Relaxationszeit λ

Belastungszeit $\frac{1}{\Omega} \gg \lambda$ „langsam"

$\frac{1}{\Omega\lambda} \gg 1$ Material verhält sich wie eine Flüssigkeit.

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) = \eta\dot{\gamma}$$

$\frac{1}{\Omega\lambda} \ll 1$ „schnell"

Material verhält sich wie ein elastischer Festkörper

$$\tau = \tau(\gamma) = G\gamma$$

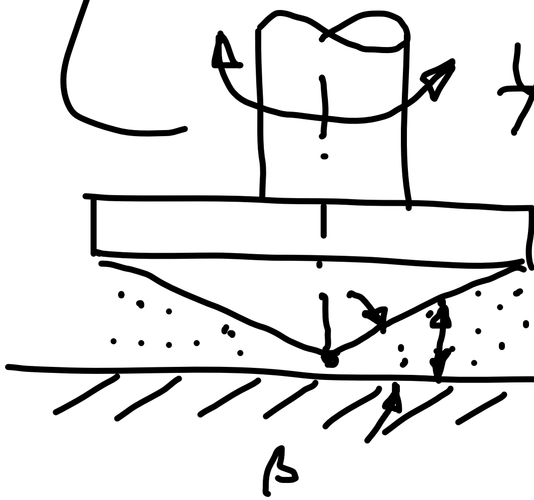
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\boxed{\tau = \eta \dot{\gamma} - \underline{\underline{\lambda}} \frac{d\tau}{dt}}$$

∇ $\tau = \hat{\tau} e^{i\Omega t}$

$\gamma = \hat{\gamma} e^{i\Omega t}$

Maxwellsche Δ Materialmodell einer viskoelastischen Flüssigkeit.



$\varphi = \hat{\varphi} e^{\underline{\underline{i\Omega t}}}$

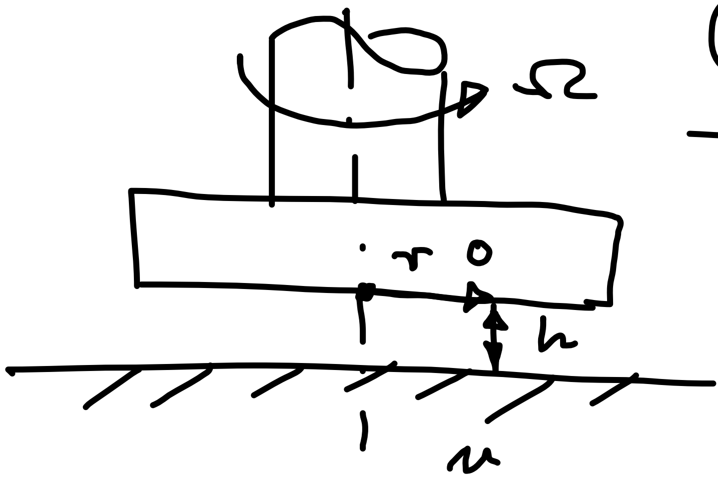
$h = r \, tg \beta$

β

$\vec{u}_0 = \Omega r \vec{e}_\varphi$

$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{r \, tg\beta} = \frac{\Omega}{tg\beta}$

⊕ homogene Scherdeformation.



