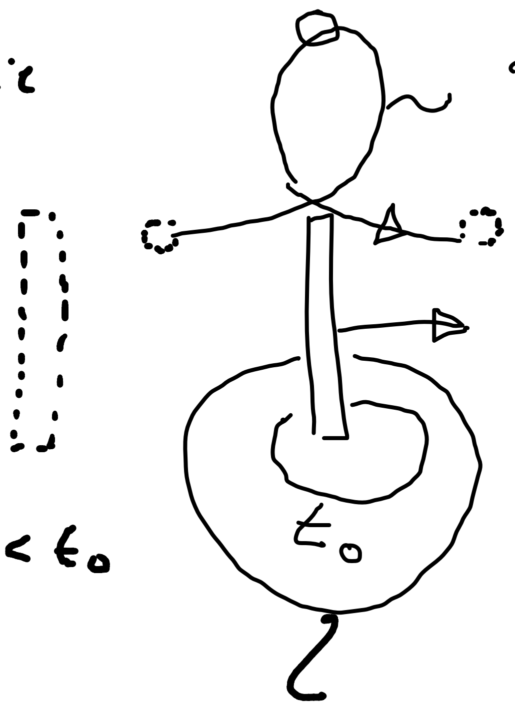
Bahnlinie

$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

ruhender Beobacht.

$t < t_0$



t_0

Bahnlinie

$t > t_0$

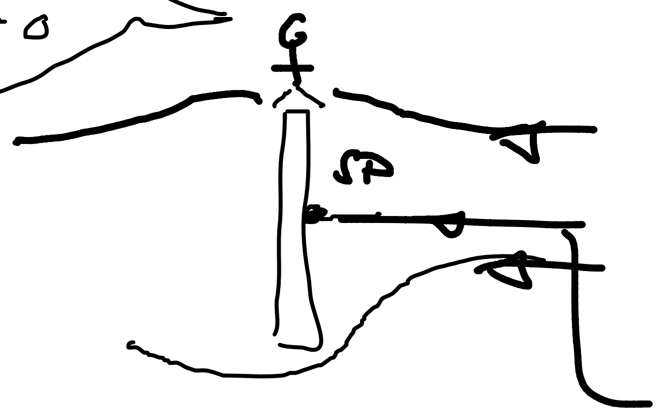
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u},$$

mit

$$\vec{x}(t=0) = \vec{\xi}$$

Stromlinie

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$



SP

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|},$$

mit

$$\vec{x}(s=0) = \vec{x}_0 .$$

Staupunktstromlin.

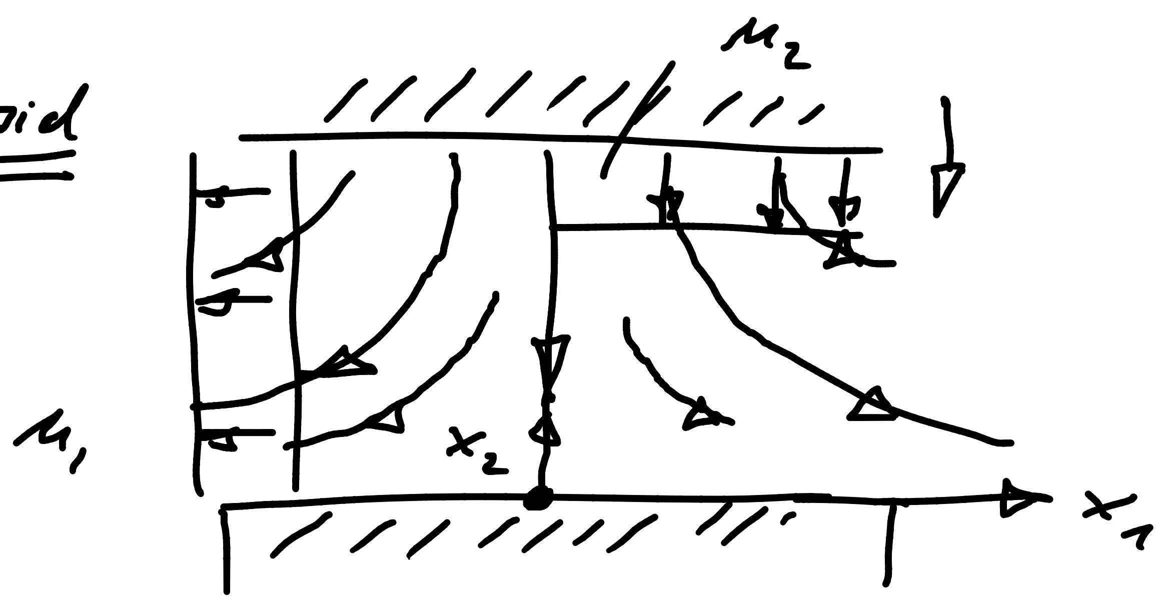
SP = Staupunkt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

