Wellengleichung und Wellenausbreitung in Rohrleitungen

Vorteil der Wellengleichung

+ lineare Gleichung

+ Superposition

+ Frequenzraum

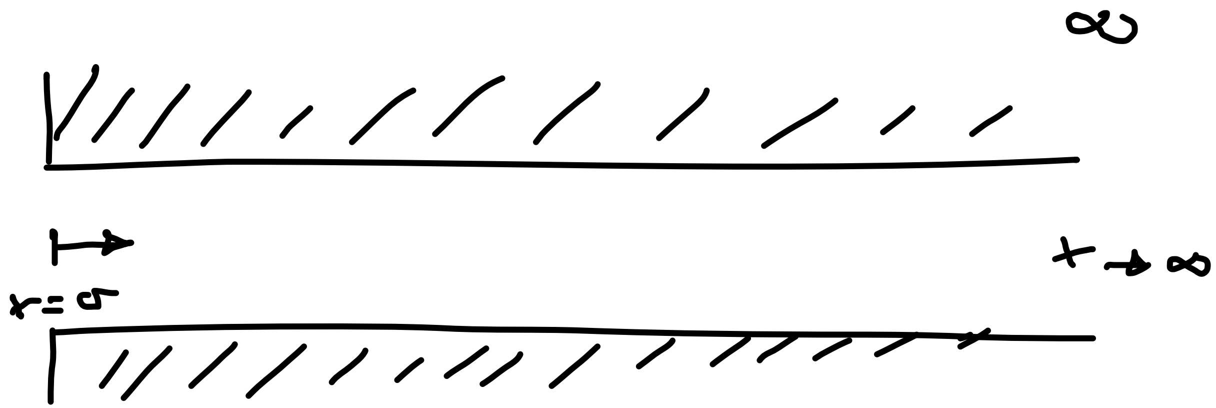
$$a_0 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$p = h(\underbrace{x - a_0 t}_{c^+ \text{ Charakteristik}}) + g(\underbrace{x + a_0 t}_{c^-})$$

d'Alembertscher Ansatz zur Lösung der Wellengleichung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

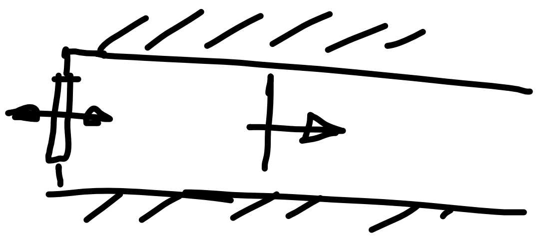


Halbunendliche Rohrleitung sind nur C^+-Charakteristiken von Interesse

Randbedingung am $x = 0$

$$p = \hat{p}\cos\Omega t \qquad \text{Druckrandbed.}$$

$$u = \hat{u}\cos\Omega t \qquad \text{Schwingender Kolben am } x = 0$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

Komplexe Erweiterung der Druckrandbed.

$$p = \mathrm{Re}\left(\hat{p}\, e^{i\Omega t}\right)$$

$$e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t .$$

$\hat{p}$ ist eine komplexe Amplitude.

$$\underset{x=0}{p(0,t)} = h(-a_0 t) = \hat{p}\, e^{i\Omega t}$$

$$= \hat{p}\, e^{-i\frac{\Omega}{a_0}(-t a_0)}$$

mit der Wellenzahl

$$k := \frac{\Omega}{a_0}$$

$$= \hat{p}\, e^{-ik(-t a_0)}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

$\leadsto$ die unbekannte Funktion h

kann nur die Form

$$h(x-a_0 t) = \hat{p}\, e^{-ik(x-a_0 t)} = \hat{p}\, e^{i(\Omega t - kx)}$$

Rechtslaufende Druckwelle im Rohr

$$[\Omega t] = 1$$
$$[kx] = 1$$

Das Argument jeder transzendente Funktion muß dimensionslos sein!

