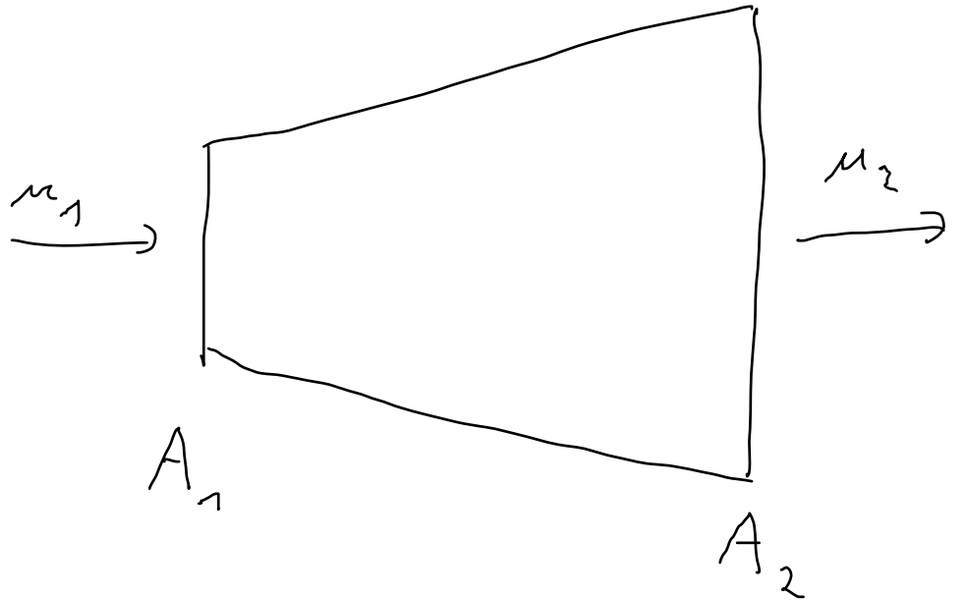
1)

$\rho = konst.$

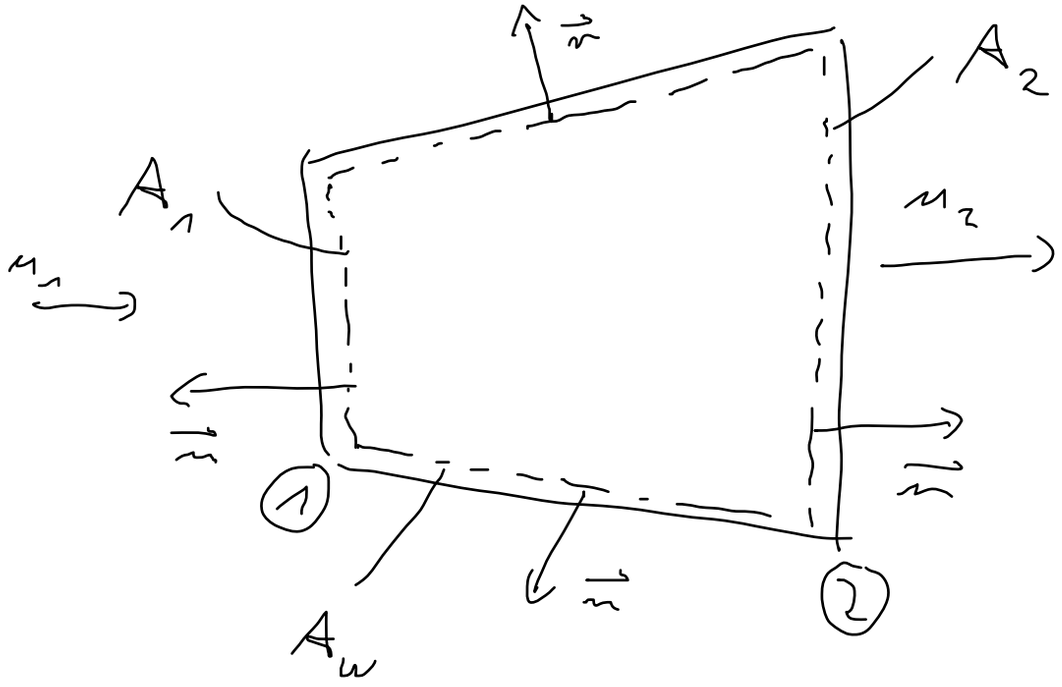



a)

$u_2 = ?$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5




$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \iint_S \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} \to 0$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatronik

Vorrechenübung 5

$$\iint_{A_1} \rho \vec{w} \circ \vec{w} \, dS + \iint_{A_2} \rho \vec{w} \circ \vec{w} \, dS$$

$$+ \iint_{A_w} \rho \vec{w} \circ \vec{w} \, dS = 0$$

($\vec{w} \perp \vec{n}$ auf $A_w$, also $\vec{w} \circ \vec{n} = 0$)

$$\Rightarrow -\rho w_1 A_1 + \rho w_2 A_2 = 0$$

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

$$\Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{A_1}{A_2} w_1}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

b)