Beispiel



Wenn die viskose Reibung klein ist im Vergleich zu d. Trägheitskräfte,

dann stellt sich das ebene

Geschwindigkeitsfeld

$$u_1 = a x_1 \,, \quad u_2 = -a x_2$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Differentialgleichung für die Bahnlinie

$$\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \quad \text{mit} \quad \vec{x}(0) = \vec{\xi}}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 = a x_1 \rightsquigarrow \frac{dx_1}{x_1} = a\,dt$$

$$\ln \frac{x_1}{\xi_1} = a(t - t_0)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_2 = -a x_2$$

$$\frac{dx_2}{x_2} = -a\,dt$$

$$\ln \frac{x_2}{\xi_2} = -a(t - t_0)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

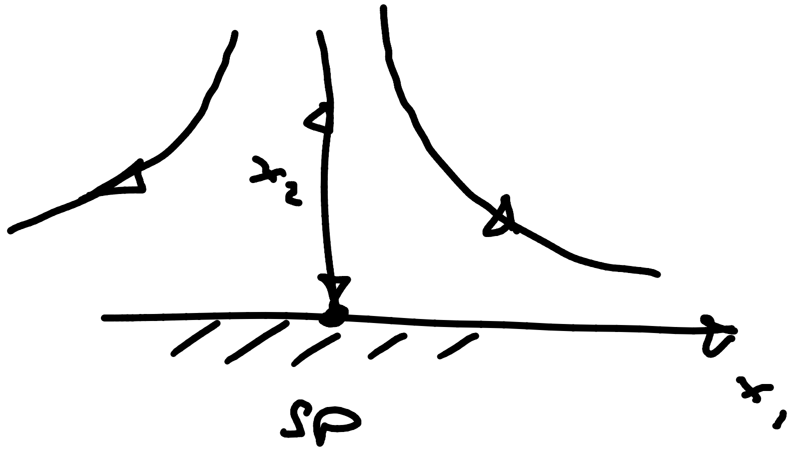
$$\frac{dx_2}{x_2} = -\frac{dx_1}{x_1}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

$$\ln \frac{x_2}{\xi_2} = -\ln \frac{x_1}{\xi_1}$$



$$\frac{x_2}{\xi_2} = \left(\frac{x_1}{\xi_1}\right)^{-1}$$

$$x_2 = \xi_2 \frac{\xi_1}{x_1} \sim \frac{1}{x_1}$$

Im Beispiel sind Stromlinien = Bahnlinien.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

Stromlinie $t = $ fest.

