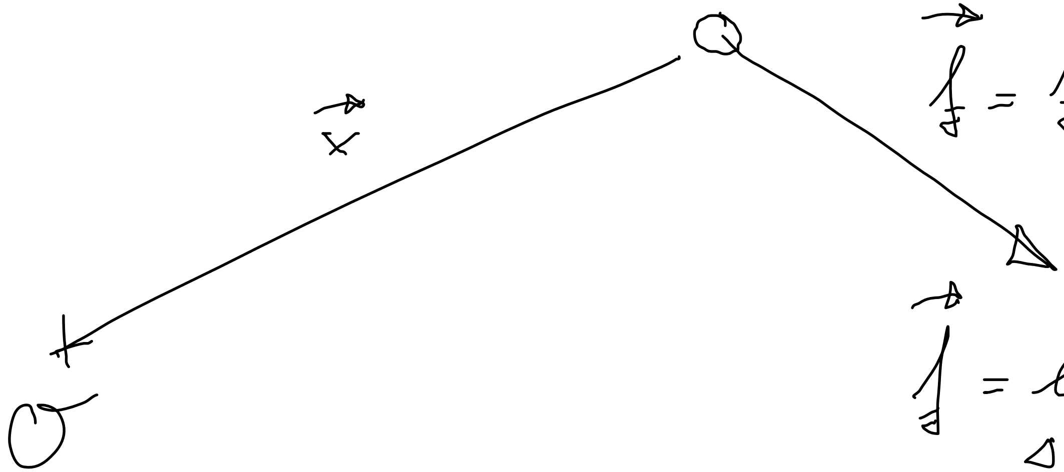
Volumenkraft am Ort $\vec{x}$



$$\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$$

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$$

∇

$$\underset{\sim}{T} = \tau_{xx} \vec{e}_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_x \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_x \vec{e}_z + \tau_{yx} \vec{e}_y \vec{e}_x + \dots + \tau_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z$$

$$\underset{\sim}{T} = \tau_{rr} \vec{e}_r \vec{e}_r + \tau_{r\varphi} \vec{e}_r \vec{e}_\varphi + \dots \tau_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z \quad \triangleleft$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

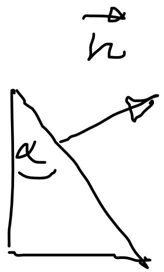
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Oberflächenkraft

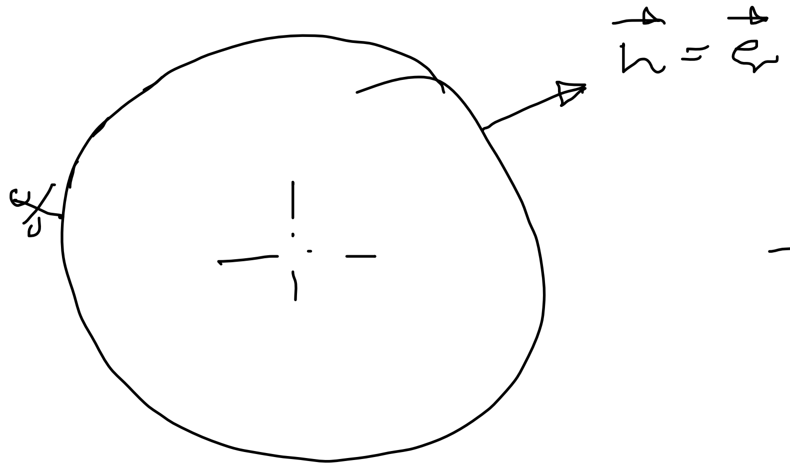
Kraft pro Flächeneinh.

