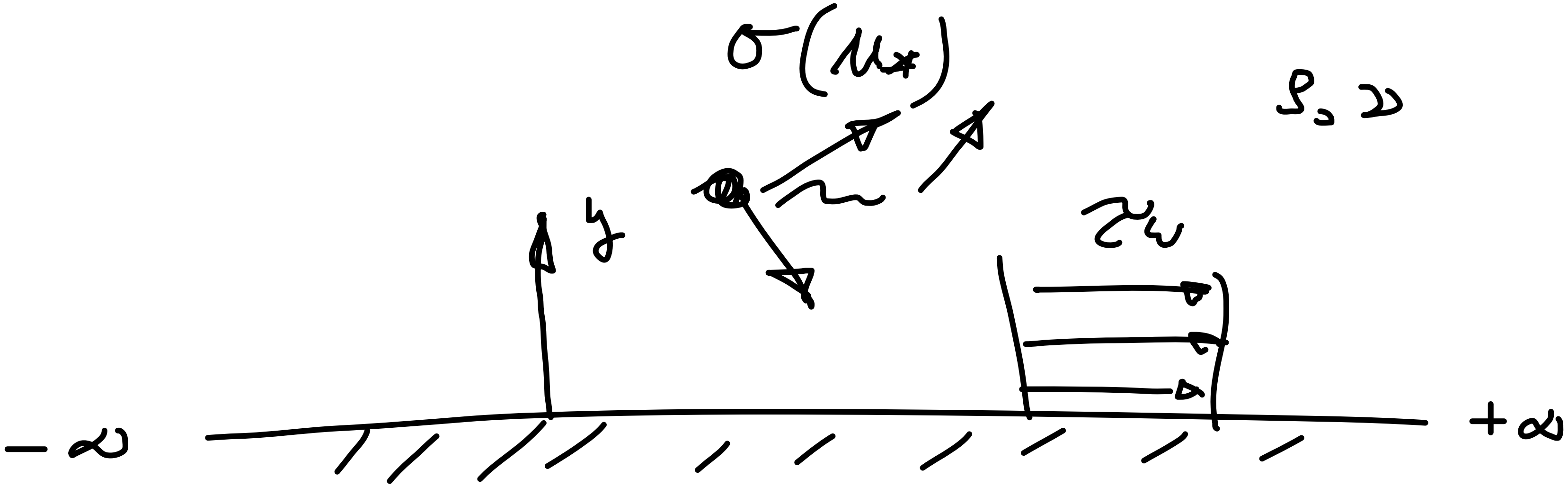
Trick: Grenzzonen

wo L ist nicht mehr sichtbar.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14



$$y^{+} = \frac{y\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu} = \frac{y\,u_*}{\nu}$$

$$u_* := \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$ Schubspannungsgeschwindigkeit.

$\hat{=}$ · mittlere Fluktuationsgröße.

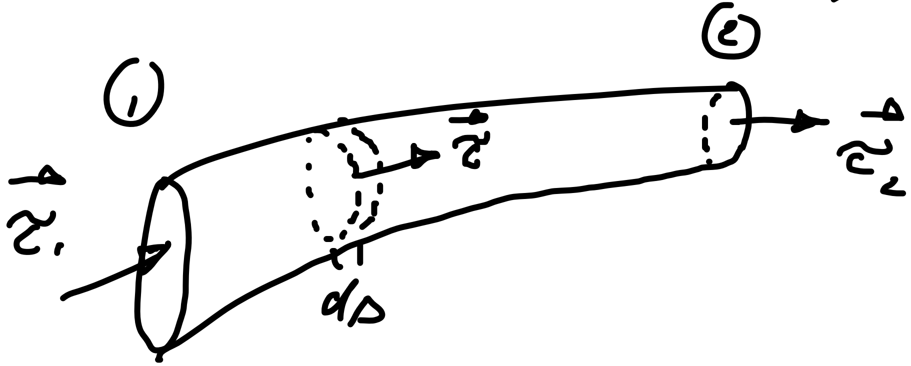
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Zurück zum hydraulischen Jäger

Anwendungsbeispiel zum Impulssatz und zur Kontigleichung.