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{u_1}{|\vec{u}|} = \frac{a x_1}{|\vec{u}|}$$

$$\frac{dx_2}{ds} = -a \frac{x_2}{|\vec{u}|}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\cancel{d} x_2}{\cancel{d} x_1} \leadsto x_2 = x_{20} \frac{x_{10}}{x_1}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

1 <u>Kontigleichung</u>

2 Impulssatz ⇝ Bernoullische Glch.

3 Drallsatz ⇝ Eulerglch.

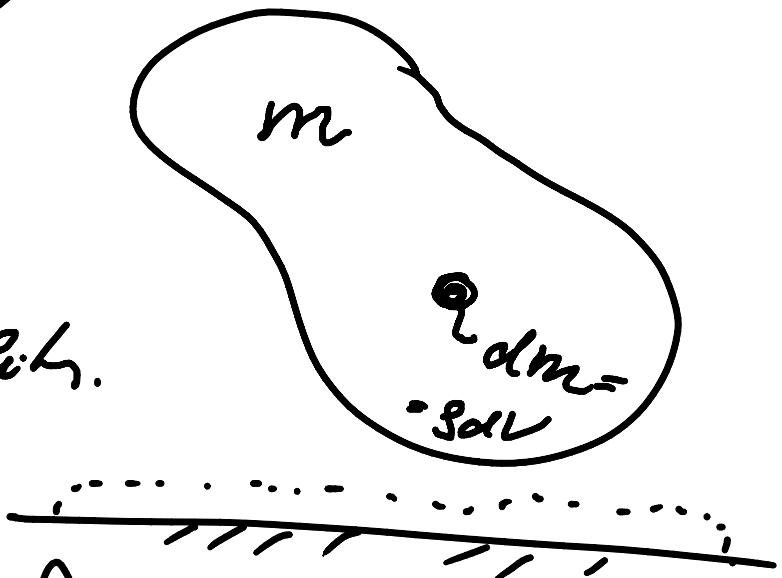
4 Energiegleichung ⇝ Energiegleichung für ein Stromröhr.

5 2. Hauptsatz.

Zur Kontinuität.

Die Masse eines materiellen Körpers bleibt zeitlich unverändert.

$$\frac{D}{Dt}(m) = 0 \quad ✓$$



„$\frac{D}{Dt}$“ materielle Zeitableitung.

$$m = \int dm = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

Problem: Zeitliche Änderung bei veränderlichen Integrationsgrenze.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dV \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f \, dy = \text{Leibnitzsche Regel} \; \ldots\ldots$$

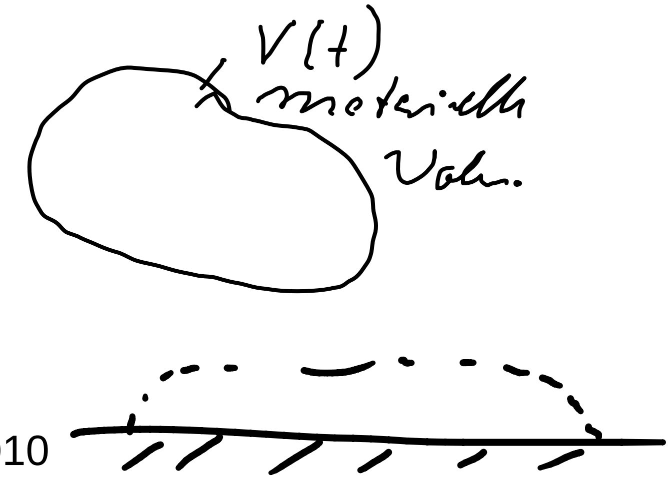
Reynoldssches Transporttheorem

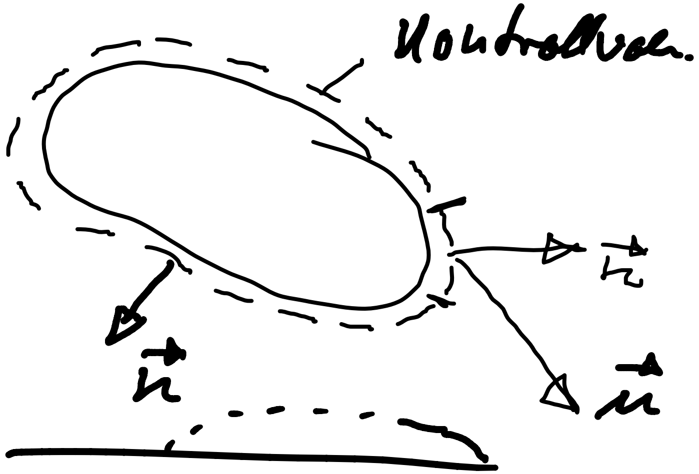
($m_i h_i$)

⇒ Geb. Teil. — lokale Änd. — Flussterm.