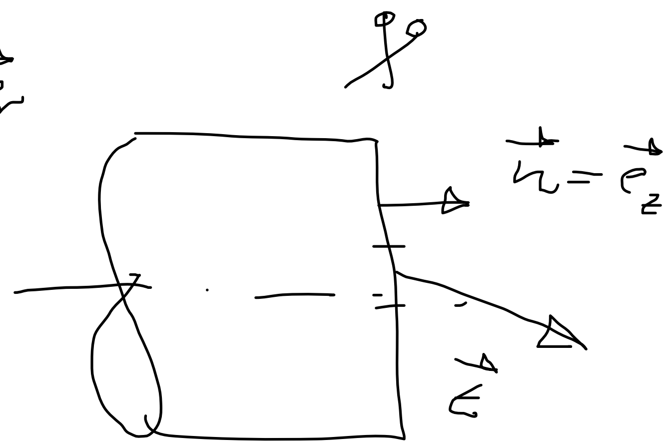
$$\vec t = \underset{\sim}{T} \cdot \vec n = \underset{\sim}{T} \cdot \vec e_z$$



$$= \Big(\tau_{rr}\,\vec e_r \vec e_r + \tau_{r\varphi}\,\vec e_r \vec e_\varphi + \tau_{rz}\,\vec e_r \vec e_z + \dots + \tau_{\varphi z}\,\vec e_\varphi \vec e_z + \dots + \tau_{zz}\,\vec e_z \vec e_z \Big) \cdot \vec e_z$$

$$= \tau_{rz}\,\vec e_r + \tau_{\varphi z}\,\vec e_\varphi + \tau_{zz}\,\vec e_z .$$





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 3

$$\vec{t} := \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Ziel: Herleitung der hydrostatischen Grundgleichung.

$$\boxed{\nabla p = \vec{f}\,, \text{ wenn } \vec{u} \equiv 0.}$$

$\vec{u}$ Strömungsgeschwindigkeit.

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z$$ in Zylinderkoordinaten.

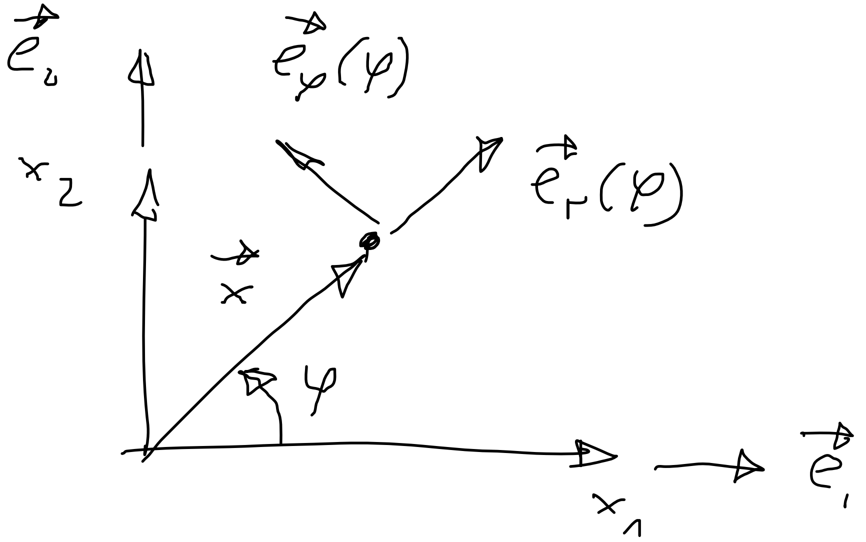
$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

In krummlinigen Koordinaten sind die Einheitsvektoren von den Koordinaten abhängig!



$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$
$$= r \vec{e}_r(\varphi)$$

∇	Gradient	grad	
$\nabla \cdot$	Divergenz	div	
$\nabla \times$	Rotation	rot	od. curl