$\leadsto$ Die Dimension der Wellenzahl $\dfrac{\Omega}{a_0} = \dfrac{1}{\text{Länge}}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

$$p(x,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}\, e^{i(\Omega t - kx)}\right]$$

$$= \hat{p} \cos(\Omega t - kx)$$

$$= \hat{p} \cos\left(\Omega t - k(x+\lambda)\right),$$

mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$[\lambda] = \text{Länge}.$$

$$a_0 = \frac{\Omega}{2\pi}\lambda$$

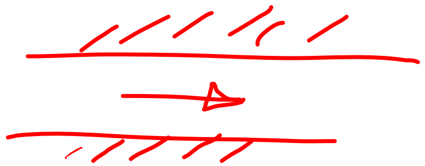
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

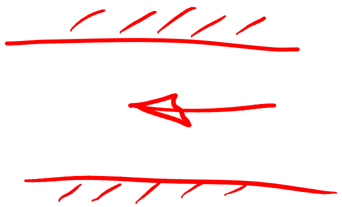
FLUID SYSTEM TECHNIK

Allgemeiner Fall

linksläufige c^- und rechtsläufige c^+ Charakteristike.

$$p = \underbrace{\hat{p}_+ e^{i(\Omega t - kx)}}_{} + \underbrace{\hat{p}_- e^{i(\Omega t + kx)}}_{}$$





$$\underline{p = p_+ + p_-}$$

$$u = u_+ + u_-$$ Schnelle ≙ Geschw.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

Umrechnung von Druck und Geschwindigkeit (Schnelle) erfolgt über die Impedanz

$$u_+ = \frac{p_+}{\rho_0 a_0} \qquad u_- = \frac{p_-}{\rho_0 a_0}$$

$$p(x,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}_+ e^{i(\Omega t - kx)} + \hat{p}_- e^{i(\Omega t + kx)}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{i\Omega t}\,\hat{p}(x)\right],$$

mit der räumlich verteilten komplexen Amplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

$$\hat{p}(x) = \hat{p}_+ e^{-ikx} + \hat{p}_- e^{ikx}$$

? $u(x,t) = \mathrm{Re}\left[e^{i\Omega t} \hat{u}(x) \right],$

mit $\hat{u}(x) = \hat{u}_+ e^{-ikx} + \hat{u}_- e^{ikx}$

Euler-Gleichung

Bewegungsgleichung $\rho_0 \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ für $k_{eff} = 0.$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\approx 0.} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

linearisierte Euler-Gl. $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

mit $u(x,t)$

$p(x,t)$

$$\varrho_0 i\Omega\, \hat{u}(x) = -\hat{p}'(x)$$

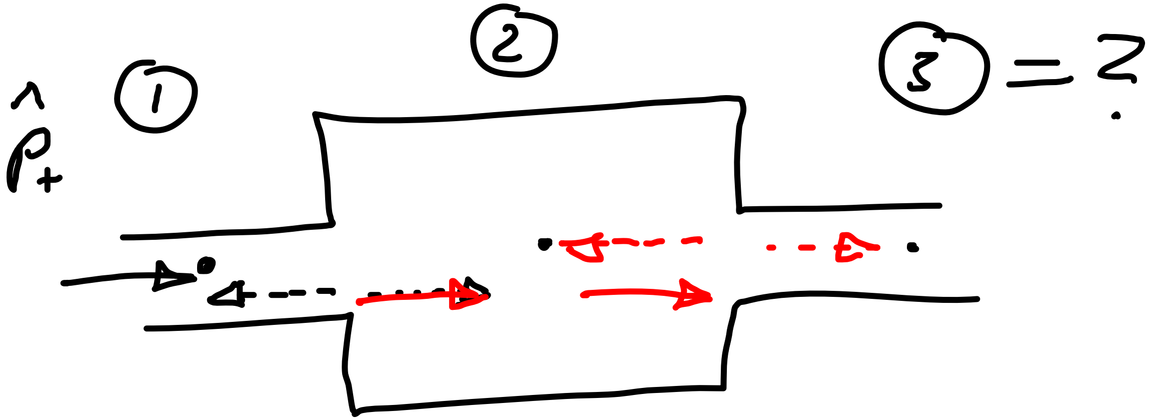
$$\varrho_0 \cancel{i}\cancel{\Omega}\left[\hat{u}_+ e^{-ikx} + \hat{u}_- e^{ikx}\right] = -\cancel{i}k\left[\hat{p}_+ e^{-ikx} - \hat{p}_- e^{+ikx}\right].$$