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u A \vec{\tau}\right) ds - \left(\rho u_1^2 + p_1 + \psi_1\right) A_1 \vec{\tau}_1 +$$

$$+ \left(\rho u_2^2 + p_2 + \psi_2\right) A_2 \vec{\tau}_2 = - \vec{F}_{Fl \to Wand}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

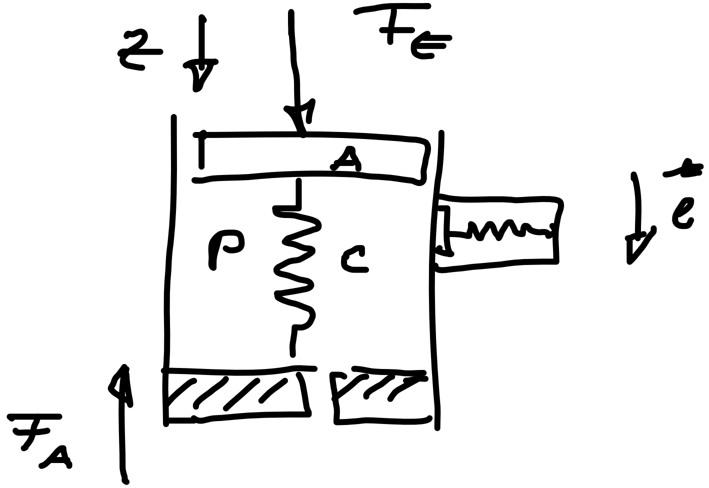
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

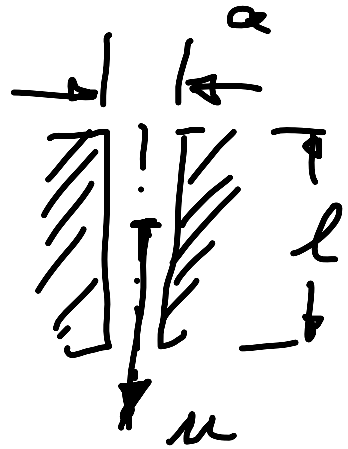
Eingeleitete Kraft

$$F_E = zc + pA$$



Ausgeleitete Kraft

$$F_A = zc + F_{Fl \to \text{Jochscheibe}}$$



$$= zc + pA - \underbrace{\rho a l \dot{u}}_{\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(\rho u A \vec{\tau})\, ds \cdot \vec{e}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

1. Impuls

$$F_A = cz + pA - \varrho l a \dot{u}$$

2. Bernoulli:

$$p = \varrho l \dot{u} + \underbrace{\frac{\varrho}{2} u|u| \zeta}_{\text{nichtlinearer Dämpfer.}}$$

d

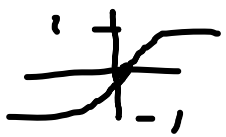
3. Konti: Druckaufbau

$$V \mathcal{K}_{eff} \dot{p} - \dot{z} A + u a = 0$$

1. Numerisches Lösen z.B. in Modelica.

Vorzeichenwechsel $\rightarrow$ numerisch mildern

$$\frac{\varrho}{2} u^2 \tanh(cu)$$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

2. Möglichkeit Linearisierung der Dämpfung

Energetische Balance od.

harmonische Balance

$$\frac{\varrho}{2} u|u|\zeta \longrightarrow \underset{\underset{z}{\parallel}}{d}\, u$$

d wird so bestimmt, daß die Dämpfung (Dissipation pro Schwingspiel identisch ist.

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\oint_0 \frac{\varrho}{2} u|u|\zeta \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{u} dt \overset{!}{=} \int_0^T d\,u \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{u} dt$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

3. Grenzfall $\xi \equiv 0$

Dampfsprungfreier Fall

Konti:

$$p V \kappa_{eff} - zA + \xi a = 0 ,$$

mit $\dot{\xi} = u$

$$\leadsto \quad p = \frac{zA}{V \kappa_{eff}} - \xi \frac{a}{V \kappa_{eff}}$$

Konti.