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \phi \, dV \underset{\text{Trick.}}{=} \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \phi \, dV}^{\text{lokale Änd.}} + \overbrace{\oint_{S} \phi \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS}^{\text{Flussterm.}}}$$

⊖ $V(t)$ ⊕ V, S sind fest.





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

Anwendung auf die Kontinuität.

$$\frac{Dm}{Dt} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{V(t)} \rho \, dV \overset{!}{=} 0$$

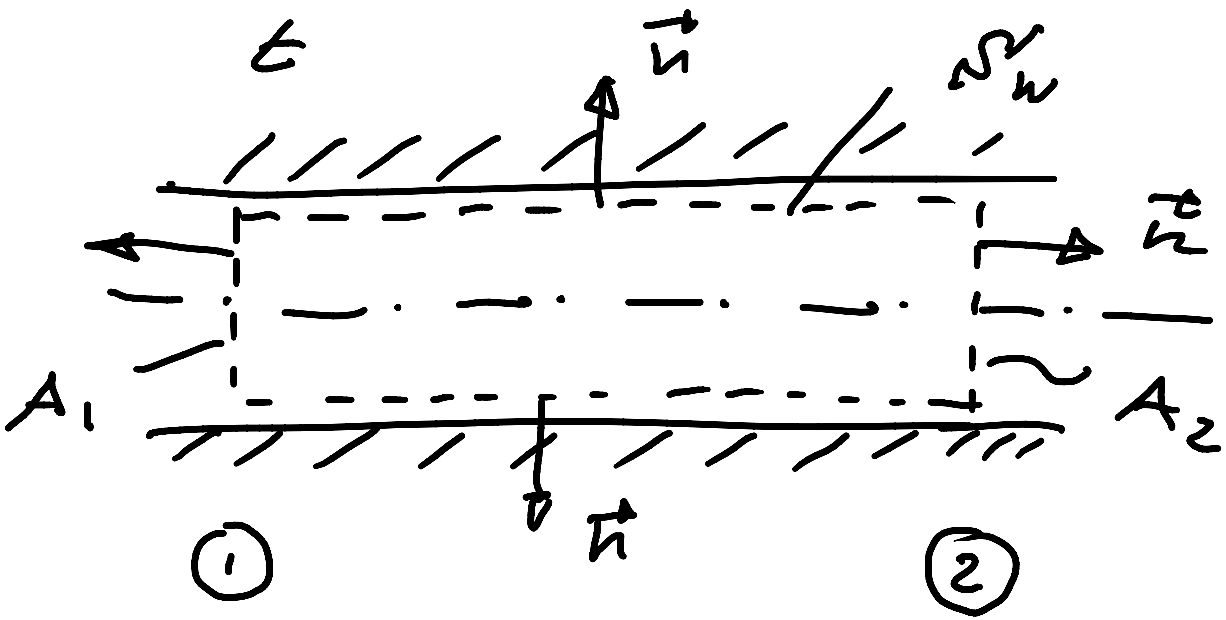
$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} \rho \, dV + \oint\limits_{S} \rho \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS = 0 .$$

Integrale Form der Kontinuität.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6



$$S = A_1 + A_2 + S_w$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{A_1} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{A_2} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{S_w} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

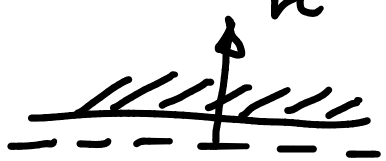
Definition

Massenstrom $\dot{m}_1 := \left| \int_{A_1} \rho \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{<1} \, dS \right|$

$$\dot{m}_2 := \left| \int_{A_2} \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \right|$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \int_{S_W} \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