$$k = \frac{\cancel{\Omega}}{a_0}$$

$$\varrho_0 a_0\left[\hat{u}_+ e^{-ikx} + \hat{u}_- e^{ikx}\right] = \hat{p}_+ e^{-ikx} - \hat{p}_- e^{ikx}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\hat{p}_+ = \varrho_0 a_0 \hat{u}_+ \qquad \hat{p}_- = -\varrho_0 a_0 \hat{u}_-}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11



Bei jeder plötzlichen Querschnittsänderung kommt es zur Teilreflexion einer einlaufenden Welle

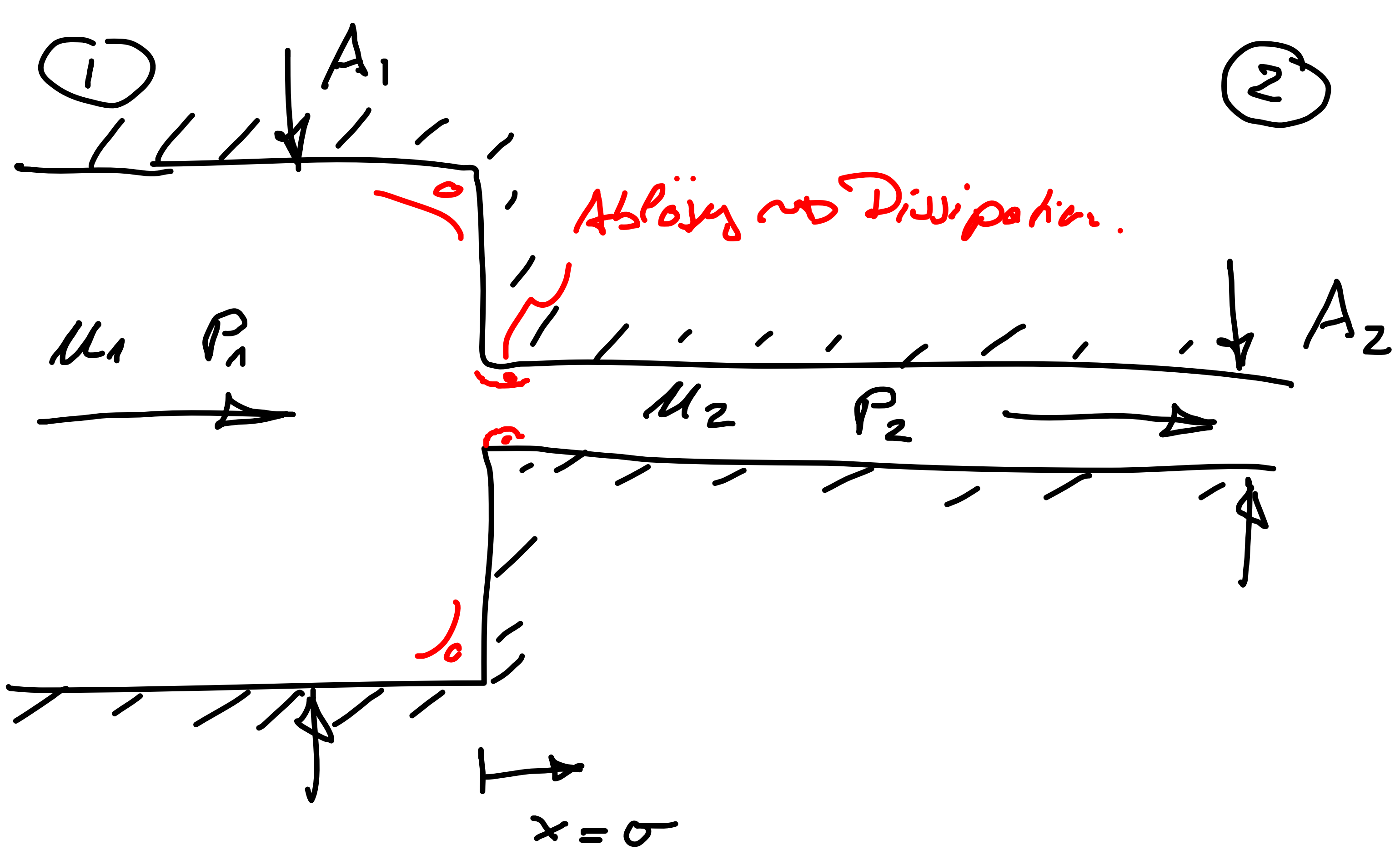
→ Schalldämpfer.