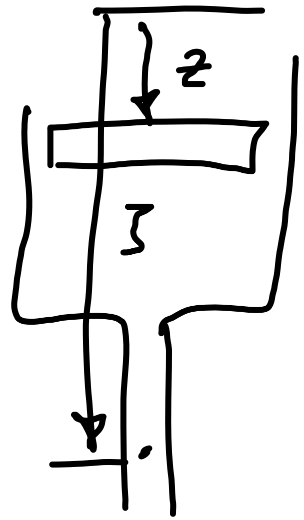
||

Bernoulli.

$$p = \varrho l \ddot{\xi} + 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

$$\varrho l \ddot{\zeta} + \frac{a}{V \kappa_{eff}} \zeta = \frac{A}{V \kappa_{eff}} z$$



Eigenfrequenz

$$\omega^2 := \frac{a}{\varrho l V \kappa_{eff}}$$

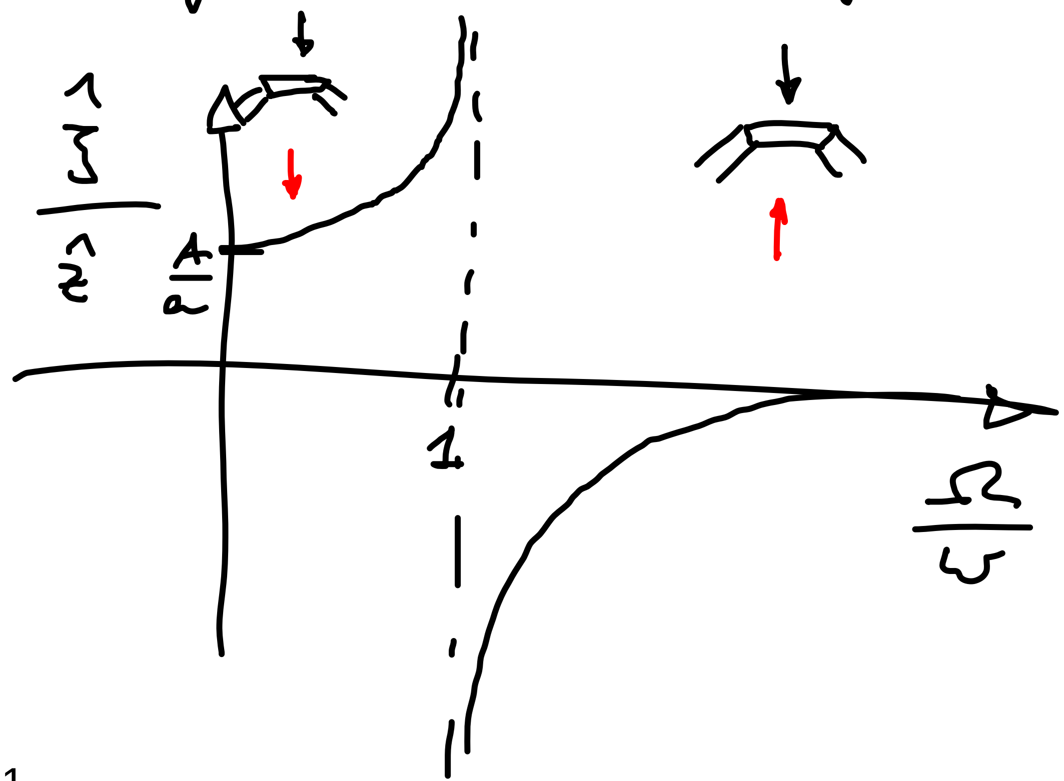
$$\leadsto \quad \ddot{\zeta} + \omega^2 \zeta = \frac{A}{a} \omega^2 z \quad \Big\} \quad -\Omega^2 \hat{\zeta} + \omega^2 \hat{\zeta} = \frac{A}{a} \omega^2 \hat{z}$$

Für $z = \hat{z} e^{i \Omega t}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\frac{\hat{\xi}}{\hat{z}} = \frac{A/a}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

