Alternativer Beweis Archimedes

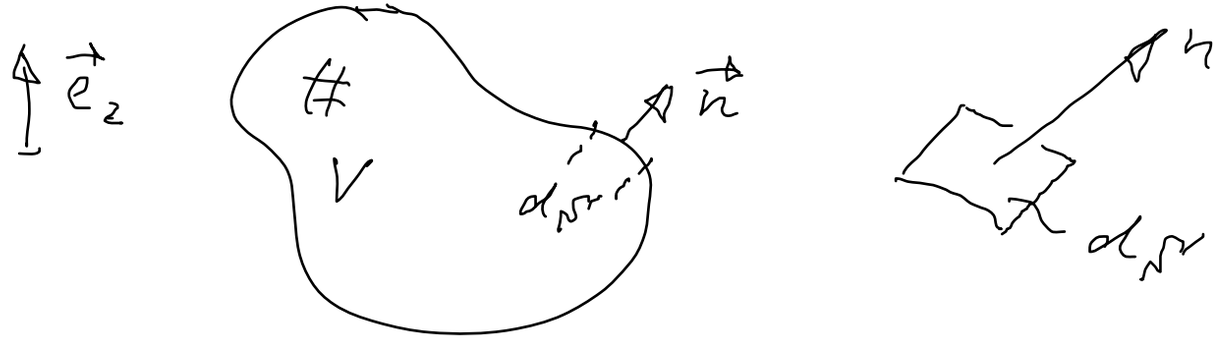
$\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$

$\vec{g} = -g \vec{e}_z$

Hydrostatischer Grundsatz: $\nabla p = \vec{f}$

$\vec{n} = 0$

$d\vec{F} = -p \vec{n}\, dS'$



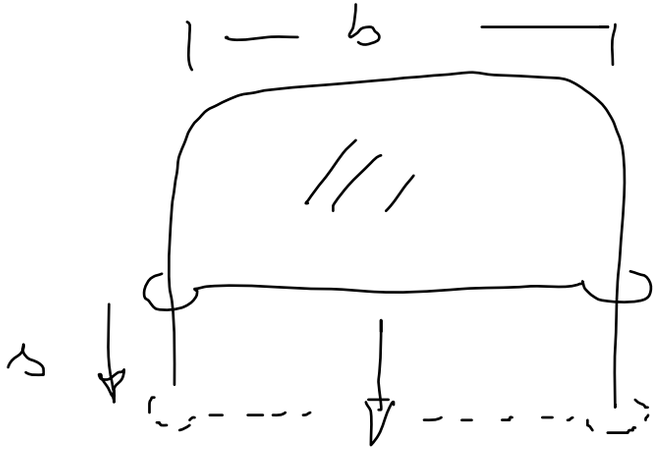
$$\vec{F} = \oint_{S'} -p \vec{n}\, dS' = \iiint_V -\nabla p\, dV$$

Gauß: $\vec{n}\, dS' = \nabla\, dV$

$$= \iiint_V -\vec{f}\, dV = -\vec{f} \iiint_V dV = -\vec{f} V = \rho g V \vec{e}_z$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5

Oberflächenspannung



$F \sim b$

$F \neq F(s)$ freie Oberfläche

$F = F(s)$ Membran

$$F = 2\sigma b$$

$$[\sigma] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} \qquad \{\sigma\} = \frac{N}{m}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wasser bei Raumtemperatur

Kapillarkonstante

$$\sigma = 72\ mN/m.$$

Mit steigender Temperatur sinkt die Kapillarkonstante.

Bei kritischer T ist $\sigma = 0$.

$$W = \int F\,ds = \int 2B\sigma\,ds = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{W}{A}$$

Zweiter Hauptsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

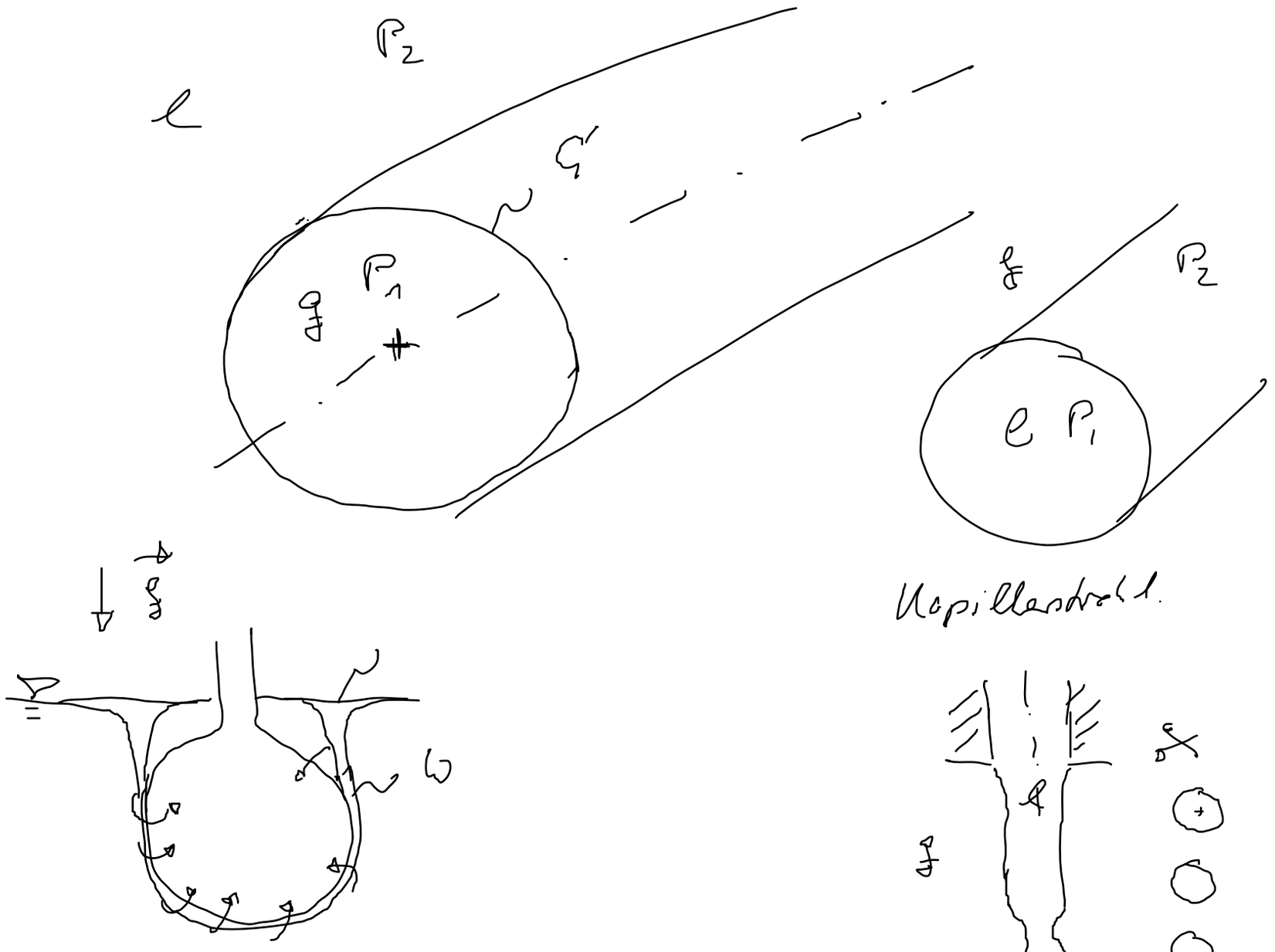
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