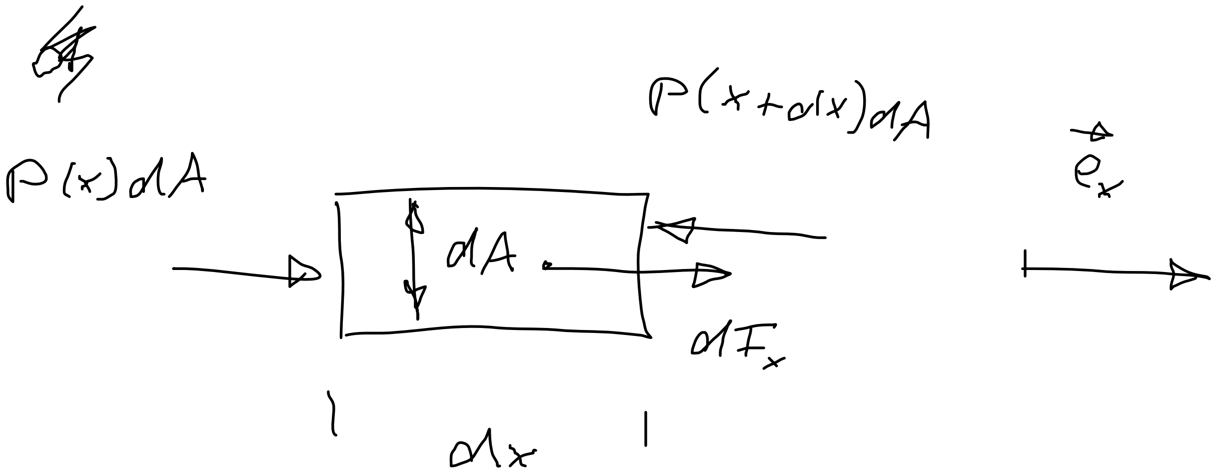
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Achtung! Matrizenschreibweise bitte nur bei kartesischen Koordinaten.



$$dV = dA\,dx \quad \text{Volumen}$$

$$d\vec{F} = \vec{f}\,dV$$

$$dF_x = f_x\,dV \quad \text{Volumenkraft.}$$

Gleichgewicht in x-Richtung.

$$dF_x = p(x+dx)\,dA - p(x)\,dA$$

$$f_x\,dx\,dA \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dA$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{f} = \nabla p}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Notwendige Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht.

$$\underline{\nabla p} = \vec{f} \quad \Big| \; \nabla \times$$

$$\nabla \times \nabla p = \nabla \times \vec{f}$$

$$0 = \nabla \times \vec{f}$$

=> Die Volumenkraft $\vec{f}$ muß rotationsfrei sein.

=> Die Volumenkraft $\vec{f}$ muß ein Potential ψ haben.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

$$p = -\psi + \underbrace{\text{const}}$$

Beliebige Konstante, die auch zu Null gesetzt werden kann.

$$\boxed{p = p_0 - \psi}$$

$$\boxed{\vec{f} = -\nabla \psi}$$

Einfaches Beispiel:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

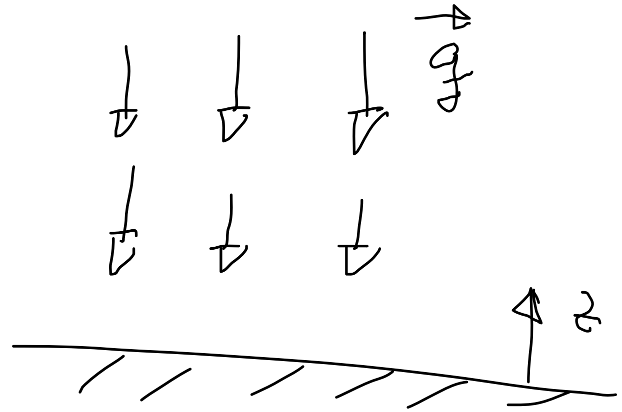
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Potential der Schwerkraft.