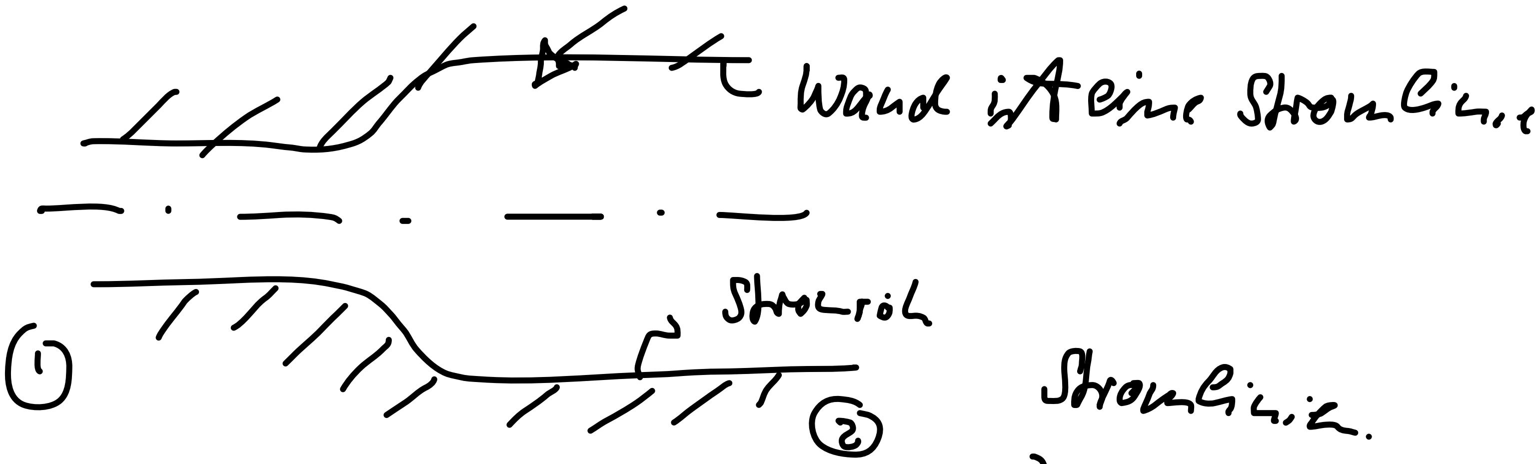
Ω, r, h

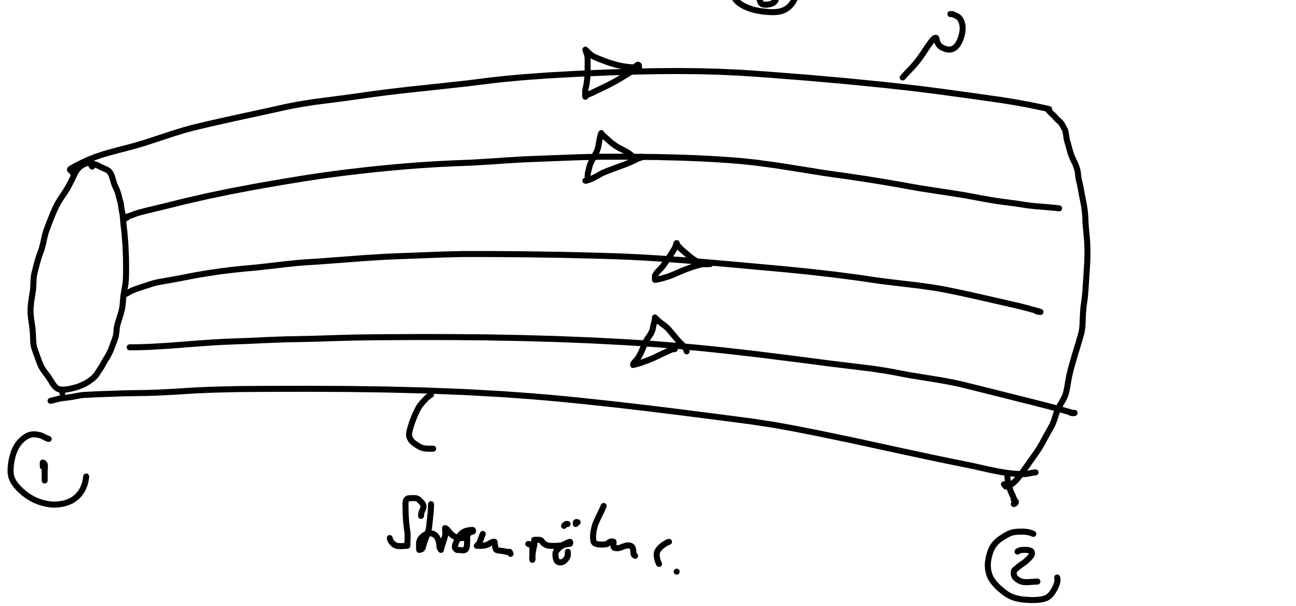
$\vec{u}_0 = \Omega r \vec{e}_\varphi$

$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{h}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Kontinuitätsgleichung für eine Stromröhre





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

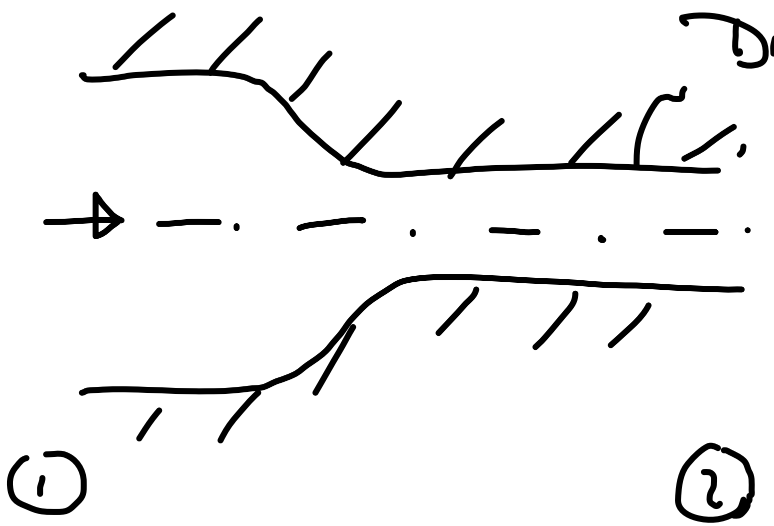
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