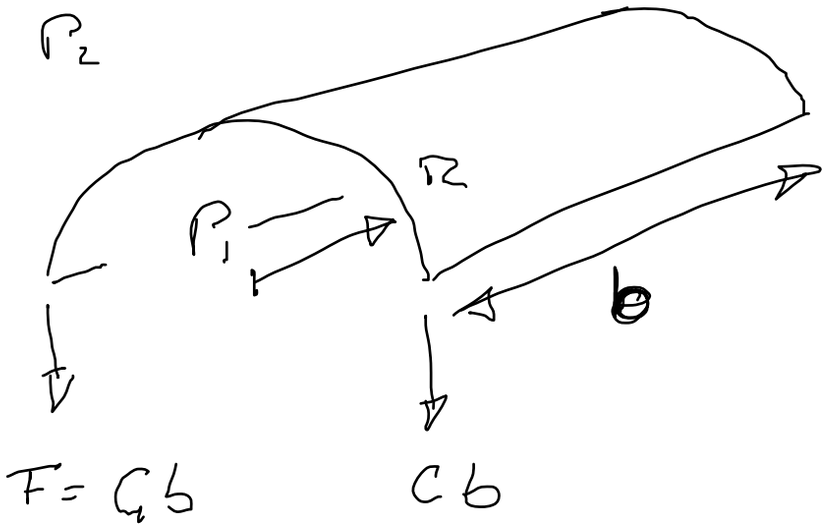
Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 5



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5



$$p_1 2Rb = p_2 2Rb + 2\sigma b$$

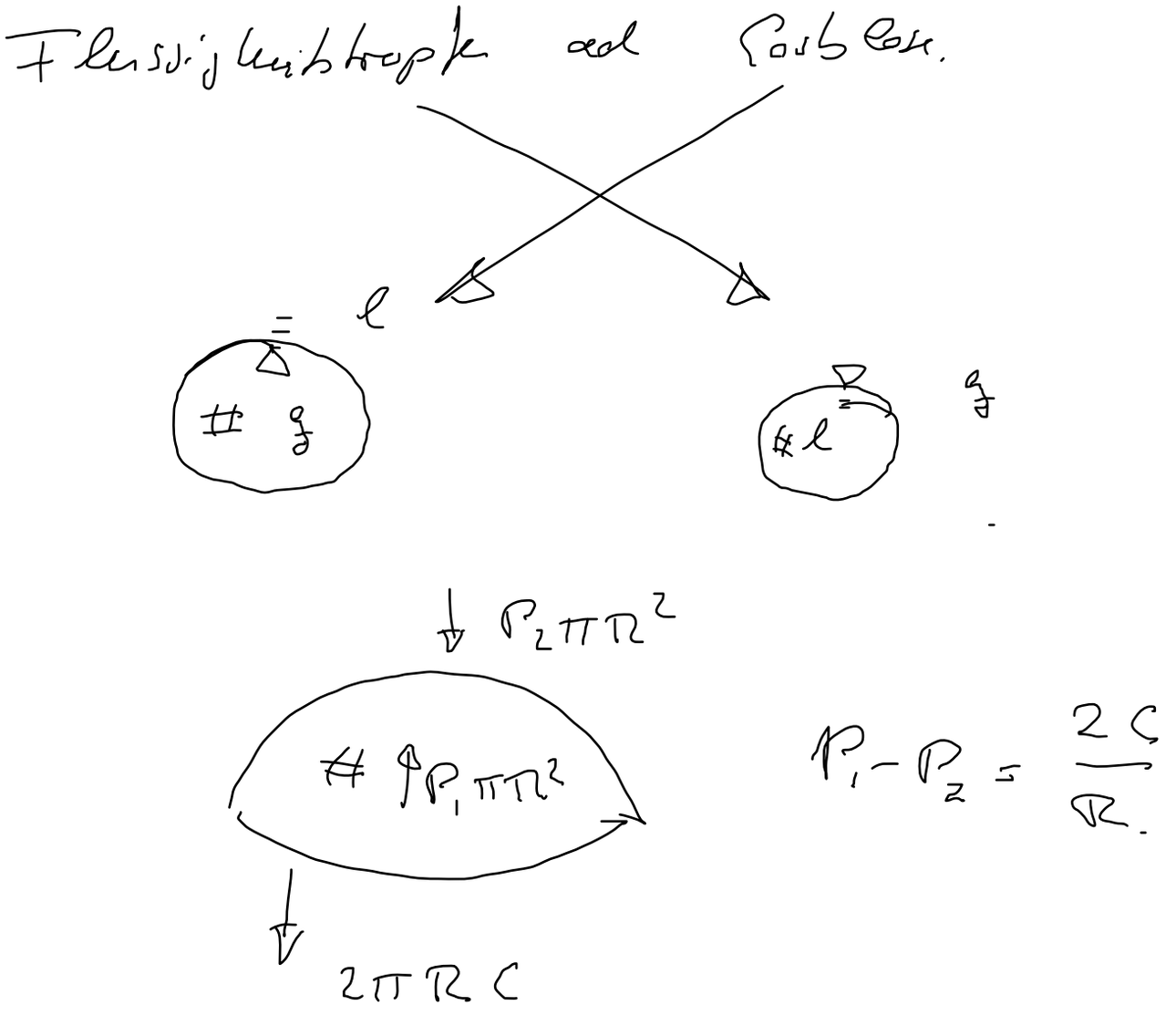
$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}$$

Druckdifferenz $p_1 - p_2$ über der Oberfläche ist proportional σ und proportional der Oberflächenkrümmung $1/R$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 5

Allgemein:

$$p_1 - p_2 = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

R_1, R_2 sind die Hauptkrümmungsradien.

Zylinder $R_1 = R$, $R_2 \to \infty$ $\quad p_1 - p_2 = \frac{C}{R}$.