Bernoulli:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2$$

($\rho g z_1 = 0$, $\rho g z_2 = 0$)

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 - \frac{\rho}{2} \left( \frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

aus a)

$$\Rightarrow \boxed{p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

c)

$F_x = ?$

$F_{Str} \longrightarrow D$

Impulssatz:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}\, dV + \iint_S \rho \vec{u}\,(\vec{u} \circ \vec{n})\, dS$$

($\frac{\partial}{\partial t} \to 0$)

$$= \iint_S \vec{\pi}\, dS$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5

$$\iint_{A_1} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS + \iint_{A_2} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS$$

$$+ \iint_{A_W} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_{A_1} \vec{t} \, dS$$

$$+ \iint_{A_2} \vec{t} \, dS + \iint_{A_W} \vec{t} \, dS$$

$$= F_{D \to \text{Ktr}} = - F_{\text{Ktr} \to D}$$

$$\vec{t} = - p \vec{n} \, .$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatronik

Vorrechenübung 5

In x-Richtung:

$$-\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{Ystr \to D}$$

aus a)

$$\Rightarrow F_{Ystr \to D} = \rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

aus b)

$$\Rightarrow \boxed{F_{Ystr \to D} = \frac{\rho}{2} v_1^2 A_1 \left[2 - \frac{A_1}{A_2} - \frac{A_2}{A_1}\right] + p_1 (A_1 - A_2)}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

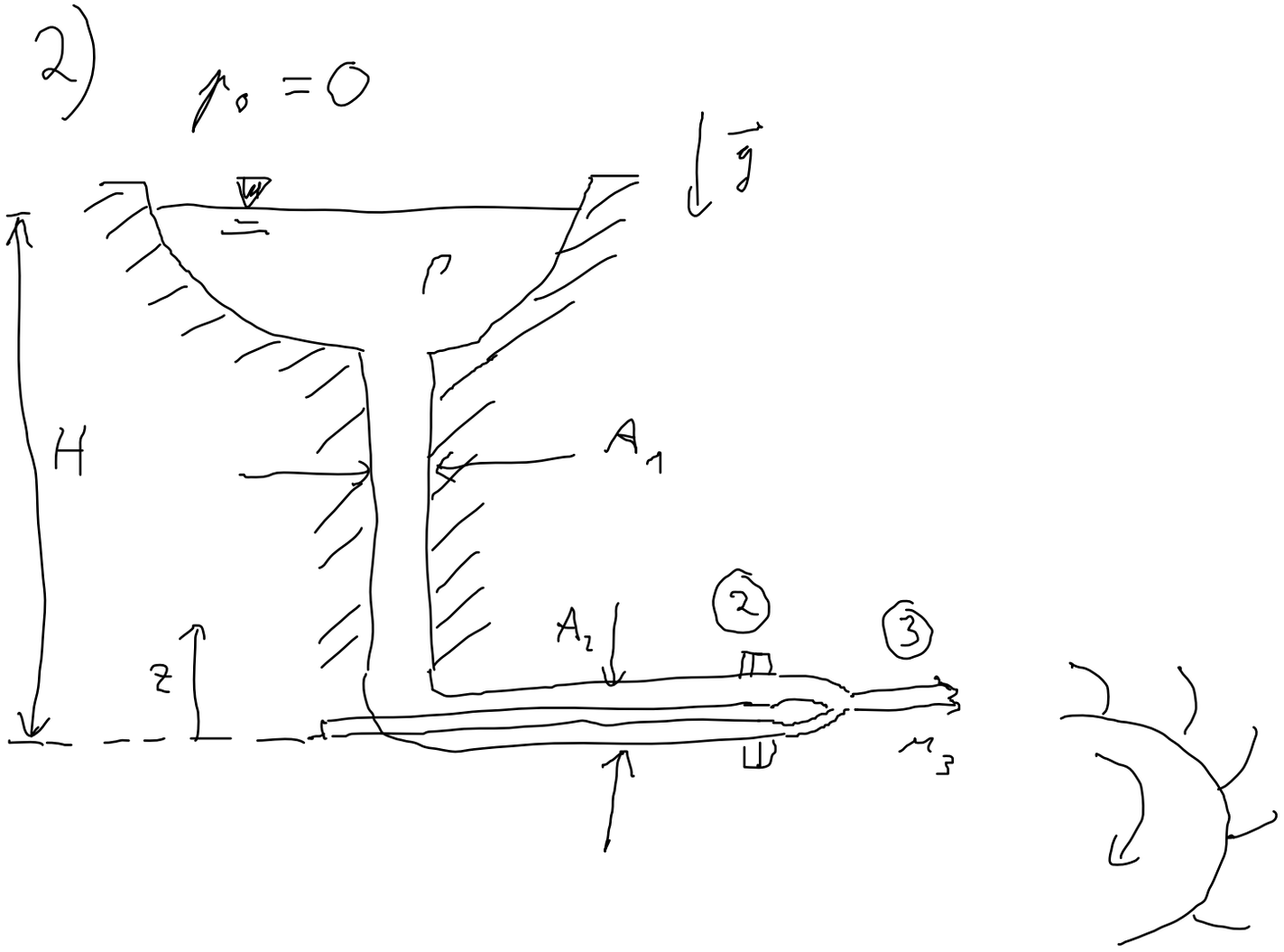
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatronik