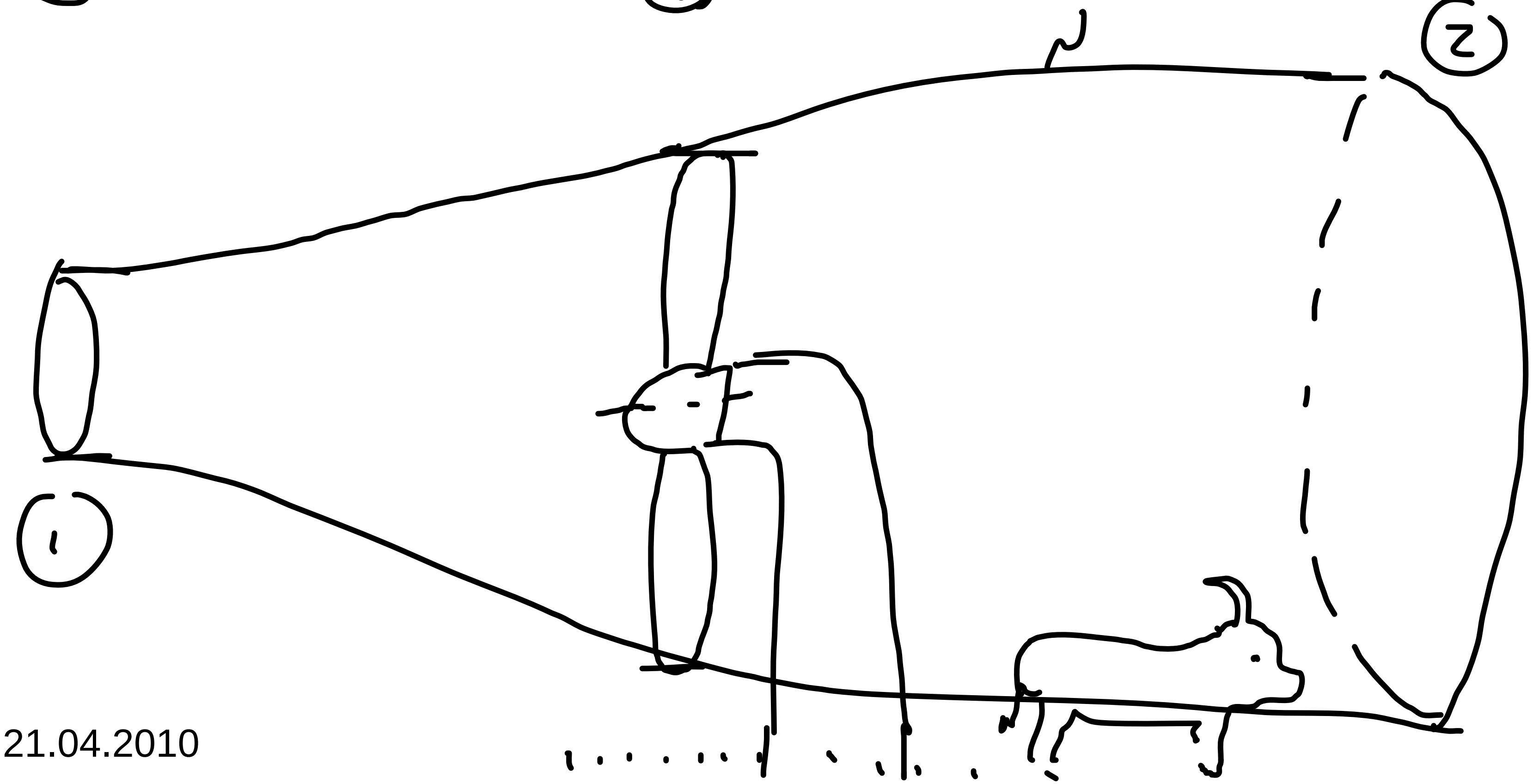
Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 4

Düse ist eine Stromröhre.





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

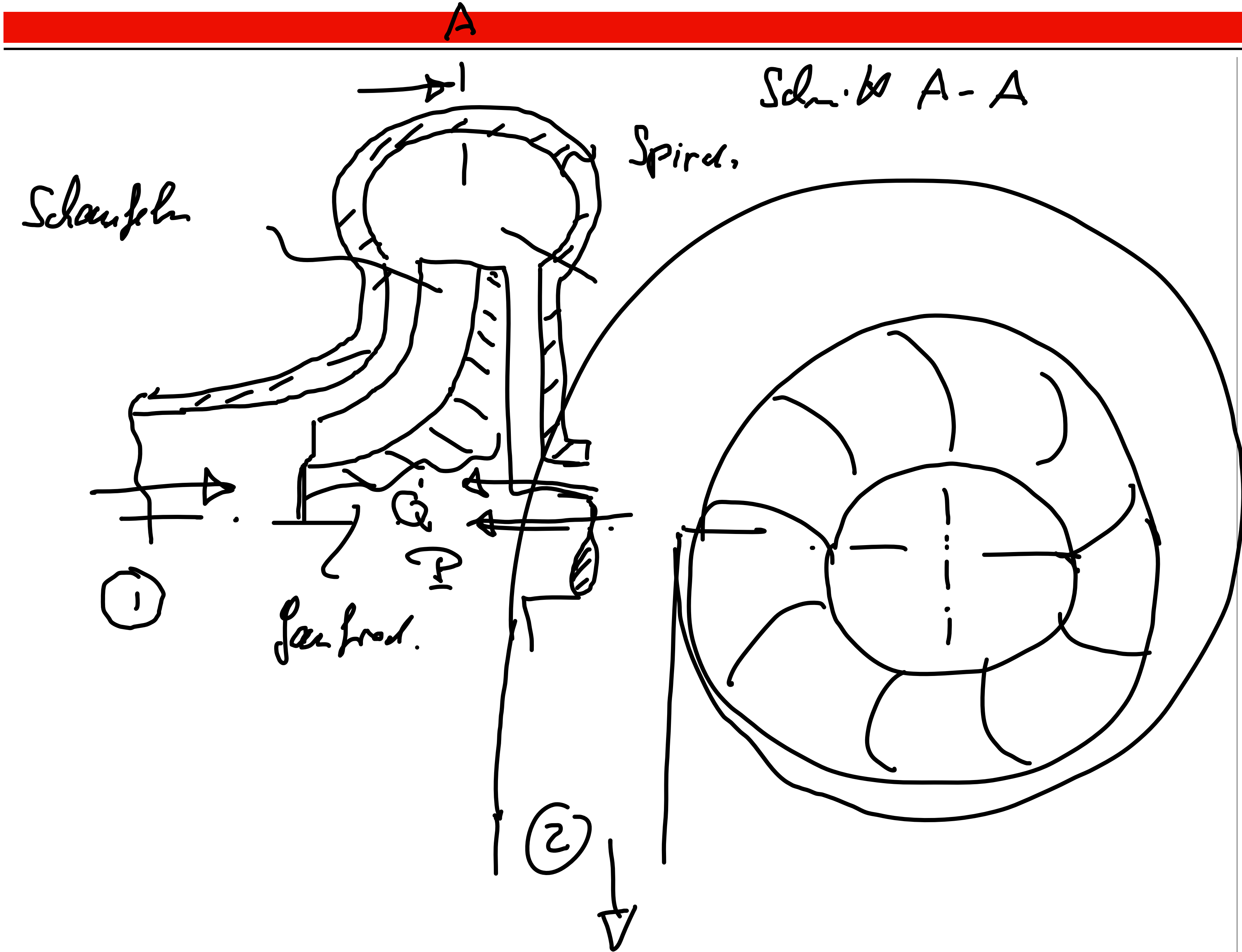
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