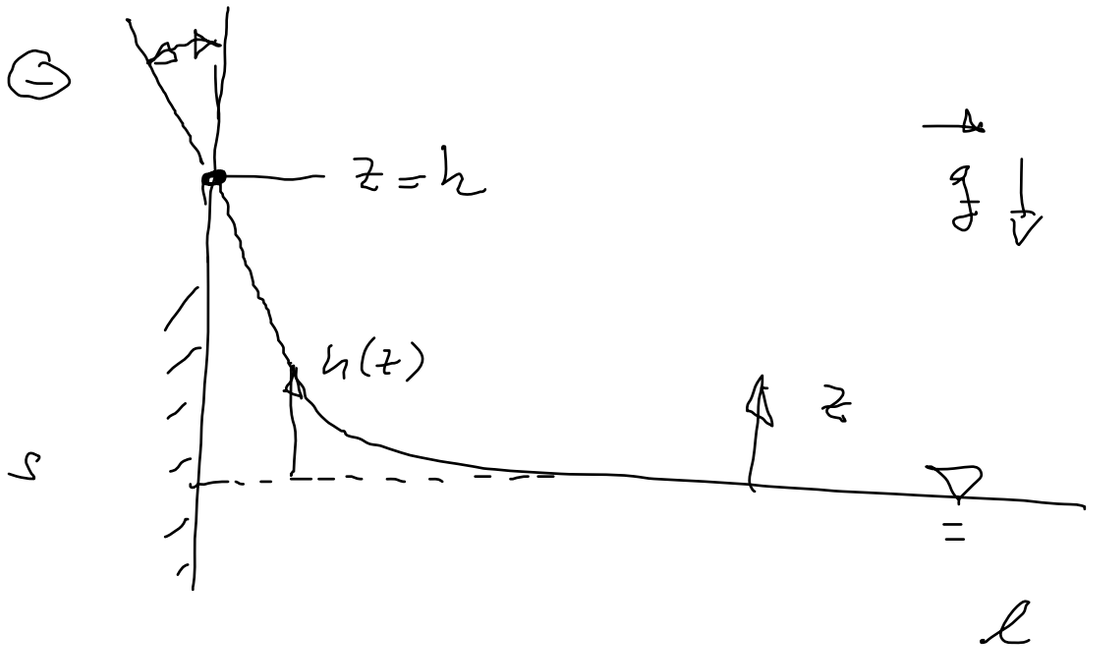
Kugel $R_1 = R_2 = R$ $\quad p_1 - p_2 = \frac{2C}{R}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

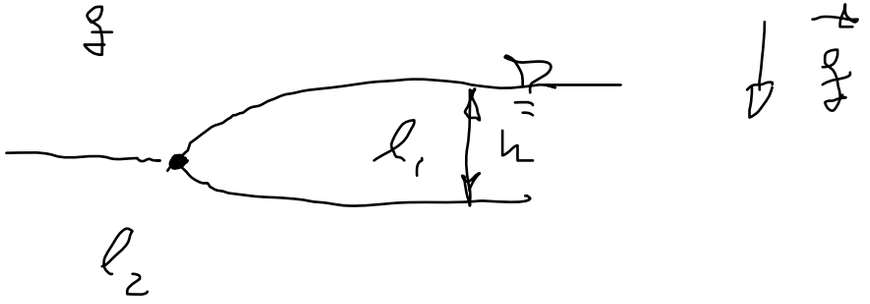
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5



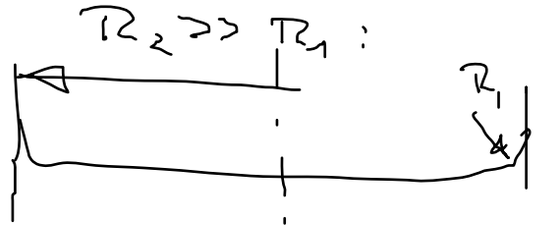
Randwicht ① in eine makroskopische Stoffwerte für das System (g, l, s).



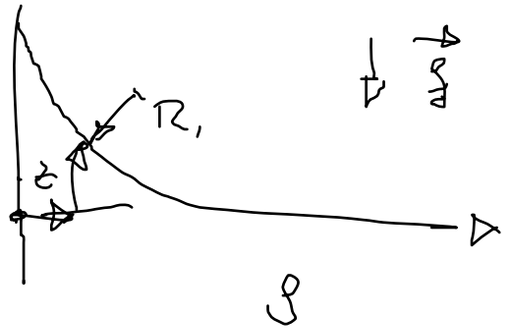
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5

$$p_1 - p_2 = C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$R_2 \to \infty$



ebenes Problem.



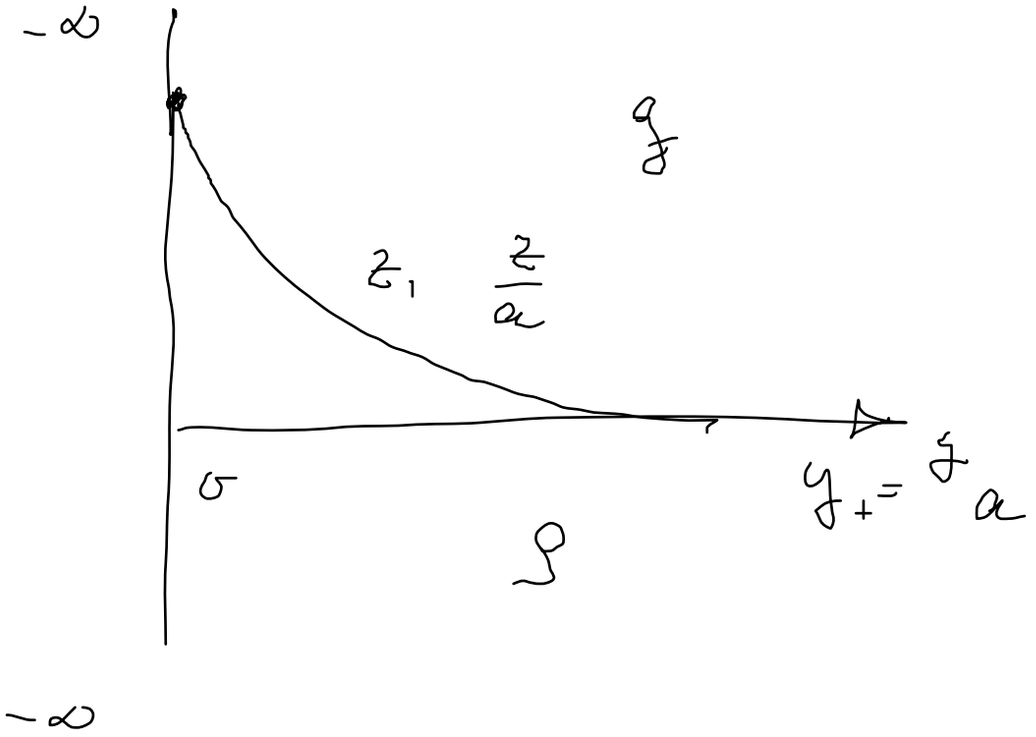
$$\rho g z = \frac{C}{R_1} = C \frac{z''}{(1+z')^{3/2}}$$

typische Größe $\sqrt{\frac{C}{\rho g}}$ = charakteristische Länge.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



$$a^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$$

$$\frac{z}{a^2} = \frac{z''}{(1+z')^{3/2}} \quad ; \quad z' = \frac{dz}{dy} \qquad z'_+ = \frac{dz_+}{dy_+}$$

$$z'' = \frac{d^2 z}{dy^2} \qquad z''_+ = \frac{d^2 z_+}{dy_+^2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 5