$$\Psi = \rho g z.$$

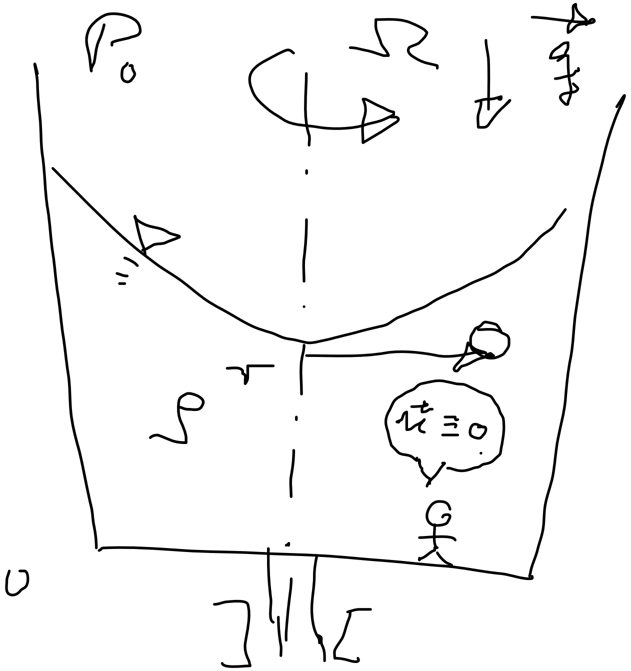
$$f_z = -\rho g$$

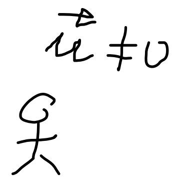


Potential der Zentrifugalkraft.

$$f_r = \rho \Omega^2 r$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}\rho(\Omega r)^2 + \rho g z$$





$$p = p_0 - \Psi = p_0 + \frac{1}{2}\rho(\Omega r)^2 - \rho g z.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

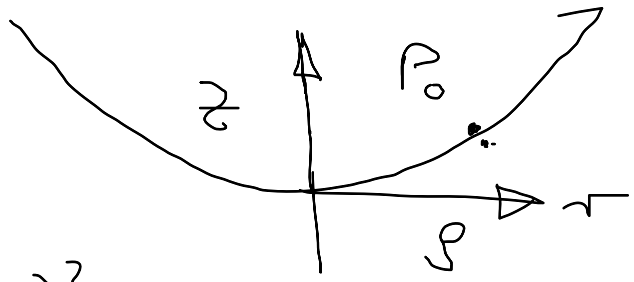
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Gestalt der freien Oberfläche



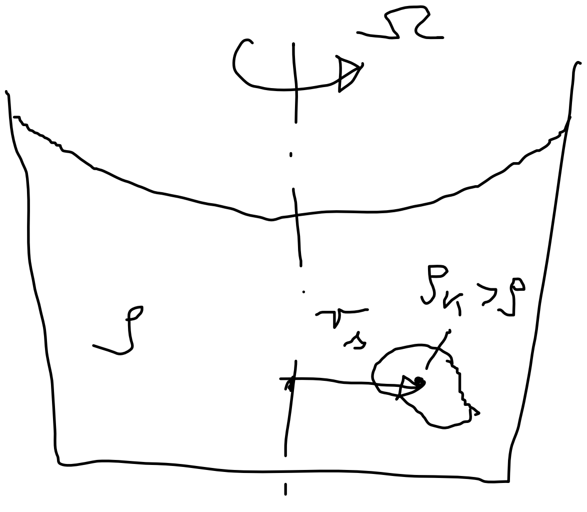
$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho(\Omega r)^2 + \rho g z$$

$$z = \frac{(\Omega r)^2}{2g}$$

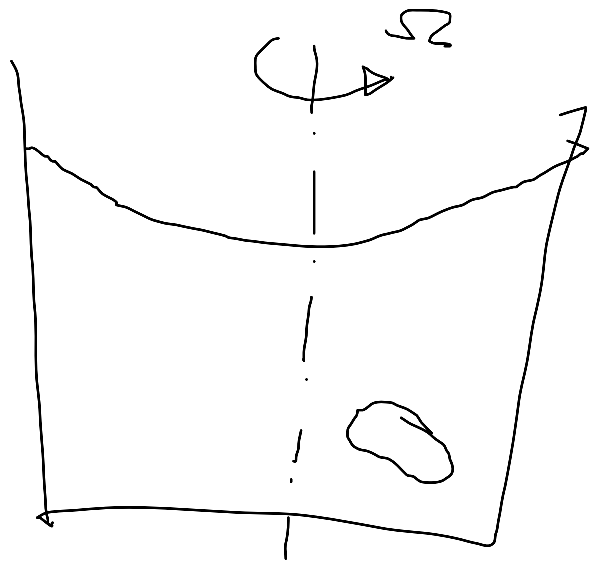
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Kraft auf einen eingetauchten Körper