Randbedingungen und Übergangsbedingungen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11



Übergangsbedingung an der Stelle σ

1. Kontinuität $u_1 A_1 = u_2 A_2$ (1)

2. Für verlustfreie Strömung und keine Dämpfung. $p_1 = p_2$ (2) Stetigkeit des Spannungsvektors.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Konti.

$$(u_{1+} + u_{1-})A_1 = u_{2+} A_2 \qquad (1)$$

einlaufende Welle

Reflexion

durchgehende Welle

Impulsbilanz.

$$p_{1+} + p_{1-} = p_{2+} \qquad (2)$$

$$p_{1+} - p_{1-} = p_{2+} \frac{A_2}{A_1} \qquad (1')$$

$$p_{1+} + p_{1-} = p_{2+} \qquad (2')$$

Elimination von p_{2+}

$$p_{1-} = p_{2+} - p_{1+}$$

$$= \frac{A_1}{A_2} p_{1+} - \frac{A_1}{A_2} p_{1-} - p_{1+}$$

$$= \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right) p_{1+} - \frac{A_1}{A_2} p_{1-}$$

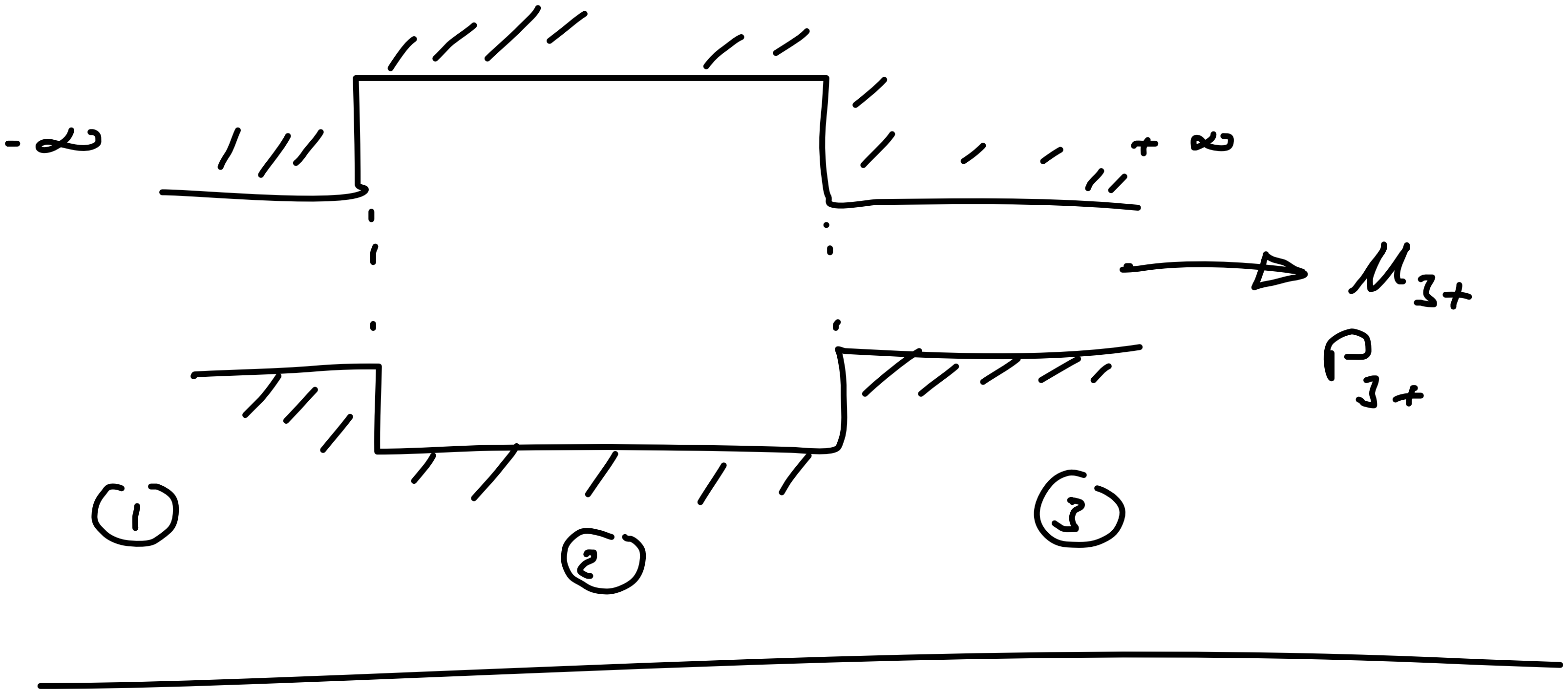
