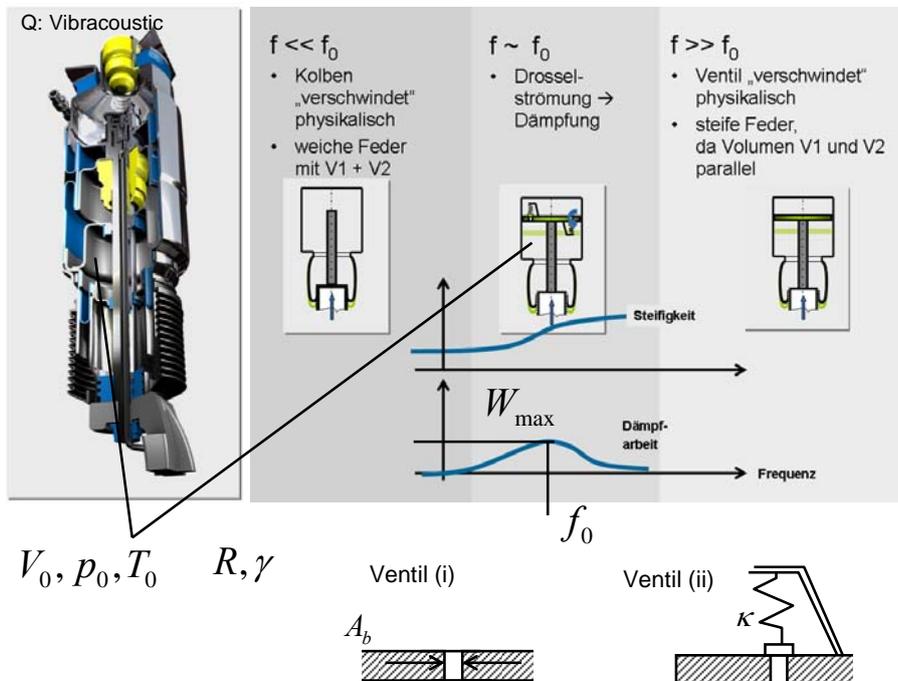


## Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme Übung 4 09.06.2010

### Aufgabe 4.1 Dämpfvermögen eines Luftdämpfers



Die Abbildung links zeigt einen Schnitt durch einen Luftdämpfer. Im Bild rechts ist das prinzipielle Übertragungsverhalten eines Luftdämpfers skizziert.

In Konstruktionslage ist das Bauteil mit dem Absolutdruck  $p_0$  gefüllt, dabei wird der Druck so gewählt, dass das Fahrzeuggewicht getragen wird (Stoffdaten der Luft: Gaskonstante  $R$ , Adiabatenexponent  $\gamma$ ). Die Umgebungstemperatur ist  $T_0$ . Das Bauteil hat in Konstruktionslage das Gesamtvolumen  $V_0$ , welches sich aus den Einzelvolumina zusammensetzt. Die Luft in den Volumina kommuniziert über Ventile. Im Fall (i) handelt es sich bei dem Ventil um eine Drosselbohrung mit konstanter Offenfläche  $A_b$ . Im Fall (ii) ist die Offenfläche proportional dem Differenzdruck zwischen den Volumina. Die Änderung der Offenfläche mit dem Druck, d.h. die Flächennachgiebigkeit  $\kappa$  ist bekannt. Das Ventil öffnet bereits bei beliebig kleiner Druckdifferenz.

- Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Dämpfungsmaximum  $W_{max}$ , Absolutdruck  $p_0$  sowie Gesamtvolumen  $V_0$  her und zeigen Sie, dass das Maximum unabhängig von der Umgebungstemperatur ist.
- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen Abstimmfrequenz  $W(f_0) = W_{max}$  und den bekannten Größen her. Berücksichtigen Sie dabei für das Ventil (i) die Offenfläche  $A_b$  und für das Ventil (ii) die Flächennachgiebigkeit  $\kappa$ .
- Angenommen die Abstimmfrequenz sei 1 Hz bei einer Temperatur von 293K. Wie wird das System verstimmt bei einer Temperaturerhöhung um 60K auf 80°C bzw. 353 K?