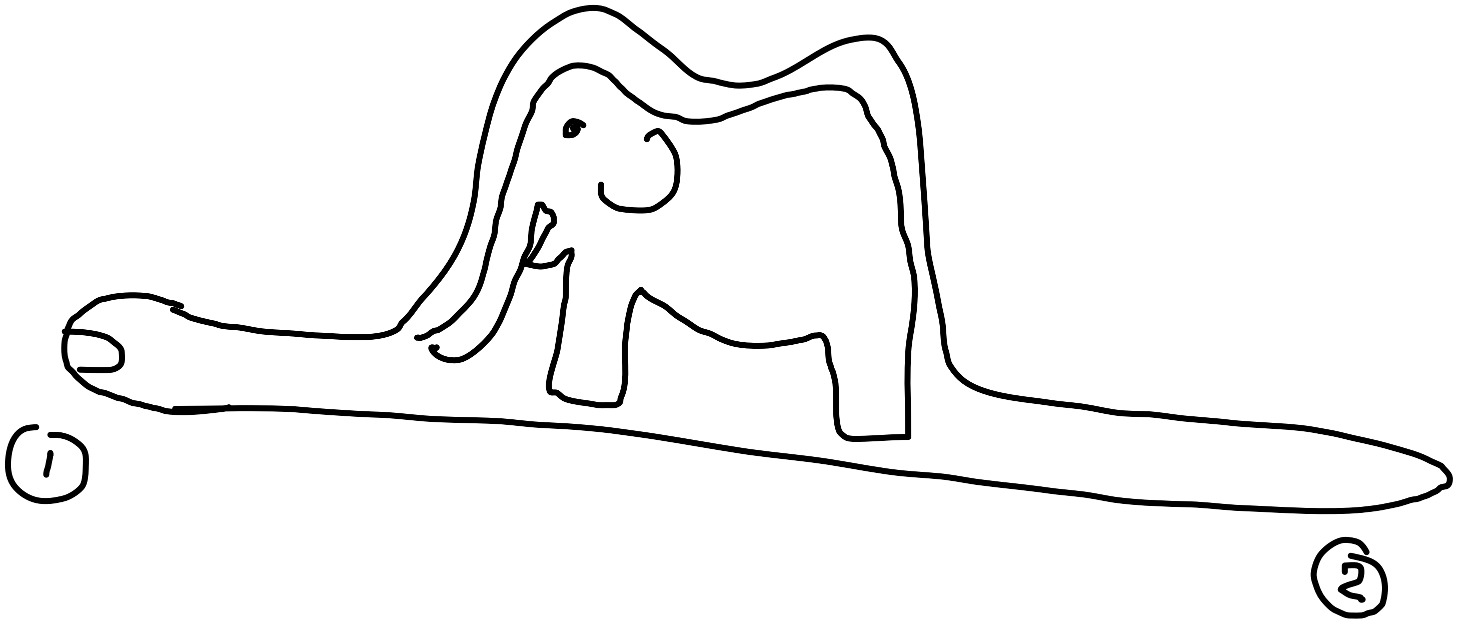
Vorlesung 4



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

FLUID
SYSTEM
TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbo-
maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4



- Ausgang der Stromröhre kann geschlossen sein.
- Die Wände der Stromröhre können flexibel sein.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Kontigleichung für eine Stromröhre

⇝ Druckaufbaugleichung

⇝ Effektive Nachgiebigkeit

⇝ Effektive Schallgeschwindigkeit.
(auch für Mehrphasensysteme).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