$$\hat{r} := \frac{p_{1-}}{p_{1+}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$ Reflexionsfaktor.

Druckverhältnis wird allein über die Geometrie festgelegt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Zusammenfassung Wellenausbreitung

1. Frage: Muss an jedem Ort Geschw., Druck, Dichte aufgelöst werden?

a_{eff}, L, f

a_{eff} = eff. Schallg.

L = Länge der Leitg.

f = typische Freq. i.d.R. eine $\boxed{\text{aufgeprägte Freq.}}$ ☺

$$f \sim \frac{a_{eff}}{L}$$ ⇝ Wellenausbreitg. ✓

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 11

2. Frage: • nichtlineare Charakteristikenverfahren.

→ Wenn Reibung, Verdichtungsstöße, ...

bis das wichtig ist

→ Verdichtungsstöße

• kein Schallausbreitung.

→ Wellenausgleich . .

→ ganz einfache Verfahren.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

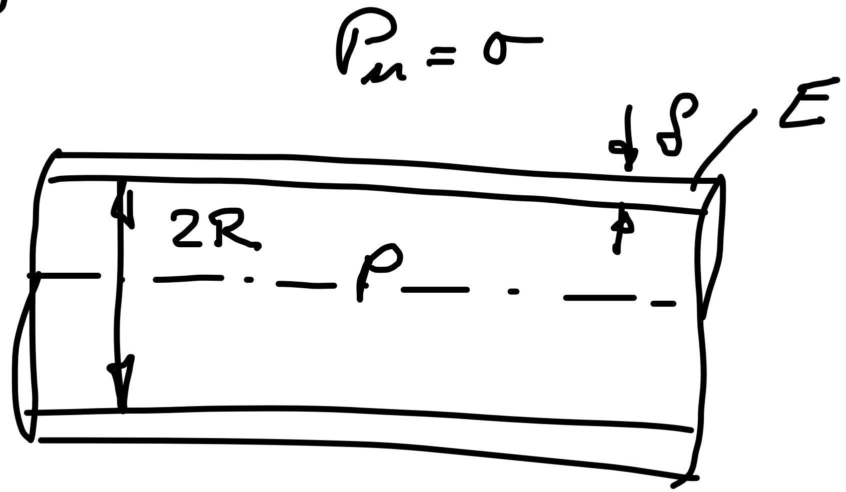
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