Geg.:  $\gamma, R, p_0, T_0, V_0, A_b, \kappa$



Aufgabe 4.2 Wirkungsgradaufwertung am Ventilator



Bei Großventilatoren – wie sie z.B. in einem Windkanal oder zur Tunnelbelüftung zum Einsatz kommen – ist die experimentelle Ermittlung des Betriebsverhaltens und insbesondere des Wirkungsgrads aus Kostengründen nicht an einer original großen Ausführung auf einem Prüfstand beim Ventilatorhersteller möglich. Vielmehr werden hierzu Kennlinien- und Wirkungsgradmessungen an maßstäblich verkleinerten Ausführungen (so genannten Modellausführungen) durchgeführt, die eigens zu diesem Zweck hergestellt werden.

Für den Betreiber ist dieser Umstand nicht relevant, solange der Hersteller nachweisen kann, dass er die versprochenen Betriebsparameter (in der Regel liegt das Hauptaugenmerk auf dem Wirkungsgrad) einhält.

Um eine Auf-/Abwertung des Wirkungsgrades zu vermeiden, ist man bestrebt eine vollständige Ähnlichkeit sowohl bei den geometrischen als auch bei den dimensionslosen Strömungsparametern herzustellen. Diese sind:

|                    |              |
|--------------------|--------------|
| Drehzahl           | $n$          |
| Laufreddurchmesser | $d$          |
| Totaldruckaufbau   | $\Delta p_t$ |
| Volumenstrom       | $q$          |
| kin. Viskosität    | $\nu$        |
| Dichte             | $\rho$       |

- Ermitteln Sie mit Hilfe der Dimensionsanalyse, welche dimensionslosen Produkte das Problem beschreiben.
- Welche der ermittelten Produkte lassen sich in der Realität konstant halten (gehen sie von einem Durchmesser  $d$  der Großausführung (GA) von 2,5 m, einer Drehzahl  $n$  der GA von 1000 1/min, sowie von einem Maßstabsfaktor  $\kappa$  Modell (M) zu GA  $d'/d$  von 1/10 aus)? Wie würde sich die Leistungsaufnahme verhalten, wenn man vollständige Ähnlichkeit herstellen würde?
- Führen Sie eine Grenzwertbetrachtung für  $Re \rightarrow \infty$  durch und ermitteln Sie den Schnittpunkt der Anlagenkennlinie mit der des Ventilators
- Wie verhält sich die relative Rauigkeit  $k/d$ , wenn bei beiden Maschinen die Schaufeln im gleichen Herstellungsverfahren gefertigt wird?



4.1 a)  $W_{\max} = f(p_0, T_0, V_0, A_b, R, \gamma) \Rightarrow$  Basisgrößensystem [ L M T  $\Theta$  ]

|          | $W_{\max}$ | $p_0$ | $T_0$ | $V_0$ | $A_b$ | R  | $\gamma$ |
|----------|------------|-------|-------|-------|-------|----|----------|
| L        | 2          | -1    | 0     | 3     | 2     | 2  | 0        |
| M        | 1          | 1     | 0     | 0     | 0     | 0  | 0        |
| T        | -2         | -2    | 0     | 0     | 0     | -2 | 0        |
| $\Theta$ | 0          | 0     | 1     | 0     | 0     | -1 | 0        |

|                                | $W_{\max}$   | $p_0$        | $T_0 R$      | $V_0$        | $A_b$        | <del>R</del>  | $\gamma$     |
|--------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|
| L                              | 2            | -1           | 2            | 3            | 2            | <del>2</del>  | 0            |
| M                              | 1            | 1            | 0            | 0            | 0            | <del>0</del>  | 0            |
| T                              | -2           | -2           | -2           | 0            | 0            | <del>-2</del> | 0            |
| <del><math>\Theta</math></del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>-1</del> | <del>0</del> |

|              | $\frac{W_{\max}}{p_0}$ | <del><math>p_0</math></del> | $T_0 R$      | $V_0$        | $A_b$        | $\gamma$     |
|--------------|------------------------|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| L            | 3                      | <del>-1</del>               | 2            | 3            | 2            | 0            |
| <del>M</del> | <del>0</del>           | <del>1</del>                | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> |
| T            | 0                      | <del>-2</del>               | -2           | 0            | 0            | 0            |

|              | $\frac{W_{\max}}{p_0}$ | <del><math>T_0 R</math></del> | $V_0$        | $A_b$        | $\gamma$     |
|--------------|------------------------|-------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| L            | 3                      | <del>2</del>                  | 3            | 2            | 0            |
| <del>T</del> | <del>0</del>           | <del>-2</del>                 | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> |

|              | $\frac{W_{\max}}{p_0 V_0}$ | <del><math>V_0</math></del> | $\frac{A_0}{V_0^{\frac{2}{3}}}$ | $\gamma$     |
|--------------|----------------------------|-----------------------------|---------------------------------|--------------|
| <del>L</del> | <del>0</del>               | <del>3</del>                | <del>0</del>                    | <del>0</del> |