$\vec{n}$



1. Annahme: S_W starr und nicht porös.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

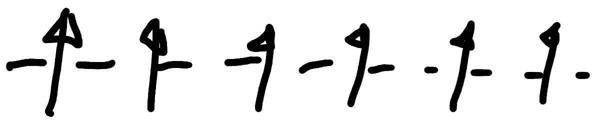
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

2. Annahme: Im zeitlichen Mittel stationäre Strömung

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Differentielle Form der Kontinuität

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \, \vec{u}\cdot\vec{n} \, dS = 0.$$

$\Downarrow$ Satz von Gauß.

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \, dV = 0$$

V ist beliebig. $\rightsquigarrow$ $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0,}$$

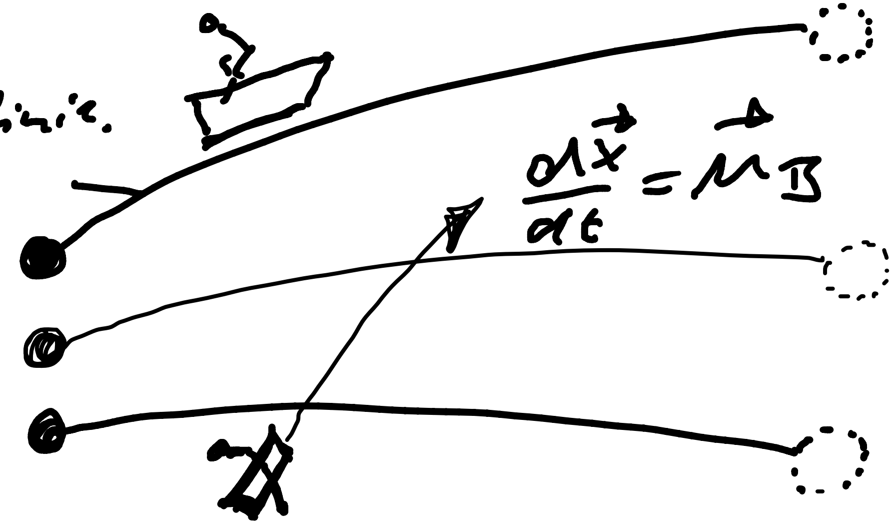
mit $$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\rho .$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\frac{D\rho}{Dt}$$

Bahnlinie.



$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}_B$$

$$\rho = \rho(\vec{x}, t)$$

Änderung der Dichte eines Teilchens. $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \nabla\rho \cdot d\vec{x}$

Allgemeine Zeitableitung

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{} \cdot \nabla\rho$$

Beobachter-Geschwindigkeit $\vec{u}_B$

Mitbewegter Beobachter.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \qquad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\rho$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

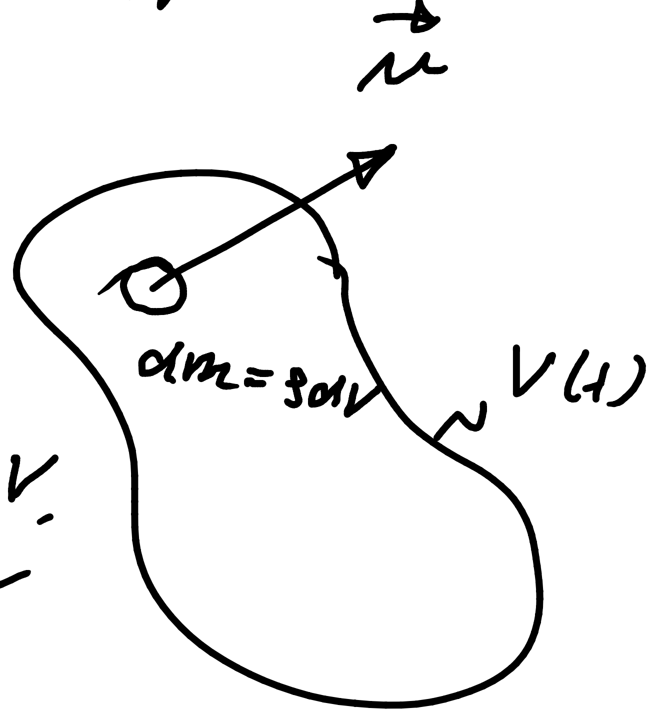
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