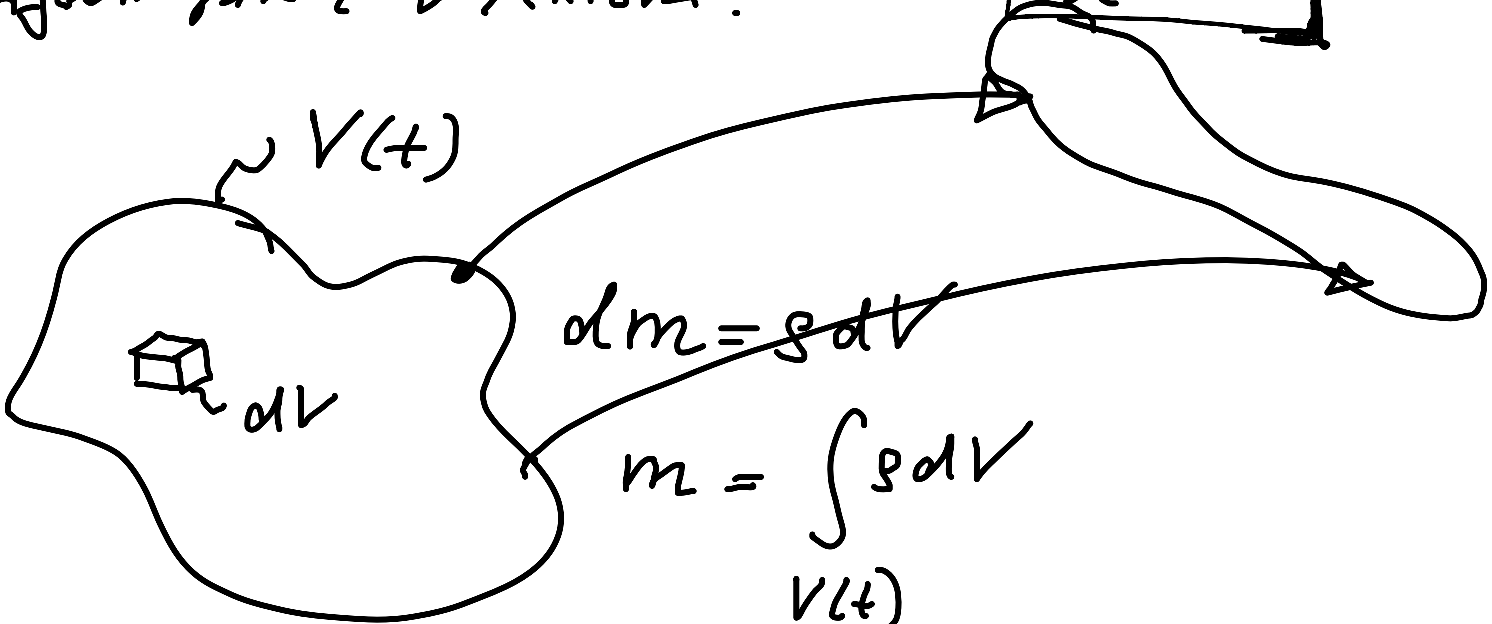
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Kontinuitätsgleichung:

Die Masse in einem materiellen Volumen bleibt zeitlich unveränderlich. $\Leftrightarrow m = \text{const.}$

Erfahrungssatz + Axiom. $\Leftrightarrow \frac{Dm}{Dt} = 0$



$$dm = \rho \, dV$$

$$m = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \qquad m = \int_{V(t)} \rho \, dV \qquad \Bigg\} \quad \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dV \overset{!}{=} 0$$

Problem: Integrationsgrenze sind zeitlich veränderlich.

Zwei Hinweise: 1. Leibnitzsche Regel.

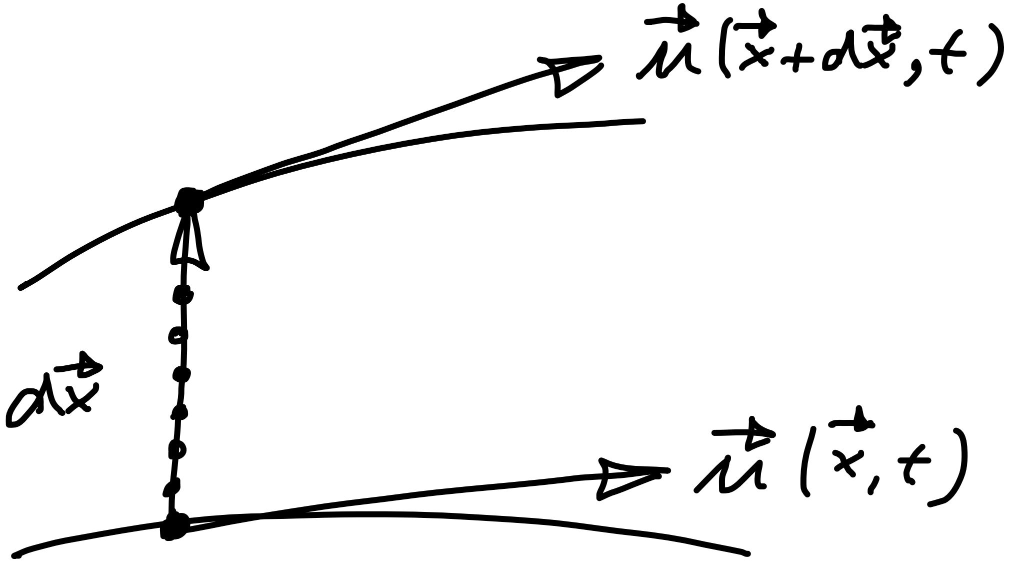
$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f \, dy \overset{?}{=} \ldots$$

$$2. \quad \frac{D}{Dt}(dV)\frac{1}{dV} = \operatorname{div} \vec{u}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4