Die gesuchten Kennzahlen sind:

$$\frac{W_{\max}}{p_0 V_0}, \gamma \text{ und } \frac{A_0}{V_0^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \frac{W_{\max}}{p_0 V_0} = fn \left( \frac{A_0}{V_0^{\frac{2}{3}}}, \gamma \right) \text{ oder } W_{\max} = p_0 V_0 fn \left( \frac{A_0}{V_0^{\frac{2}{3}}}, \gamma \right)$$



b)  $f_0 = f(p_0, T_0, V_0, A_b, R, \gamma)$   $\Rightarrow$  Basisgrößensystem [ L M T  $\Theta$  ]

|          | $f_0$ | $p_0$ | $T_0$ | $V_0$ | $A_b$ | R  | $\gamma$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|----|----------|
| L        | 0     | -1    | 0     | 3     | 2     | 2  | 0        |
| M        | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0  | 0        |
| T        | -1    | -2    | 0     | 0     | 0     | -2 | 0        |
| $\Theta$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | -1 | 0        |

|                                | $f_0$        | $T_0 R$      | $V_0$        | $A_b$        | <del>R</del>  | $\gamma$     |
|--------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|
| L                              | 0            | 2            | 3            | 2            | <del>2</del>  | 0            |
| T                              | -1           | -2           | 0            | 0            | <del>-2</del> | 0            |
| <del><math>\Theta</math></del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del>  | <del>0</del> |

|              | $\frac{f_0}{\sqrt{T_0 R}}$ | <del><math>T_0 R</math></del> | $V_0$        | $A_b$        | $\gamma$     |
|--------------|----------------------------|-------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| L            | -1                         | <del>2</del>                  | 3            | 2            | 0            |
| <del>T</del> | <del>0</del>               | <del>2</del>                  | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> |

|              | $\frac{f_0 \sqrt{A_b}}{\sqrt{T_0 R}}$ | <del><math>V_0</math></del> | $\frac{V_0}{A_0^{\frac{3}{2}}}$ | $\gamma$     |
|--------------|---------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|--------------|
| <del>L</del> | <del>0</del>                          | <del>2</del>                | <del>0</del>                    | <del>0</del> |

$$\frac{f_0 \sqrt{A_b}}{\sqrt{T_0 R}} = fn \left( \frac{V_0}{A_0^{\frac{3}{2}}}, \gamma \right) \Rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{T_0 R}}{\sqrt{A_b}} fn \left( \frac{V_0}{A_0^{\frac{3}{2}}}, \gamma \right)$$

Grenzwertbetrachtung für  $fn \left( \frac{V_0}{A_0^{\frac{3}{2}}}, \gamma \right) \rightarrow \infty$  ergibt  $f_0 \sim \frac{1}{d}$



$$f_0 = f(p_0, T_0, V_0, \kappa, R, \gamma) \Rightarrow \text{Basisgrößensystem [L M T } \Theta \text{]}$$

$$\kappa = \frac{A_b}{\Delta p} \Rightarrow \frac{m^2}{Pa} = \frac{m^2}{\frac{kg \cdot m}{s^2}} = \frac{m^3 \cdot s^2}{kg}$$

|          | $f_0$ | $p_0$ | $T_0$ | $V_0$ | $\kappa$ | R  | $\gamma$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|----------|----|----------|
| L        | 0     | -1    | 0     | 3     | 3        | 2  | 0        |
| M        | 0     | 1     | 0     | 0     | -1       | 0  | 0        |
| T        | -1    | -2    | 0     | 0     | 2        | -2 | 0        |
| $\Theta$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0        | -1 | 0        |