Impulssatz:

Zeitliche Änderung des Impulses eines Flüssigkeitskörpers ist gleich der Kraft auf den Körper.

$$\underbrace{\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}}$$

$$\vec{I} = \int_m d\vec{I} = \int_m \vec{u}\, dm = \int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV$$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

$$\vec{F} = \oint_{S} \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{f}\, dV$$

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad \text{Spannungsvektor}$$

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} \quad \text{Volumenkraft}$$

$$\rho \vec{k} = \vec{f}$$

$$\vec{k} \qquad \text{Massenkraft.}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{u}\, dV + \oint_S \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \oint_S \vec{t}\, dS + \int_V \vec{k} \rho\, dV$$

Anwendungsbeispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

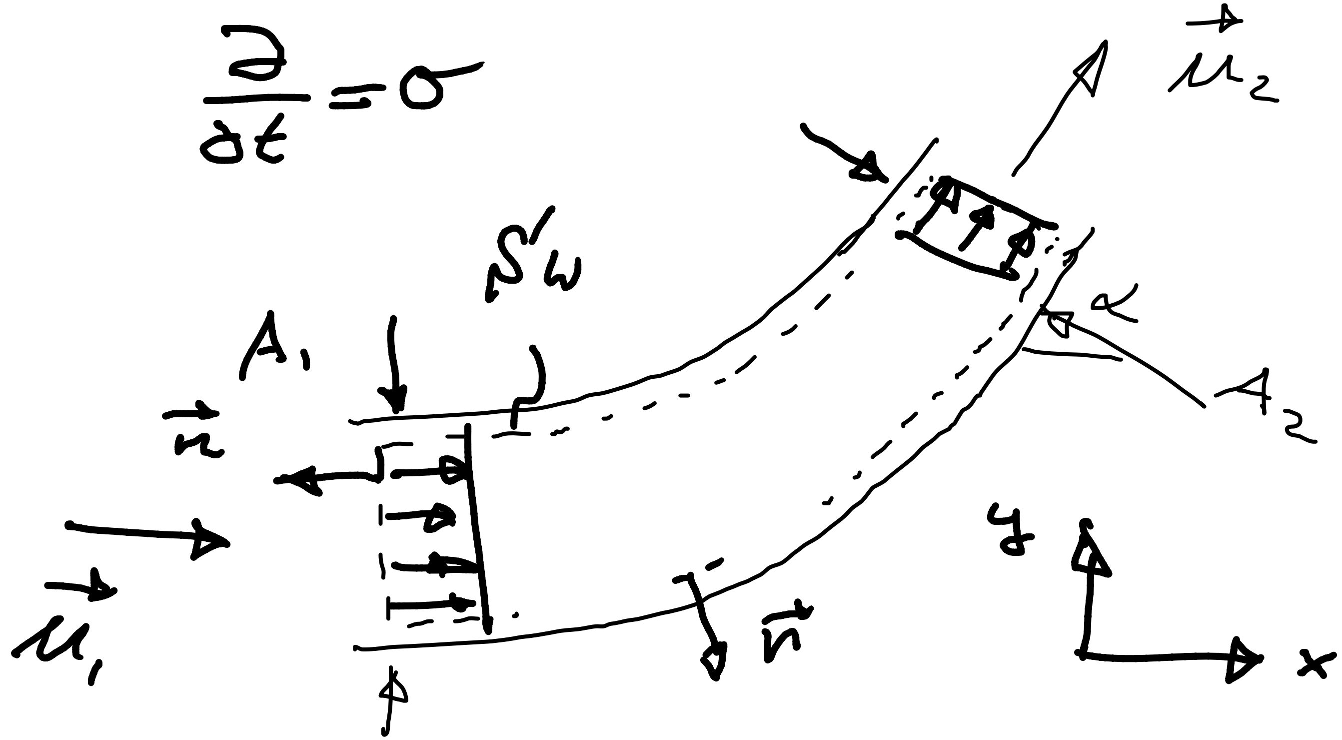
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$