Vorrechenübung 5






Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5

a) $u_3 = ?$

$$\cancel{p_0} + \frac{\rho}{2} u_0^2 + \rho g z_0 = \cancel{p_0} + \frac{\rho}{2} u_3^2 + \rho g z_3$$

$\frac{\rho}{2} u_0^2 \approx 0$

mit $z_3 = 0$ und $z_0 = H$

$$\Rightarrow \rho g H = \frac{\rho}{2} u_3^2 + \rho \cdot g \cdot 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \sqrt{2 g H}}$$

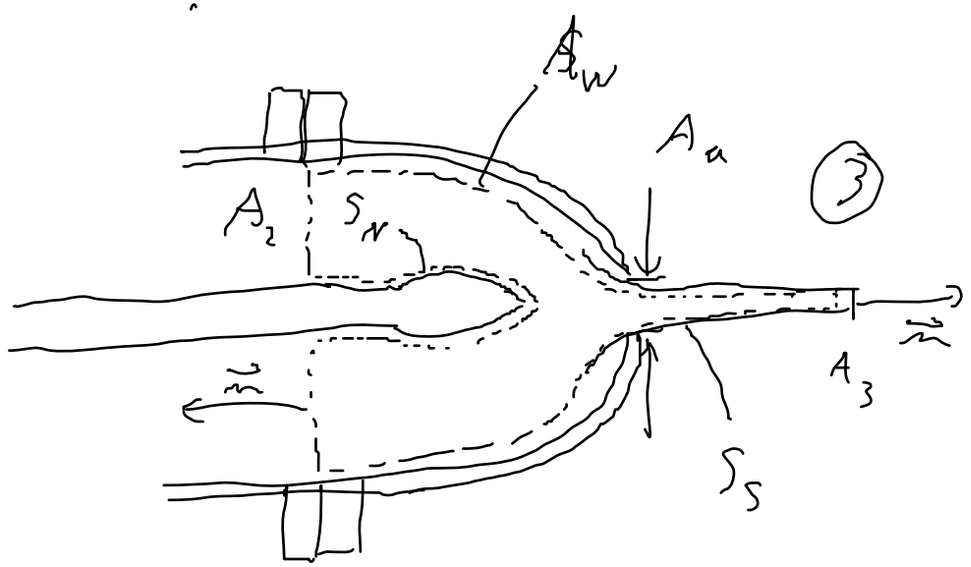
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

b)

$p_2 = ?$ $\quad u_2 = ?$




$p_0 = 0$

$$\iint_{A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{A_3} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{A_W} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_M} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_S} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

($\vec{u} = 0$ auf $A_W$, $\vec{u} = 0$ auf $S_M$, $c = 0$ auf $S_S$)



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5

$$-\rho w_2 A_2 + \rho w_3 A_3 = 0$$

mit $A_3 = \alpha A_a$

$$\Rightarrow \boxed{w_2 = w_3 \frac{\alpha A_a}{A_2}}$$

Druck an der Stelle 2:

$$p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2 + \rho g x_2 = p_0 + \frac{\rho}{2} w_3^2 + \rho g x_3$$

aus a)

mit $x_2 = x_3$ und $p_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{p_2 = \rho g H \left[1 - \left(\alpha \frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5

c)

$F_{Str \to D} = ?$ $\quad F_N$ bekannt

Impulssatz:

$$\iint \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS + \iint \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS$$

$A_2 \quad = F_{D \to Str} \quad = F_{N \to Str} \quad A_3$

$$= \underbrace{\iint \vec{A} \, dS}_{A_W} + \underbrace{\iint \vec{A} \, dS}_{A_N} + \underbrace{\iint \vec{A} \, dS}_{A_2}$$

$$+ \underbrace{\iint \vec{A} \, dS}_{A_3 \; 0} + \underbrace{\iint \vec{A} \, dS}_{A_5 \; 0, \text{ da } p_0 = 0}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

In x - Richtung:

$$-\rho v_2^2 A_2 + \rho v_3^2 A_3 = -F_{Ytr \to W} - F_{Ytr \to N} + p_2 A_2$$

$$\Rightarrow F_{Ytr \to W} = -\rho v_3^2 \left[\alpha A_a - \left(\alpha \frac{A_a}{A_2}\right)^2 A_2\right] + p_2 A_2 - F_{Ytr \to N}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Ytr \to W} = 2\rho g H \left[1 - \left(\alpha \frac{A_a}{A_2}\right)^2\right] A_2 - \rho v_3^2 \alpha A_a \left(1 - \alpha \frac{A_a}{A_2}\right) - F_{Ytr \to N}}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 5