|          | $f_0$ | $p_0 \kappa$ | $T_0$ | $V_0$ | $\kappa$ | R  | $\gamma$ |
|----------|-------|--------------|-------|-------|----------|----|----------|
| L        | 0     | 2            | 0     | 3     | 3        | 2  | 0        |
| M        | 0     | 0            | 0     | 0     | 0        | 0  | 0        |
| T        | -1    | 0            | 0     | 0     | 2        | -2 | 0        |
| $\Theta$ | 0     | 0            | 1     | 0     | 0        | -1 | 0        |

|          | $f_0$ | $p_0 \kappa$ | $T_0 R$ | $V_0$ | R  | $\gamma$ |
|----------|-------|--------------|---------|-------|----|----------|
| L        | 0     | 2            | 2       | 3     | 2  | 0        |
| T        | -1    | 0            | -2      | 0     | -2 | 0        |
| $\Theta$ | 0     | 0            | 0       | 0     | 0  | 0        |

|   | $\frac{f_0}{\sqrt{T_0 R}}$ | $p_0 \kappa$ | $T_0 R$ | $V_0$ | $\gamma$ |
|---|----------------------------|--------------|---------|-------|----------|
| L | -1                         | 2            | 2       | 3     | 0        |
| T | 0                          | 0            | 0       | 0     | 0        |

|   | $\frac{f_0 \sqrt{p_0 \kappa}}{\sqrt{T_0 R}}$ | $p_0 \kappa$ | $\frac{V_0}{(p_0 \kappa)^{\frac{3}{2}}}$ | $\gamma$ |
|---|----------------------------------------------|--------------|------------------------------------------|----------|
| L | 0                                            | 2            | 0                                        | 0        |



$$\frac{f_0 \sqrt{p_0 \kappa}}{\sqrt{T_0 R}} = fn \left( \frac{V_0}{(p_0 \kappa)^{\frac{3}{2}}}, \gamma \right) \Rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{T_0 R}}{\sqrt{p_0 \kappa}} fn \left( \frac{V_0}{(p_0 \kappa)^{\frac{3}{2}}}, \gamma \right)$$

Grenzwertbetrachtung für  $fn \left( \frac{V_0}{(p_0 \kappa)^{\frac{3}{2}}} \right) \rightarrow \infty$  ergibt  $f_0 \sim \frac{1}{\sqrt{p_0 \kappa}}$

Im Gegensatz zum ersten Fall, existiert hier eine Abhängigkeit von  $p_0$ , welcher von der Last abhängt!

c)

$$f_0 \sim \sqrt{T_0}$$

$$f_1 \sim \sqrt{T_1}$$

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_0}}$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_0}} f_0$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{353K}}{\sqrt{293K}} * 1 Hz$$

$$f_1 = \sqrt{1,2048} * 1 Hz$$

$$f_1 = 1,0976 Hz \approx 1,1 Hz$$

Die Abstimmfrequenz bei der das Dämpfungsmaximum  $W_{\max}$  liegt erhöht sich um 0,1 Hz.



4.2 a)  $\Delta p_t = f_n(d, n, Q, v, \rho)$   $\implies$  Basisgrößensystem [L M T]  
 $P_f = f_n(\Delta p_t, d, n, Q, v, \rho)$   $\implies$  Basisgrößensystem [L M T]

|   | $\Delta p_t$ | d | n  | Q  | v  | $\rho$ |
|---|--------------|---|----|----|----|--------|
| L | -1           | 1 | 0  | 3  | 2  | -3     |
| M | 1            | 0 | 0  | 0  | 0  | 1      |
| T | -2           | 0 | -1 | -1 | -1 | 0      |

|   | $\frac{\Delta p_t}{\rho}$ | d | n  | Q  | v  | $\rho$ |
|---|---------------------------|---|----|----|----|--------|
| L | 2                         | 1 | 0  | 3  | 2  | -3     |
| M | 0                         | 0 | 0  | 0  | 0  | 0      |
| T | -2                        | 0 | -1 | -1 | -1 | 0      |

|   | $\frac{\Delta p_t}{\rho n^2}$ | d | $\frac{n}{v}$ | $\frac{Q}{n}$ | $\rho$ |
|---|-------------------------------|---|---------------|---------------|--------|
| L | 2                             | 1 | -2            | 3             | 2      |
| T | 0                             | 0 | 0             | 0             | 1      |

|   | $\frac{\Delta p_t}{\rho n^2 d^2}$ | $\frac{nd^2}{v}$ | $\frac{Q}{nd^3}$ |
|---|-----------------------------------|------------------|------------------|
| L | 0                                 | 0                | 0                |