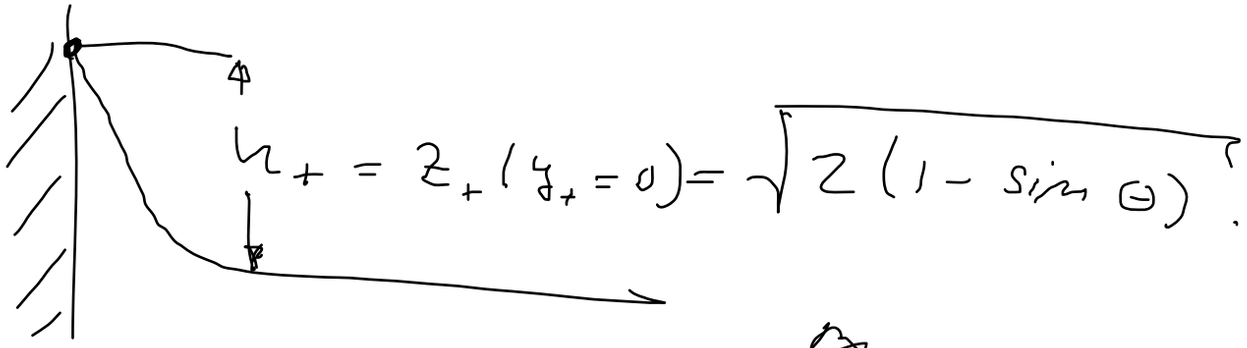
$$z_+ = \frac{z_+''}{(1 + z_+')^{3/2}}$$

Randbedingungen $z_+(y_+ \to \infty) = 0$

$z_+'(y_+ = 0) = -\tan\Theta$

Sie!

Ähnlichkeitslösung



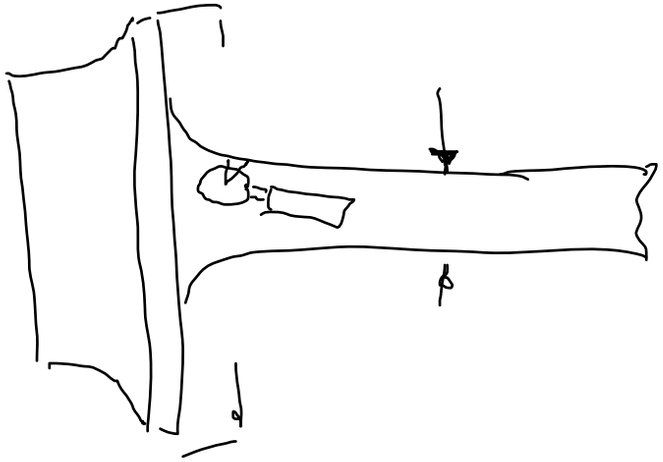
$$h_+ = z_+(y_+ = 0) = \sqrt{2(1 - \sin\Theta)}$$

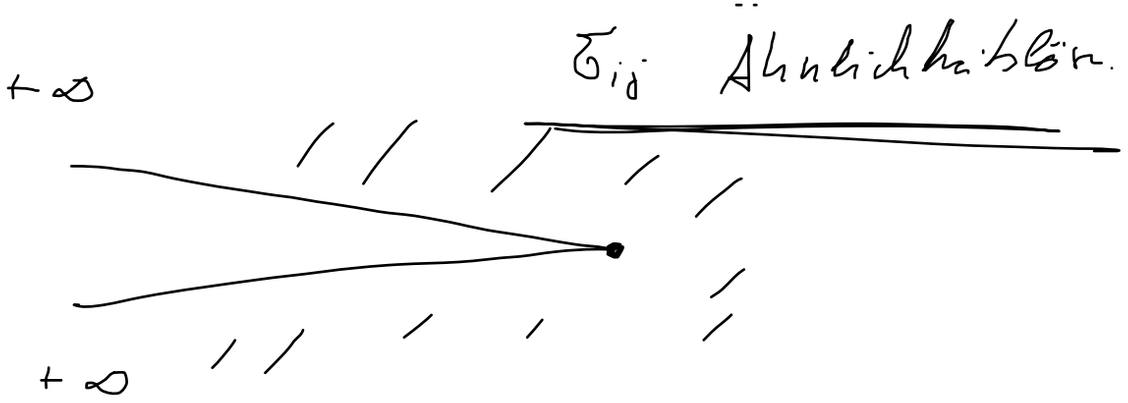
$h_+ := h/a$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

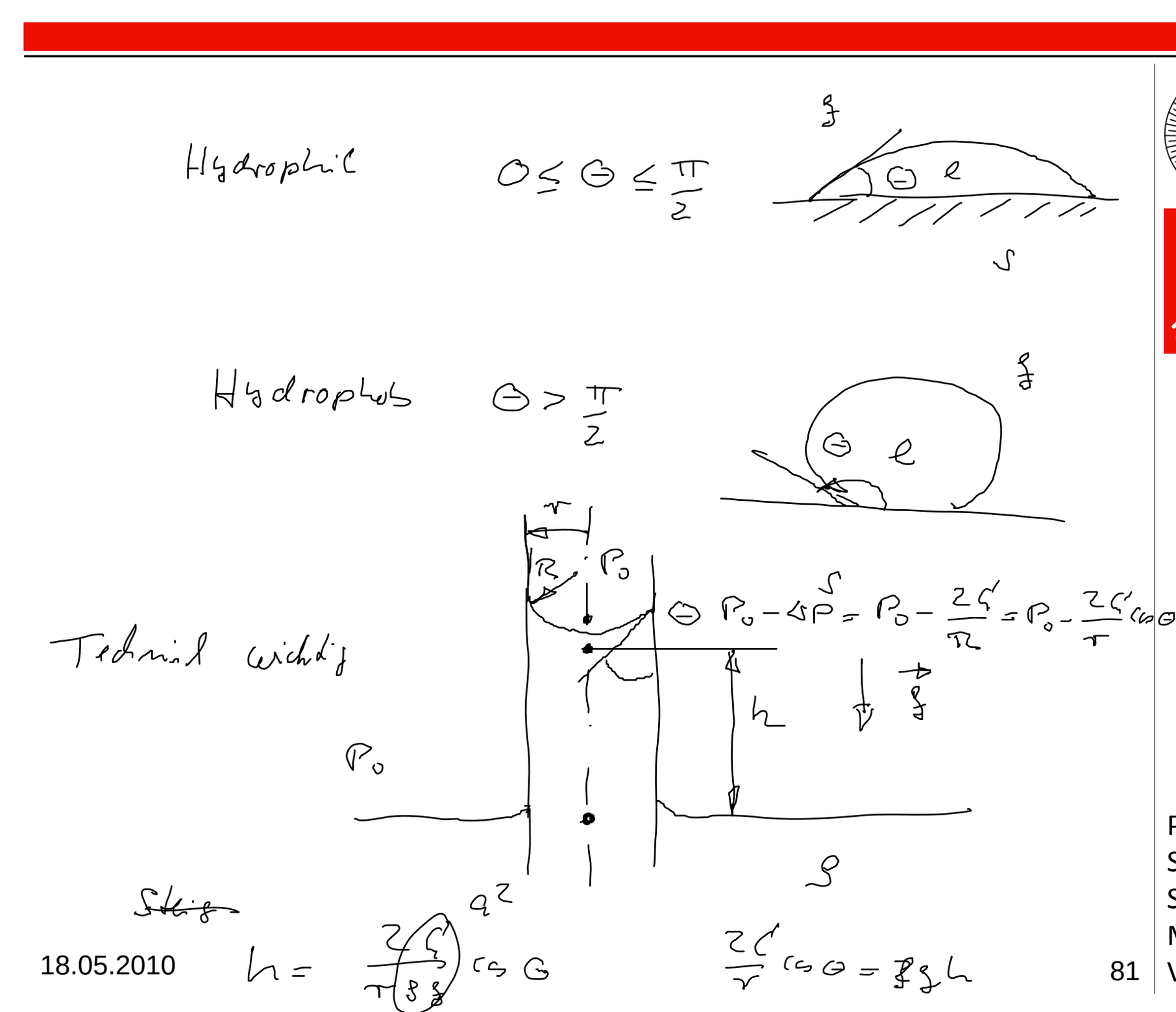
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz





Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5



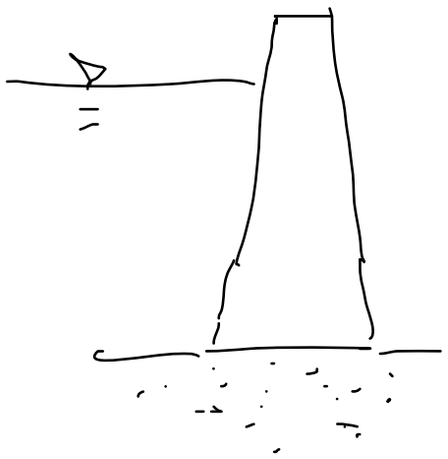
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

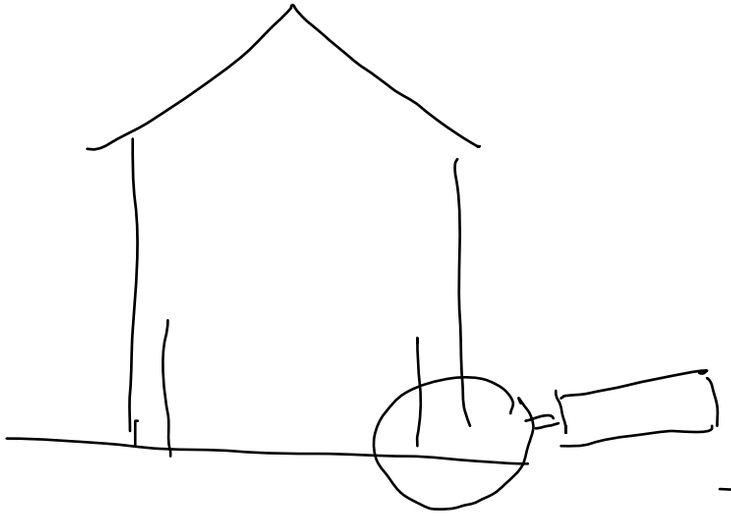
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5

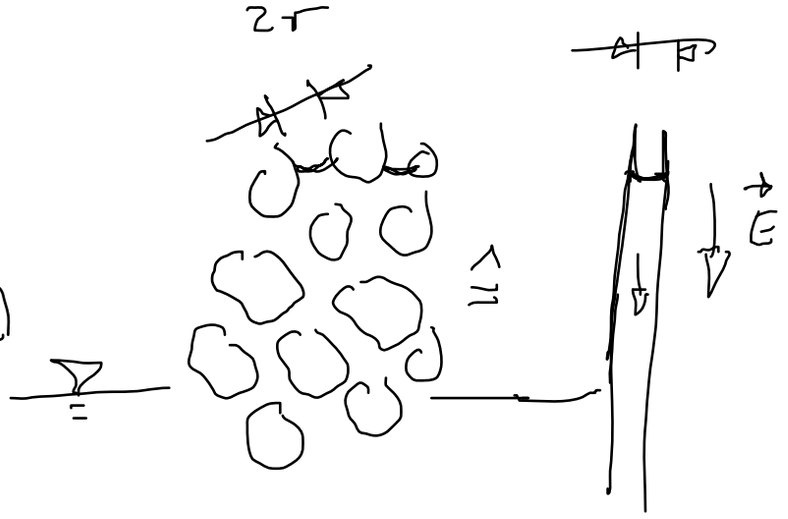
Geometrie $R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = r$

$R = \frac{r}{\cos\Theta}$

Steighöhe: $h = 2\frac{\sigma^2}{r}\cos\Theta$.







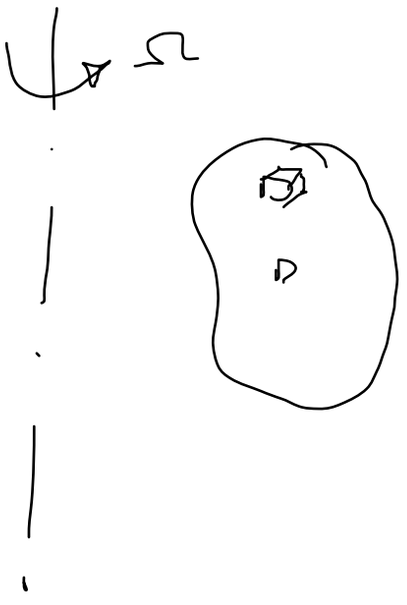
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5