Zurück zur effektiven Schallgeschwindigkeit.

$$\boxed{a_{eff}^2 = \frac{1}{\rho_{eff}\,\varkappa_{eff}}}$$

Für die Ader

$$\varkappa_{eff,A} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}\Big|_s$$



$\delta \ll R$ Wandstärke

E Elastizitätsmod.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$A = \pi R^2 \quad \text{gedehnte Querschnittsfläche}$$

$$A_0 = \pi R_0^2 \quad \text{im Betriebspunkt}$$

<u>Umfangsdehnung</u> in der Rohrwand

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi (R - R_0)}{2\pi R_0} = \frac{R - R_0}{R_0}$$

<u>Umfangsspannung</u> folgt aus Hooke-Gesetz

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu \underbrace{\sigma_z}_{\text{"0, wenn das Rohr nicht eingespannt ist."}}\right)$$

„z" axiale Richtung

„φ" Umfangsrichtung

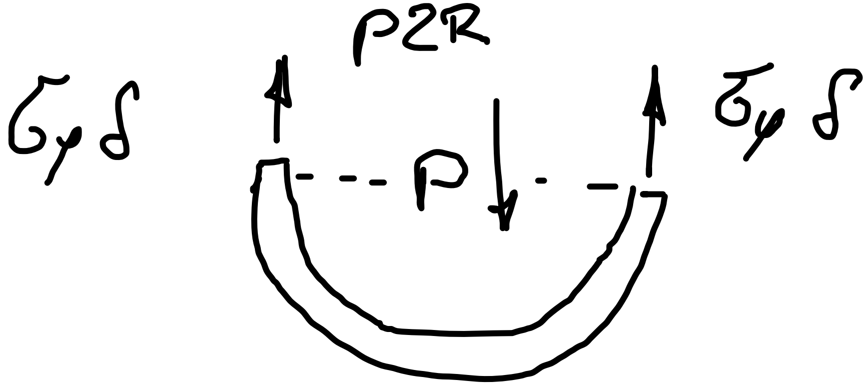
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

Zusammenhang zwischen Spannungsänderung und Dehnung

⇝ Gleichgewichtsbeziehung



$$\sigma_\varphi = p\frac{R}{\delta}$$

für das dünnwandige $\left(\frac{\delta}{R} \ll 1\right)$ und trägheitsfreie Rohr.

⇝ Umfangsdehnung

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\, p \frac{R}{\delta}$$

$$\frac{R-R_0}{R_0} = \frac{1}{E}\, p \frac{R}{\delta}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

$$R = R_0 \left(1 + \frac{p}{E}\,\frac{R_0}{\delta}\right)$$

$\leadsto$ Nachgiebigkeit der Anlage (im Betriebspunkt)

$$\mathcal{K}_{A_0} := \frac{1}{A_0}\,\frac{\partial A}{\partial p}\bigg|_0 = \frac{1}{\pi R_0^2}\,\frac{d}{dp}\left(\pi R^2\right)\bigg|_0$$