Die 3 Kennzahlen sind:

$$\frac{\Delta p_t}{\rho n^2 d^2} = \psi$$

$$\frac{nd^2}{v} = \text{Re}$$

$$\frac{Q}{nd^3} = \varphi$$



|   | $P_f$ | $\Delta p_t$ | d | n  | Q  | $\nu$ | $\rho$ |
|---|-------|--------------|---|----|----|-------|--------|
| L | 2     | -1           | 1 | 0  | 3  | 2     | -3     |
| M | 1     | 1            | 0 | 0  | 0  | 0     | 1      |
| T | -3    | -2           | 0 | -1 | -1 | -1    | 0      |

|   | $\frac{P_f}{\Delta p_t}$ | $\frac{\Delta p_t}{\rho}$ | d | n  | Q  | $\nu$ | $\rho$ |
|---|--------------------------|---------------------------|---|----|----|-------|--------|
| L | 3                        | 2                         | 1 | 0  | 3  | 2     | -3     |
| M | 0                        | 0                         | 0 | 0  | 0  | 0     | 0      |
| T | -1                       | -2                        | 0 | -1 | -1 | -1    | 0      |

|   | $\frac{P_f}{\Delta p_t Q}$ | $\frac{\Delta p_t}{\rho n^2}$ | d | $\frac{n}{\nu}$ | $\frac{Q}{n}$ | $\rho$ |
|---|----------------------------|-------------------------------|---|-----------------|---------------|--------|
| L | 0                          | 2                             | 1 | -2              | 3             | 2      |
| M | 0                          | 0                             | 0 | 0               | 0             | 0      |
| T | 0                          | 0                             | 0 | 0               | 0             | 0      |

|   | $\frac{P_f}{\Delta p_t Q}$ | $\frac{\Delta p_t}{\rho n^2 d^2}$ | $\frac{nd^2}{\nu}$ | $\frac{Q}{nd^3}$ |
|---|----------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------------|
| L | 0                          | 0                                 | 0                  | 0                |

Die 4 Kennzahlen sind:

$$\frac{P_f}{\Delta p_t Q} = \eta_f$$

$$\frac{\Delta p_t}{\rho n^2 d^2} = \psi$$

$$\frac{nd^2}{\nu} = \text{Re}$$

$$\frac{Q}{nd^3} = \varphi$$



b) Überprüfung des Einflusses der Größenänderung auf die dimensionlosen Produkte:

Die Gleichheit der dimensionslosen Produkte kann auch in der Form:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = 1 = \frac{M_Q}{M_d^3 M_n}$$

geschrieben werden.

Das heißt die Gleichheit ist gegeben, wenn das Produkt der Maßstabsfaktoren gleich 1 ist.

Von den 6 variablen Parametern können 3 frei gewählt werden. Da es sich beim Medium immer um Luft handelt, sind  $\rho$  und  $\nu$  stets identisch. Als dritter Parameter wird der Durchmesser in Form des Maßstabsfaktors  $\kappa$  gewählt.

Betrachtet man zunächst die Re-Zahl folgt:  $\frac{M_n M_d^2}{M_\nu} = 1 \quad \implies M_n = \kappa^{-2}$

Für die Durchflusszahl  $\varphi$  folgt:  $\frac{M_Q}{M_d^3 M_n} = 1 \quad \implies M_Q = \kappa$

Für die Druckzahl  $\psi$  folgt:  $\frac{M_{\Delta p_t}}{M_\rho M_n^2 M_d^2} = 1 \quad \implies M_{\Delta p_t} = \kappa^{-2}$

Die Leistung im reibungsfreien, inkompressiblen Fall ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz zu:

$$P = \Delta p_t Q$$

Setzt man die erhaltenen Maßstabsfaktoren ein, ergibt sich:

$$M_P = M_{\Delta p_t} M_Q = \kappa^{-2} \kappa = \kappa^{-1}$$

Unter Berücksichtigung der gegebenen Werte erhält man bei einem Durchmesser des Modells von 250 mm eine Drehzahl von 10 000 rpm, einen 100-fachen Druckaufbau und eine 10-fache Leistung.