$\rho_K > \rho$



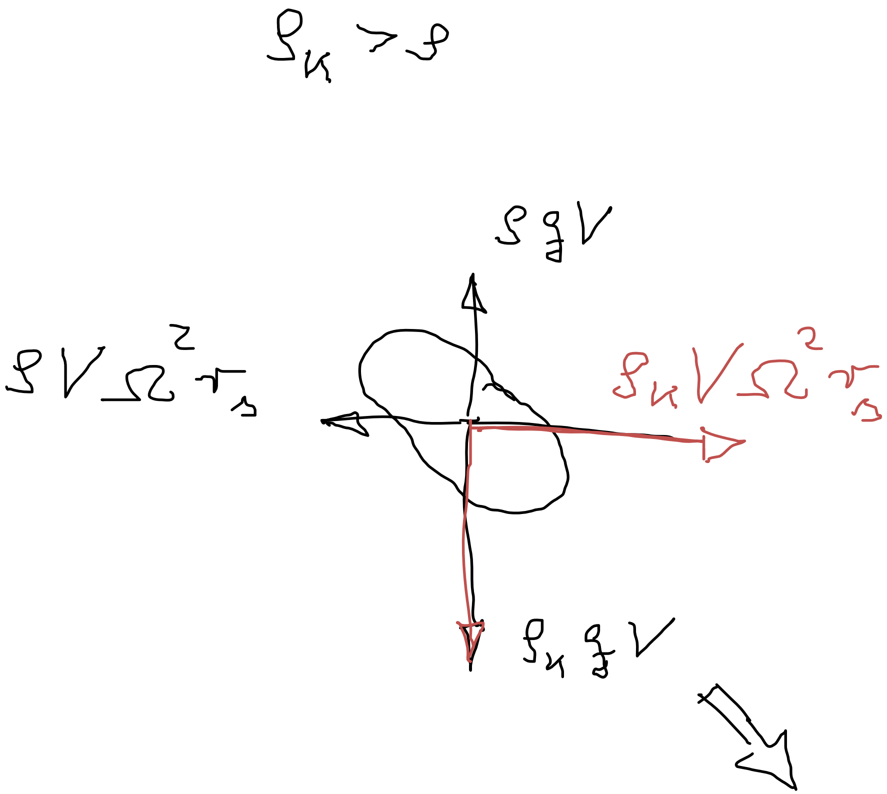
$\rho_K < \rho$

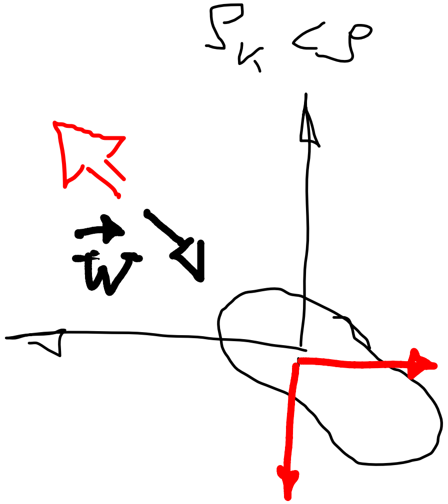
$$\vec{A} = \rho g V \vec{e}_z \quad \text{Auftrieb}$$