$$\vec{f} = \rho \Omega^2 r \vec{e}_r$$

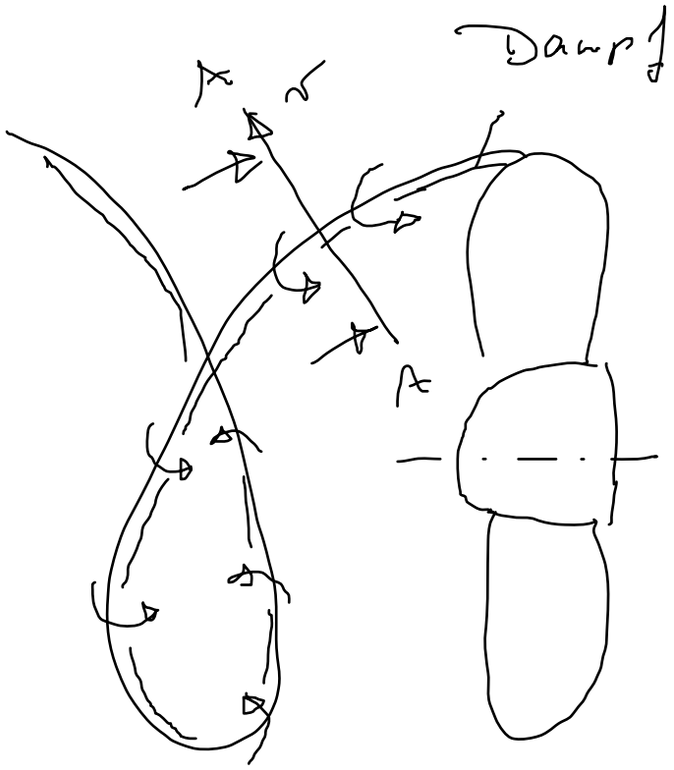
$$\vec{F} = \oint -p \vec{n} \, dS$$

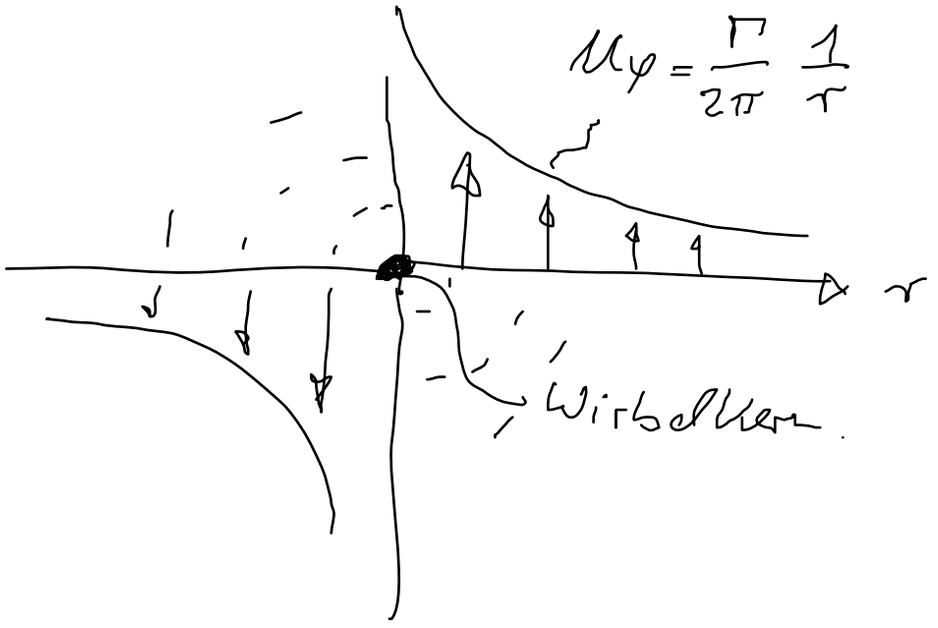
$$= \iiint -\nabla p \, dV$$

$$= \iiint -\rho \Omega^2 r \vec{e}_r$$

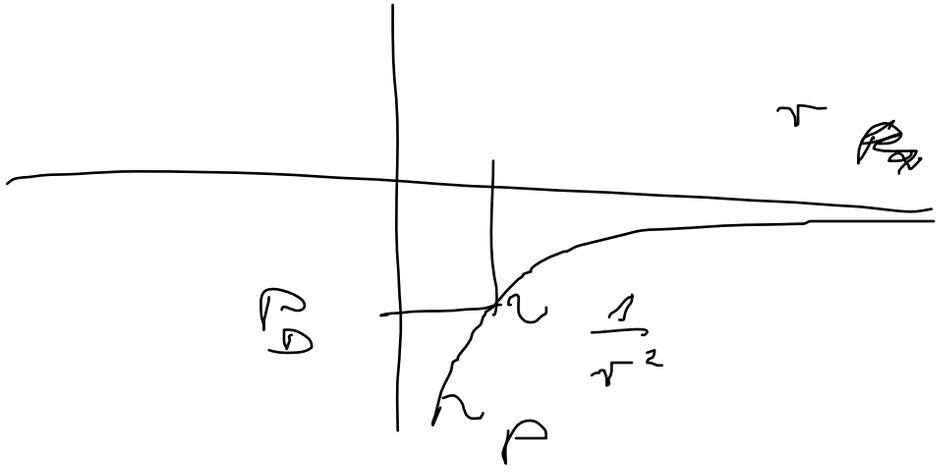


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5





Γ Zirkulation.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

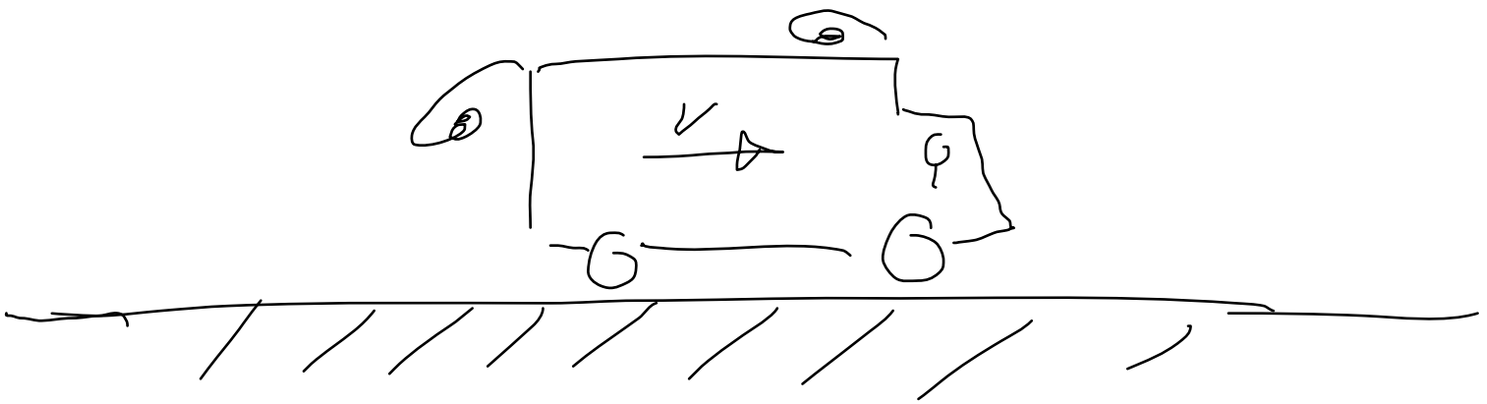
Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 5