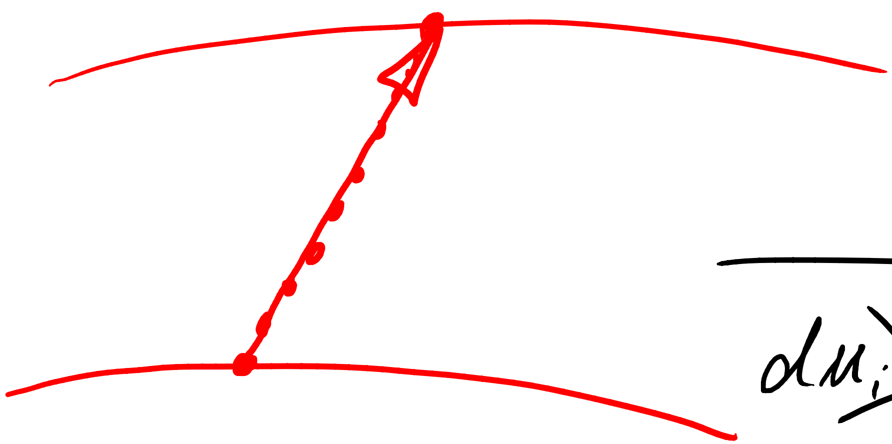


$$d\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}+d\vec{x},t) - \vec{u}(\vec{x},t)$$

$$d\vec{u} = \nabla\vec{u}\cdot d\vec{x}$$

Bahnlinie Taylorentwicklung.

Drehung + Dehnung.



$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

$$\cancel{du_i = \frac{1}{2}}$$

Fortsetzung folgt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 4

$$\underbrace{0 = \frac{Dm}{Dt}} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = \int_{V} \frac{D\rho}{Dt} \, dV + \int_{V} \rho \frac{D\, dV}{Dt}$$

$$= \int_{V} \frac{D\rho}{Dt} \, dV + \int_{V} \rho \, \mathrm{div}\, \vec{u} \, dV$$

$$0 = \int_{V} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \vec{u} \, dV$$

$V(t)$ materielle Volumen
V Kontrollvolumen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$0 = \int_V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{u}\; dV$$

muß für beliebiges Volumen erfüllt sein.

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{u} \equiv 0.} \qquad (1)$$

Kontigleichung in differentieller Form

gilt für jedes Flüssigkeitsteilchen.

Wenn die Flüssigkeit volumenbeständig ist, d.h.

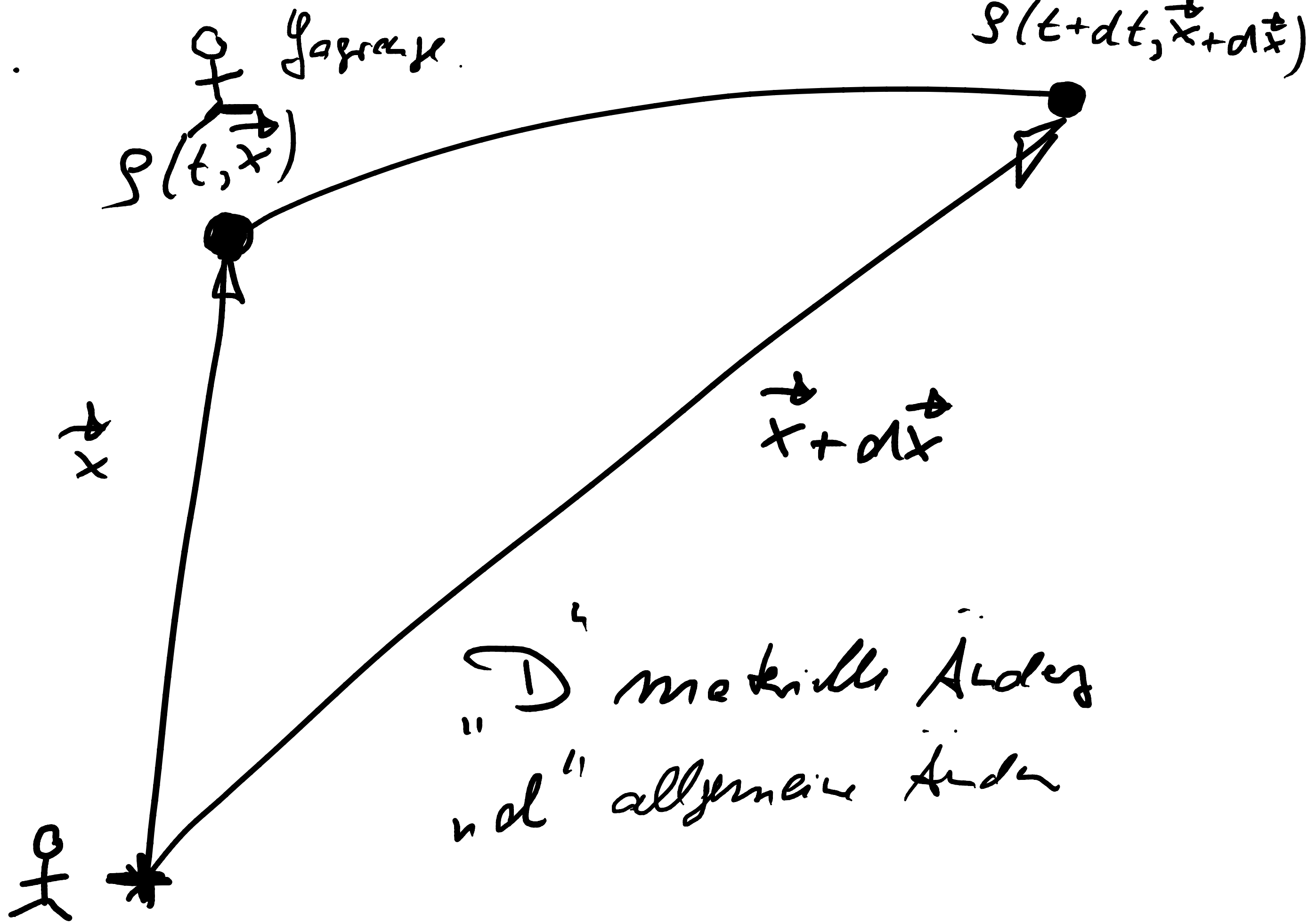
$\mathrm{div}\,\vec{u} \equiv 0$ folgt aus (1) $\frac{D\rho}{Dt} = 0.$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Die Dichte ρ bleibt längs einer Bahnlinie erhalten.