$\frac{A}{a}$ hydraulische Übersetzung



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14

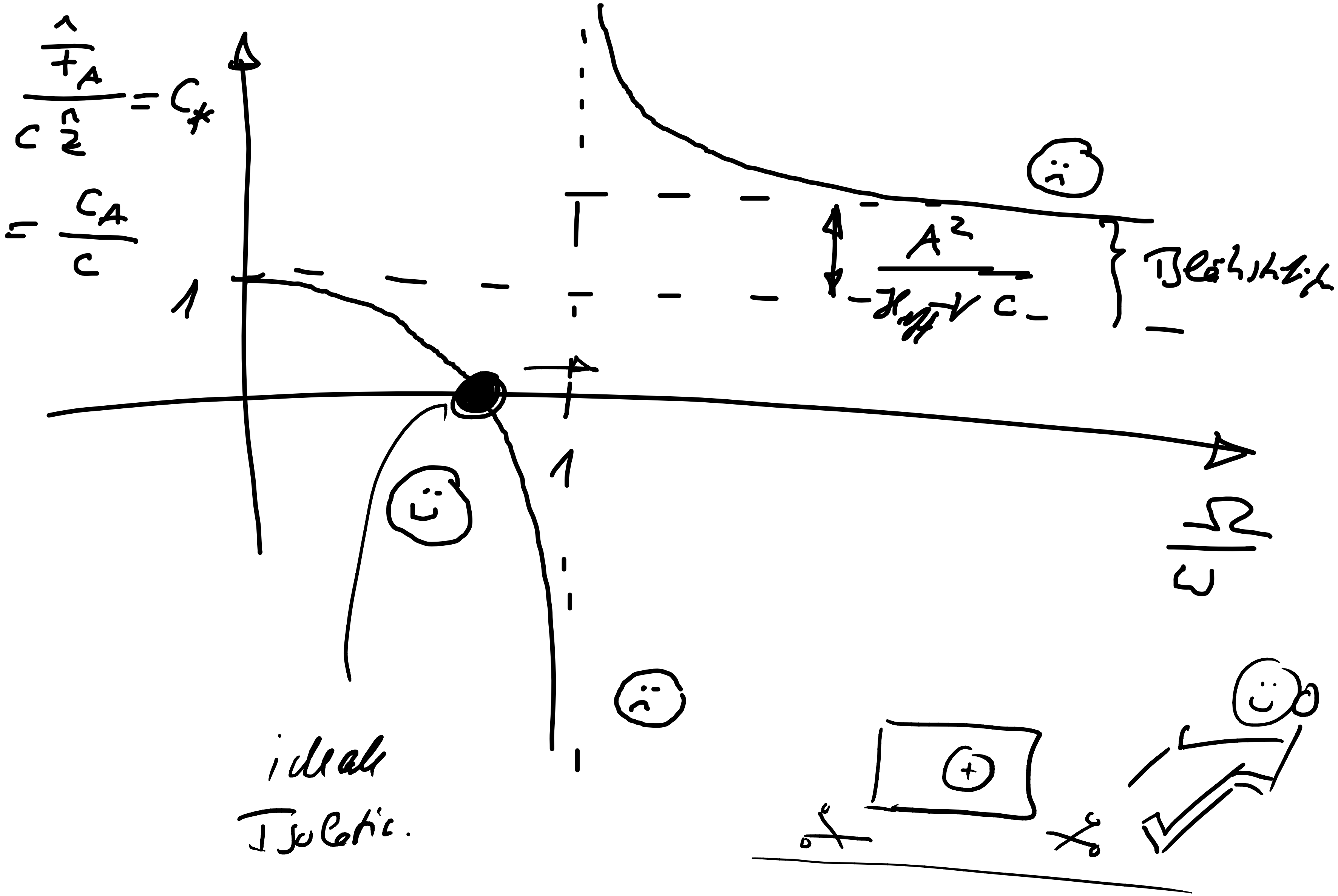
$$F_A = c z + z \underbrace{\frac{A^2}{\kappa_{A} V} - \xi \frac{a A}{\kappa_{A} V}}_{\text{PA Konst.}} \underbrace{- \rho l a \ddot{\xi}}_{\text{Impuls}}$$

$$\frac{\hat{F}_A}{c \hat{z}} = 1 + \frac{A^2}{\kappa_{A} V c}\left(1 - \frac{\hat{\xi}}{\hat{z}} \frac{a}{A}\right) + \frac{\rho l a}{c} \Omega^2 \frac{\hat{\xi}}{\hat{z}}$$

mit $\frac{\hat{\xi}}{\hat{z}} = \frac{A/a}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \longrightarrow A$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-
maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 14