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \rho \vec{k}.$$

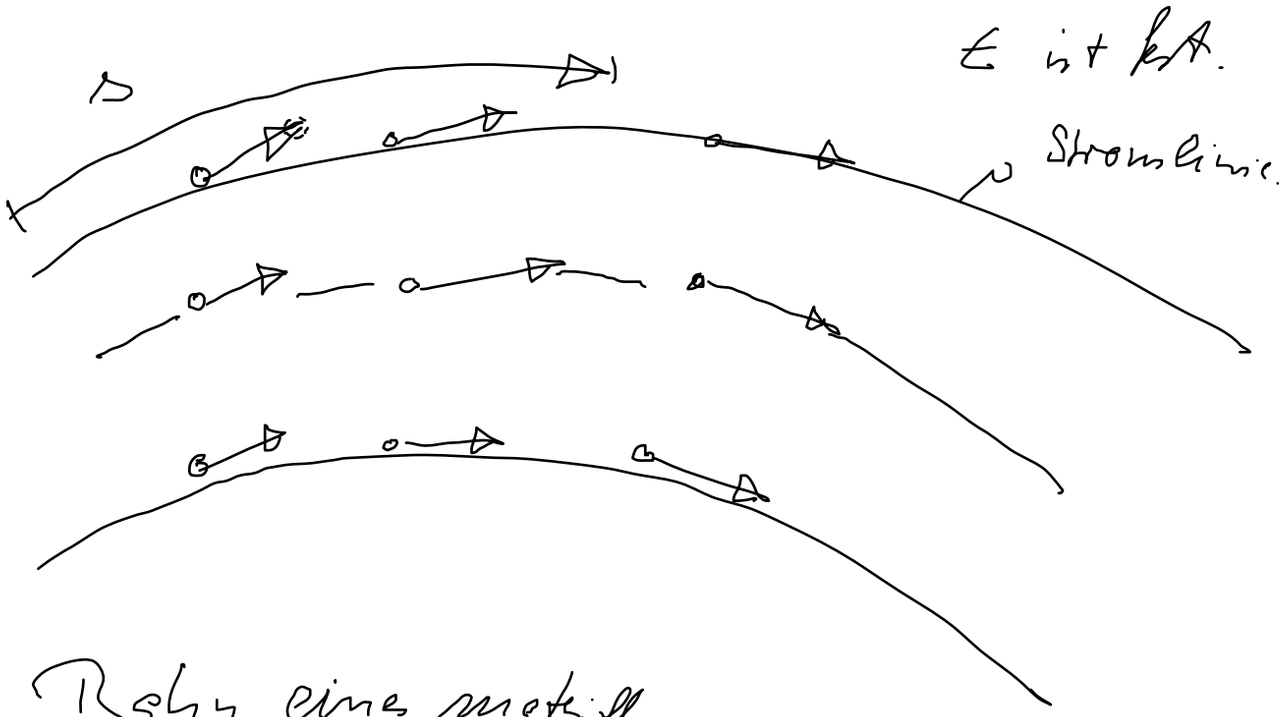
$$\frac{u^2}{2} + p + \int g \, dz = \zeta \quad \text{Bernoulli}$$



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5

Bernoullische Gleichung gilt längs Stromlinie.

Stromlinie: Momentaufnahme eines Strömungsfeldes.



$\vec{v}$ ist tangential.

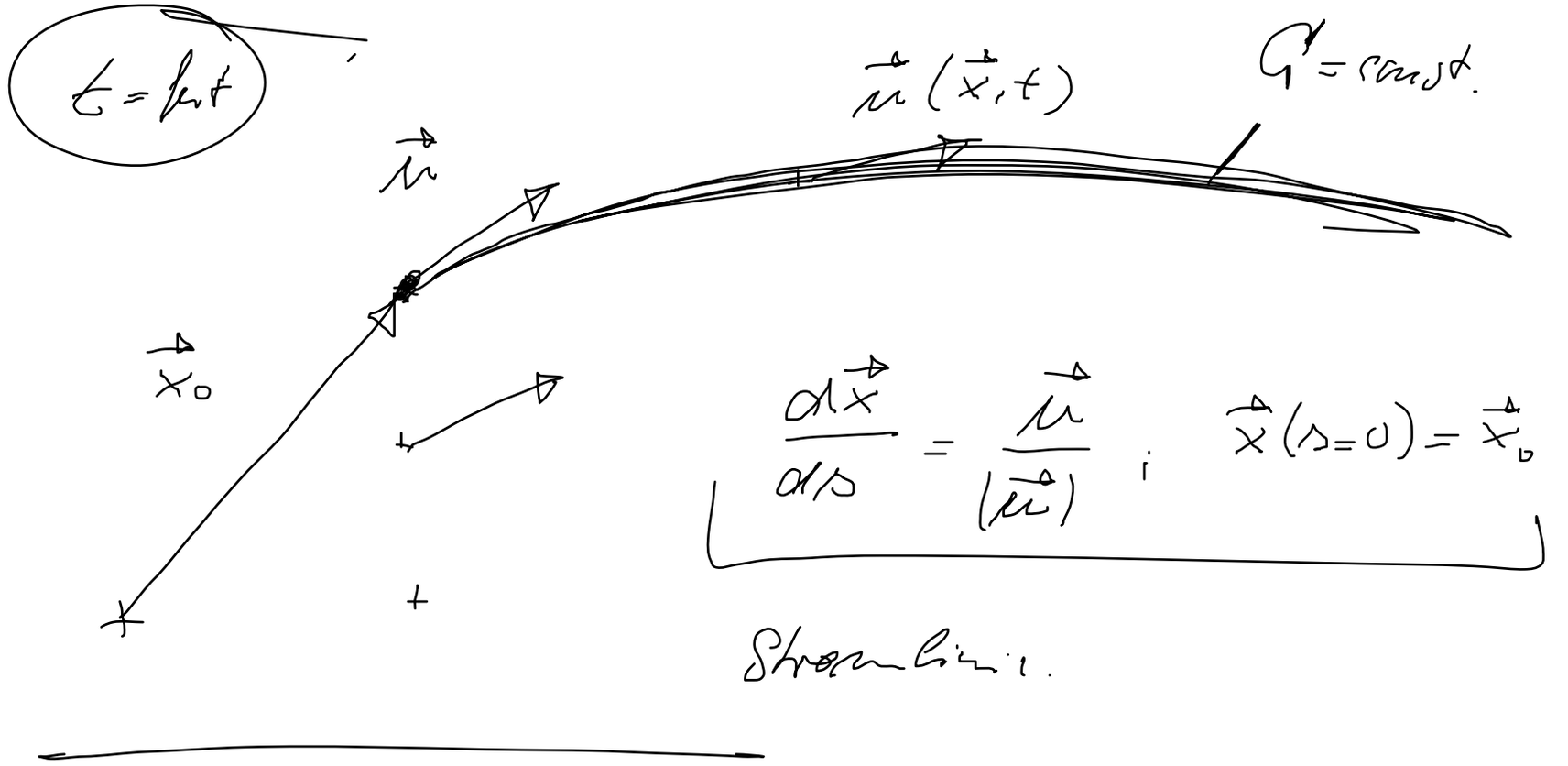
Bahnlinie: Bahn eines materiellen Teilchens $\vec{v}$ ist die Bahngeschwindigkeit.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5



Bahnlinie

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \; ; \quad \vec{x}(t=0) = \vec{\xi}$$

$\vec{\xi}$ ist die materielle Koordinate.