Euler

„D" materielle Änderung

„d" allgemeine Änderung

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$D\rho = \rho(t+dt, \vec{x}+d\vec{x}) - \rho(t, \vec{x})$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \nabla\rho \cdot d\vec{x} \quad \Big| \frac{1}{dt}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4

$D \hat{=} d$, da eine materielle Änderung betrachtet wird.

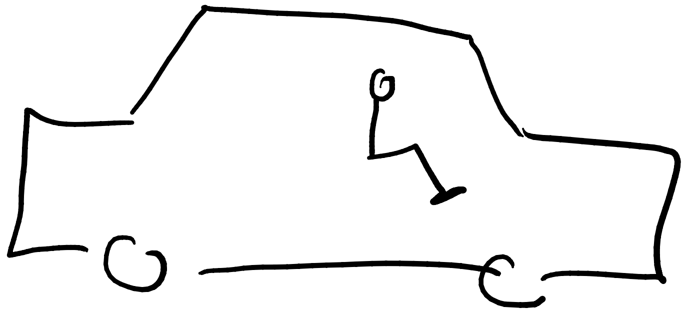
$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung der Dichte}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \nabla \rho}_{\text{konvektive Änderung der Dichte}}$$

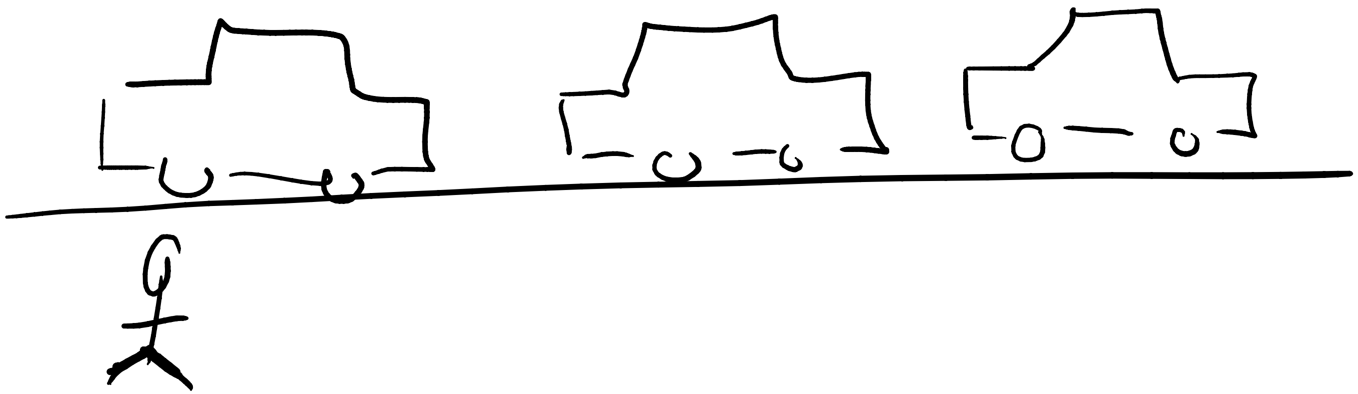
$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial (\,)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla (\,)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Lagrange: Mitbewegt mit dem materiellen Teil.



Euler: Raumfeste Beschreibung eines Syst.