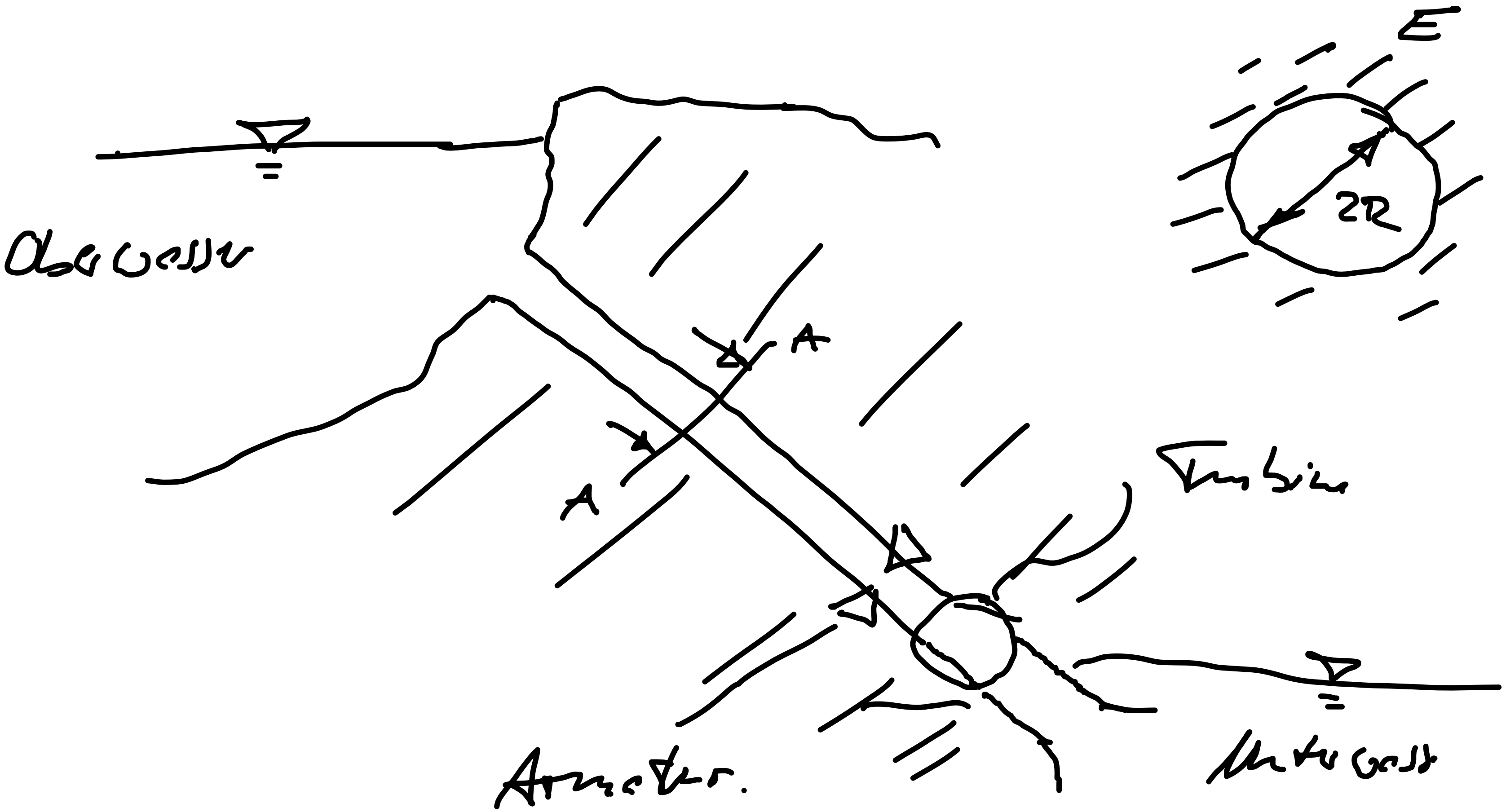
$$\boxed{\mathcal{K}_{A_0} = \frac{2R_0}{\delta E}} \quad \text{für} \quad \frac{R_0}{\delta} \gg 1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11

Zweit. Extremfall $\frac{R_0}{\delta} \to \infty$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 11

Radius

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_A(\underbrace{E}_{\text{E-Modul}}, \overset{\text{Radius}}{R_0}, \underbrace{\nu}_{\text{Poisson-Zahl}})$$

	$\mathcal{H}_A$	E	R_0	ν
F	-1	1	0	0
L	2	-2	1	0

	$\frac{\mathcal{H}_A E}{E}$	E	R_0	ν
F	0	1	0	0
~~L~~	~~0~~	~~-2~~	~~1~~	~~0~~

$$\leadsto \boxed{\mathcal{H}_A = E^{-1} f_1(\nu)}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 11