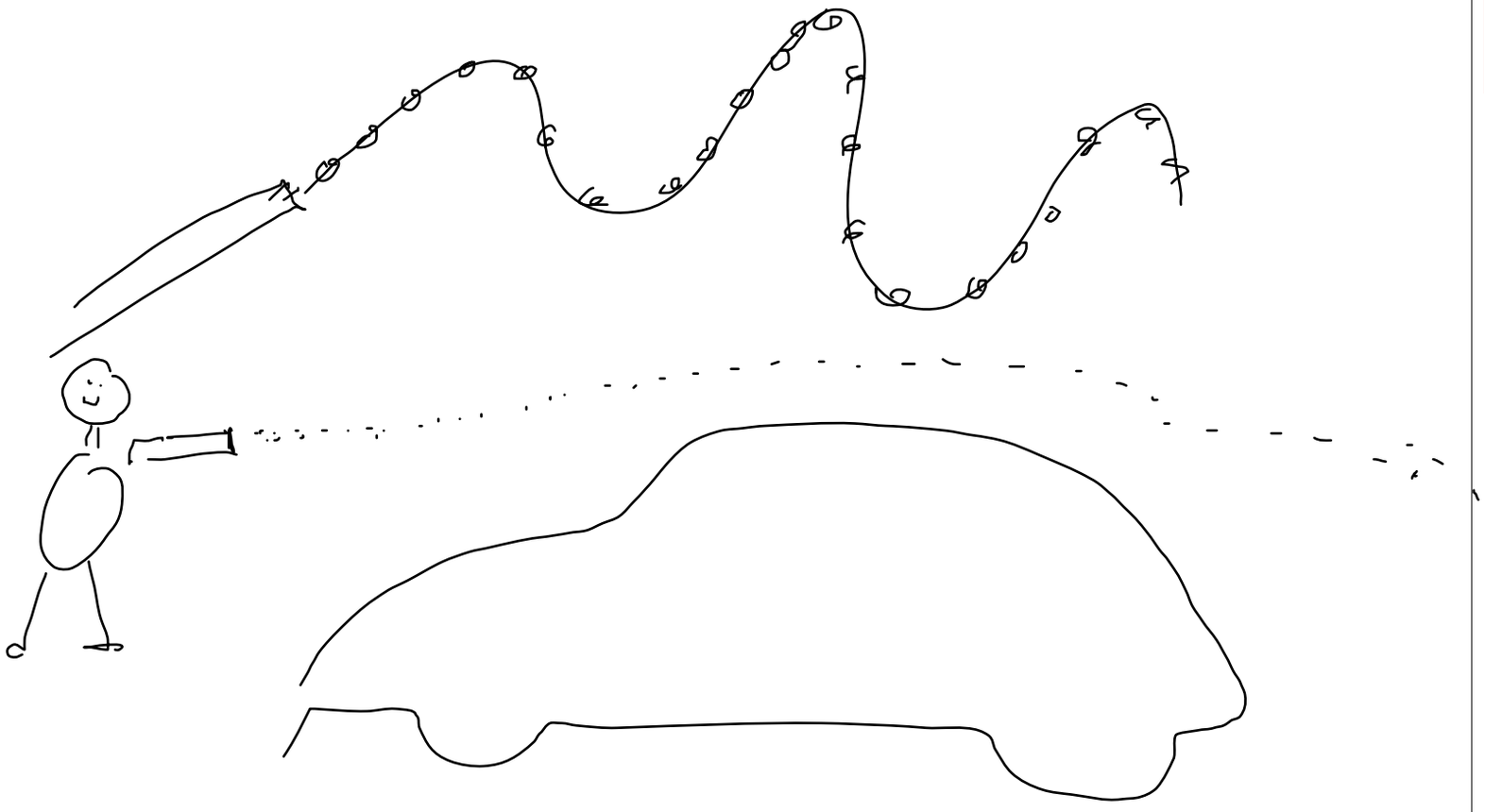
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Stromlinie ist eine materielle Linie zu einem Zeitpunkt t.

$t = \text{fest}$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

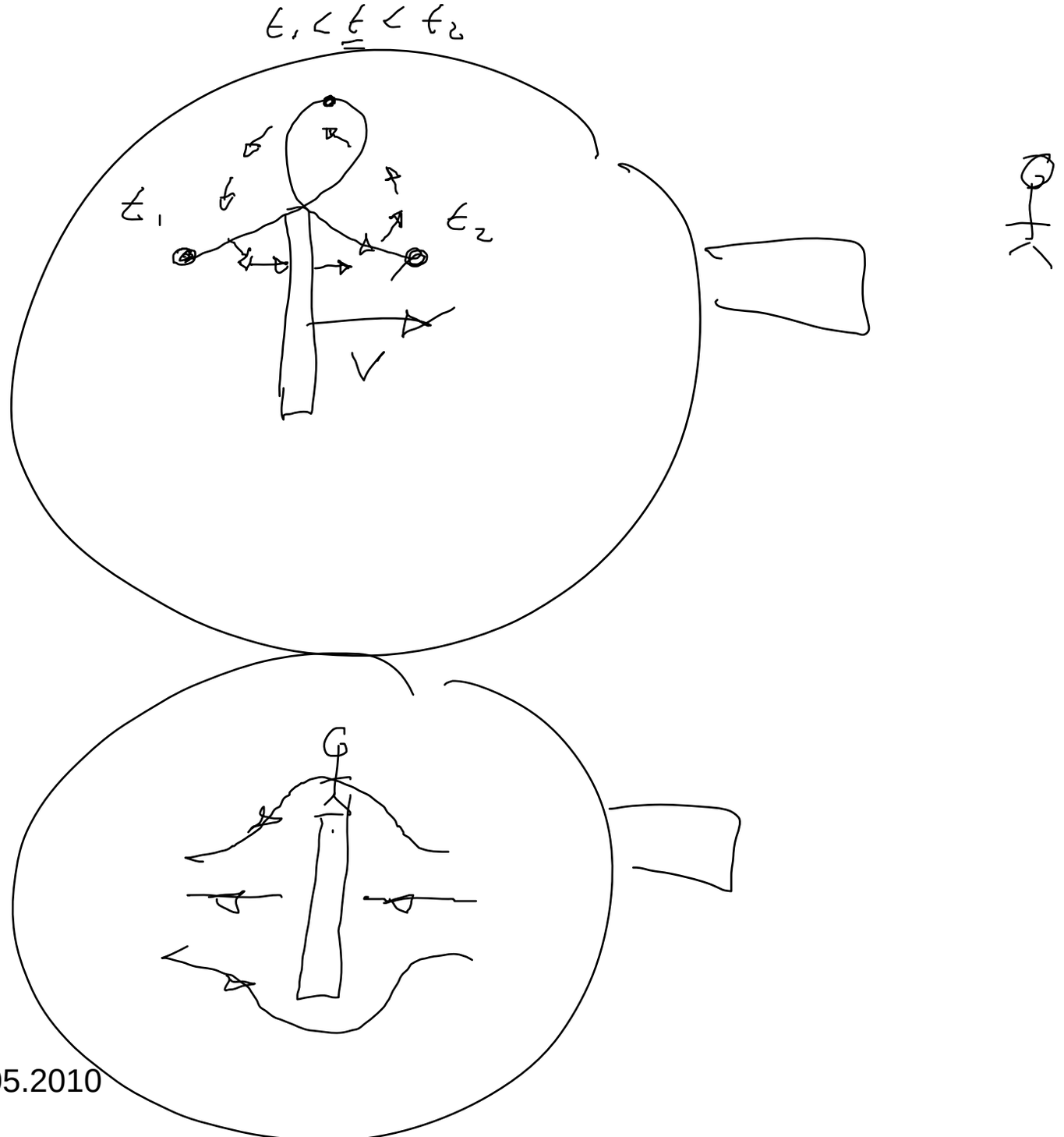
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 5



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 5