Kraft der Flüssigkeit auf die Rohrleitung: $\vec{S}_W$

$$\vec{u}_1 = u\,\vec{e}_x$$

$$\vec{u}_2 = u_{2x}\,\vec{e}_x + u_{2y}\,\vec{e}_y$$

$\Big\}$ u_1, u_{2x}, u_{2y} sind konstant über den Querschnitt

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

$$\int_{A_1} \rho\, \vec{u}_1\, \vec{u}_1 \cdot \vec{n}\, dA + \int_{A_2} \rho\, \vec{u}_2\, \vec{u}_2 \cdot \vec{n}\, dA =$$

$$-p_2 \vec{n}_2 = \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y$$

$$= \int_{A_1} \vec{t}_1\, dA + \int_{A_2} \vec{t}_2\, dA + \underbrace{\int_{A_W} \vec{t}\, dA}_{\vec{F}_{Wand \to Flüssigkeit}}$$

$$\vec{t}_1 = -p_1 \vec{n}_1, \quad \vec{n}_1 = -\vec{e}_x$$

$$\vec{t}_2 = -p_2 \vec{n}_2$$

$$\vec{f} \equiv 0$$

$$-\vec{u}_1 \dot{m} + \vec{u}_2 \dot{m} = \qquad = -\vec{F}_{Flüssig. \to Wand.}$$

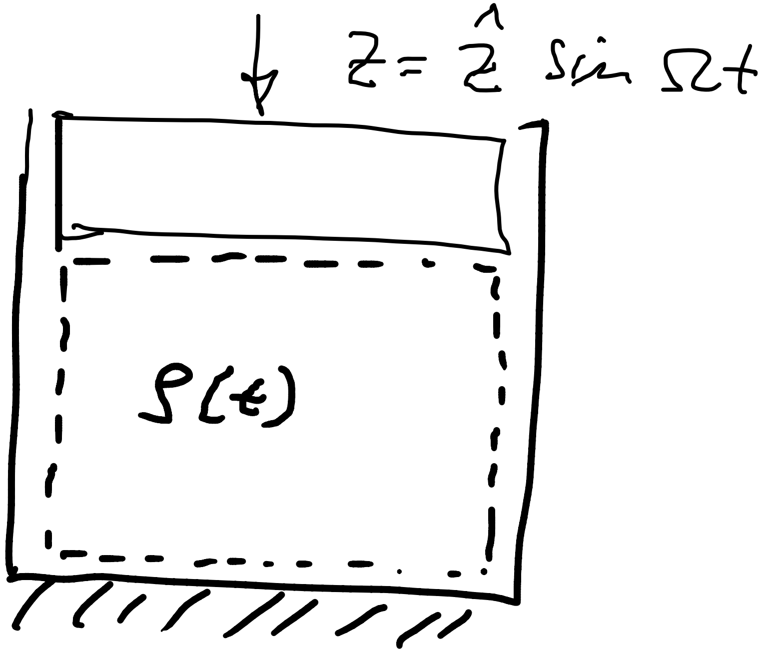
$$= p_1 A_1 \vec{e}_x - p_2 A_2 \left[\cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y\right] - \vec{F}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6

$$+(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\dot{m} - p_1 A_1 \vec{e}_x + p_2 A_2 \left[\cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y\right] = \vec{F}$$



$$\dot{\rho}(V - zA) - \rho \dot{z} A = 0.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 6