Zur Information:

Aus den genannten Gründen wird auf eine Reynolds-Zahl Ähnlichkeit verzichtet. Stattdessen wird als weiterer freier Parameter der Maßstabsfaktor des Druckaufbau  $M_{\Delta p_i}$  gewählt, welcher konstant gehalten wird. Es gilt also  $M_{\Delta p_i} = 1$ .

Aus der Druckzahl folgt dann: 
$$\frac{M_{\Delta p_i}}{M_\rho M_n^2 M_d^2} = 1 \quad \implies M_n = \kappa^{-1}$$

Einsetzen in die Durchsatzzahl ergibt: 
$$\frac{M_Q}{M_d^3 M_n} = 1 \quad \implies M_Q = \kappa^2$$

Für die Re-Zahl folgt: 
$$\frac{M_n M_d^2}{M_\nu} = M_{\text{Re}} \quad \implies M_{\text{Re}} = \kappa$$

Im konkreten Fall erhält man eine zehnmal kleinere Reynoldszahl, im Gegenzug steigt die Drehzahl nur noch um den Faktor 10 und der Volumenstrom sinkt auf 1/100. Außerdem muss nun nur noch ein 1/10 der Leistung aufgebracht werden.

c)

Die Verluste in der Anlage können beschrieben werden durch:

$$\Delta p_i = f(Q, d, \rho, \nu)$$

Eine Dimensionanalyse liefert:

|   | $\Delta p_V$ | $Q$ | $d$ | $\rho$ | $\nu$ |
|---|--------------|-----|-----|--------|-------|
| L | -1           | 3   | 1   | -3     | 2     |
| M | 1            | 0   | 0   | 1      | 0     |
| T | -2           | -1  | 0   | 0      | -1    |

|   | $\frac{\Delta p_V}{Q^2}$ | $\frac{Q}{\nu}$ | $d$ | $\rho$ |    |
|---|--------------------------|-----------------|-----|--------|----|
| L | -7                       | 1               | 1   | -3     | 2  |
| M | 1                        | 0               | 0   | 1      | 0  |
| T | 0                        | 0               | 0   | 0      | -1 |

|   | $\frac{\Delta p_V}{Q^2 \rho}$ | $\frac{Q}{\nu}$ | $d$ | $\rho$ |
|---|-------------------------------|-----------------|-----|--------|
| L | -4                            | 1               | 1   | -3     |
| M | 0                             | 0               | 0   | 1      |

|   | $\frac{\Delta p_V d^4}{Q^2 \rho}$ | $\frac{Q}{\nu d}$ |   |
|---|-----------------------------------|-------------------|---|
| L | 0                                 | 0                 | 1 |

Man erhält also 2 dimensionlose Kennzahlen:

$$\frac{\Delta p_V d^4}{Q^2 \rho} = \xi, \quad \frac{Q}{\nu d} = \text{Re}$$

Es gilt also:

$$\xi = \xi(\text{Re})$$



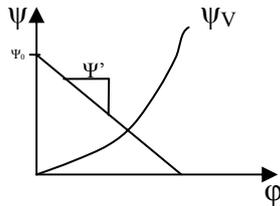
Für  $Re \rightarrow \infty$  verschwindet der Einfluss der Reynoldszahl und man erhält:

(Anlage) 
$$\xi = \frac{\Delta p_V d^4}{Q^2 \rho} = const = \xi_0$$

(Maschine) 
$$\psi = \frac{\Delta p_t}{\rho d^2 n^2} = \psi(\varphi)$$

Setzt man nun für den Totaldruck der Maschine den Verlust der Anlage ein, erhält man:

$$\psi = \frac{\Delta p_t}{\rho d^2 n^2} = \xi_0 \frac{Q^2 \rho}{d^4} \frac{1}{\rho d^2 n^2} = \xi_0 \frac{Q^2}{d^6 n^2} \quad \text{mit } \varphi = \frac{Q}{nd^3} \quad \Rightarrow \quad \psi = \xi_0 \varphi^2$$



mit  $\psi = \psi_0 - \psi' \varphi$

d)

Herstellungsbedingt haben die verwendeten Schaufeln in der Regel die gleiche Oberflächenrauigkeit. Da die Kennzahl der relativen Rauigkeit eine Verkleinerung um den Maßstabsfaktor fordert, ist die relative Rauigkeit somit nicht konstant. Man ist daher gezwungen entweder die Schaufeln aufwendig nachzubearbeiten, oder auch hier eine Aufwertung vorzunehmen.