V Volumen der verdrängten Flüssigkeit

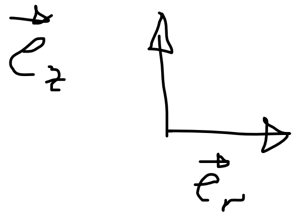
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4





$$\vec{w} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z .$$

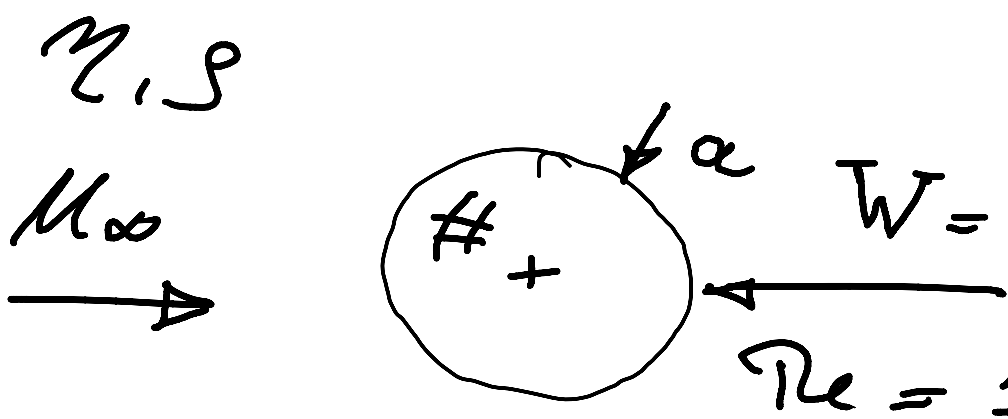


$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -(\rho_K - \rho)\, g V \vec{e}_z + (\rho_K - \rho)\, \Omega^2 r_s V \vec{e}_r \\ \vec{W} = 6\pi\eta\vec{w}\, V^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \text{Bahnlinie in der Zeitlupe}$$

Stokes'sche Widerstandsgleich.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4



$W = 6\pi\eta u_\infty a$, für

$Re = \dfrac{u_\infty a \rho}{\eta} \ll 1$

η dynamische Viskosität

u_∞ Anströmungsgeschwindigkeit

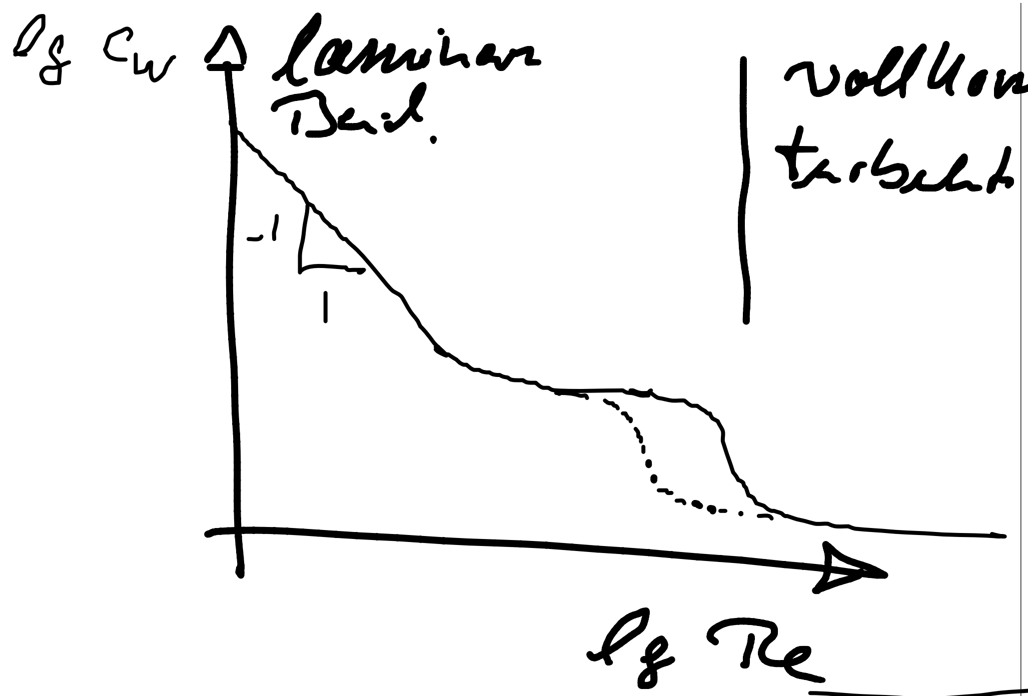
a Kugelradius.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