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$0 = \frac{Dm}{Dt} = \int_V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \, dV$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u}}_{\text{Produktregel.}} \, dV$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \, dV$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \, dV$$

Satz von Gauß

$$\nabla \cdot (\;) \, dV = \vec{n} \cdot (\;) \, dS$$

$$\frac{D}{Dt} \int \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 4

$$0 = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \, dV}_{\text{lokale Änder.}} + \underbrace{\int_{S} \rho \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS}_{\text{Flussintegral.}}$$

Kontinuität in integraler Form.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \nabla\cdot\vec{u} = 0$$

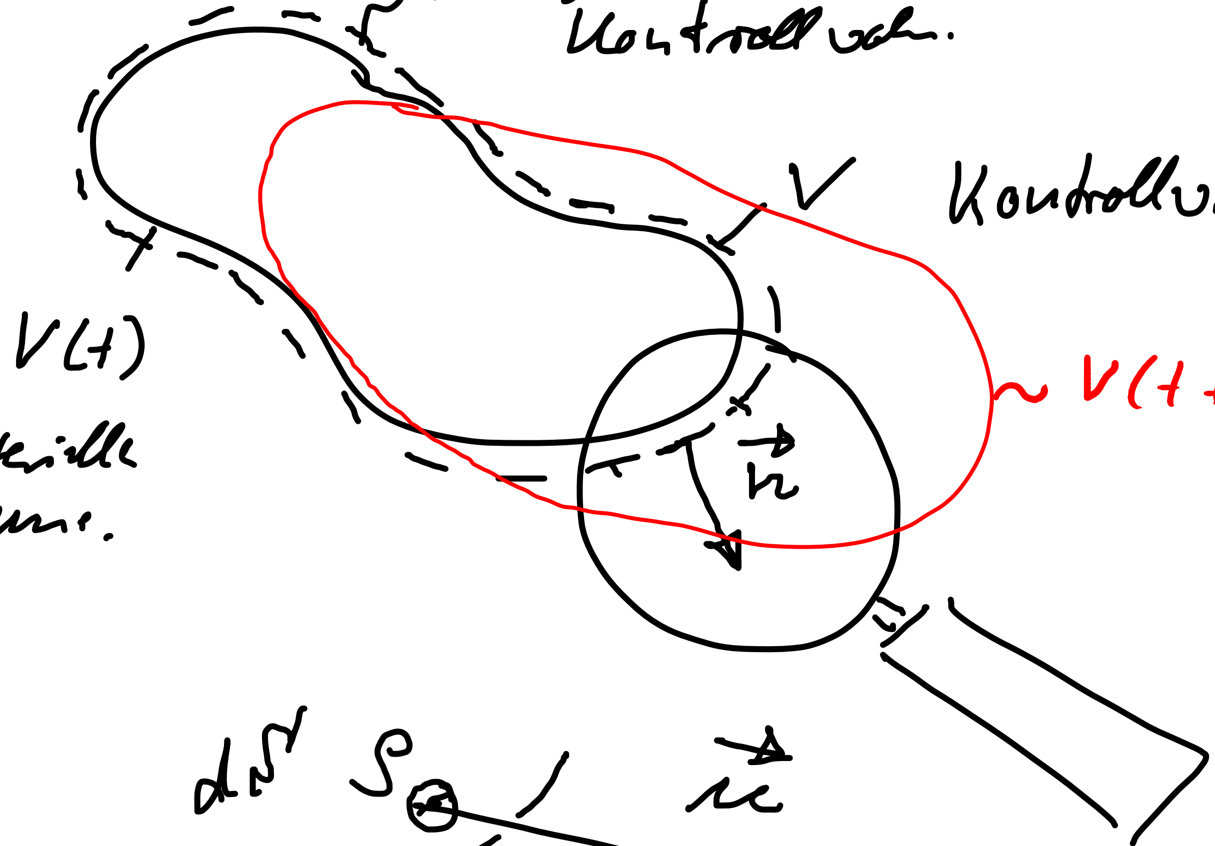
Kontinuität in differentieller Form.

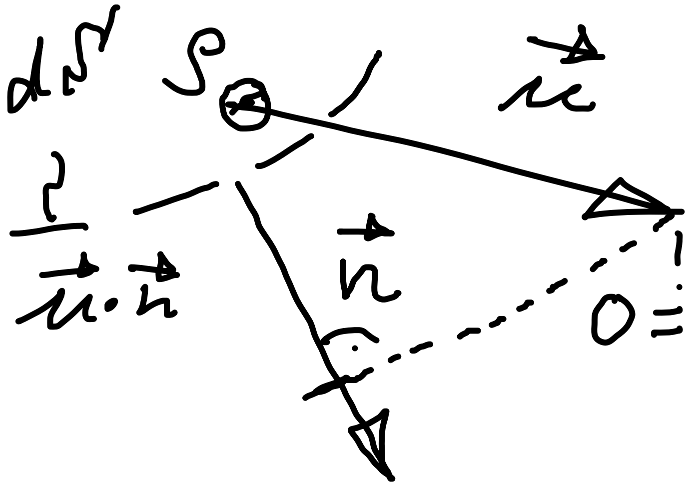
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 4

$\partial S'$ geschlossene Oberfläche des Kontrollvol.





$$u_n = \vec u \cdot \vec n$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_S \rho\, \vec u \cdot \vec n\, dS$$

V, S sind zeitfest.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Typische Bilanzgleich. Reynoldssches Transporttheorem.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \phi \, dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \phi \, dV}_{\text{lokale Änd.}} + \underbrace{\int_{S} \phi \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS}_{\text{Fluß}}$$

ϕ ist ein Platzhalter für

ρ Dichte

T Temperatur

c Konzentration

$\rho\vec{u}$ Impuls.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 4