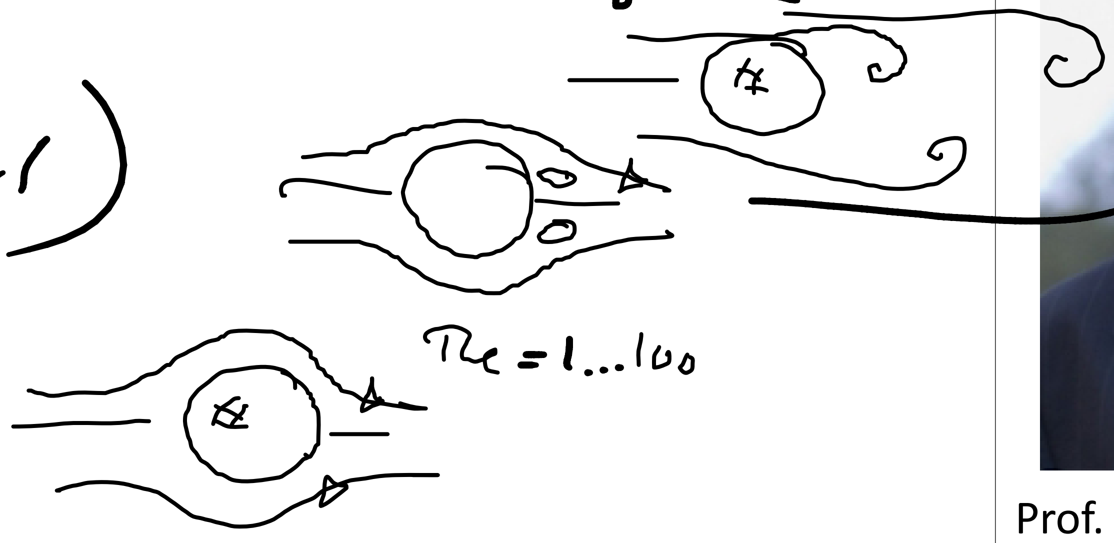
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\frac{W}{\frac{\varrho}{2} u_\infty^2 A} = c_w(Re)$$

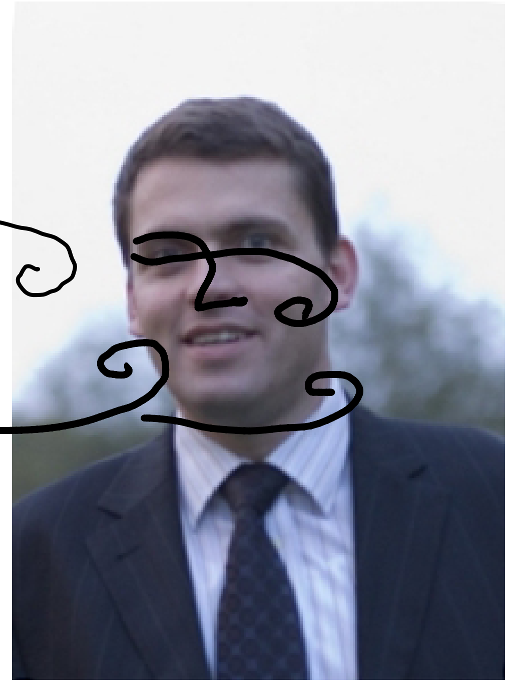


A projizierte Fläche

$(A = \pi a^2$ für die Kugel$)$

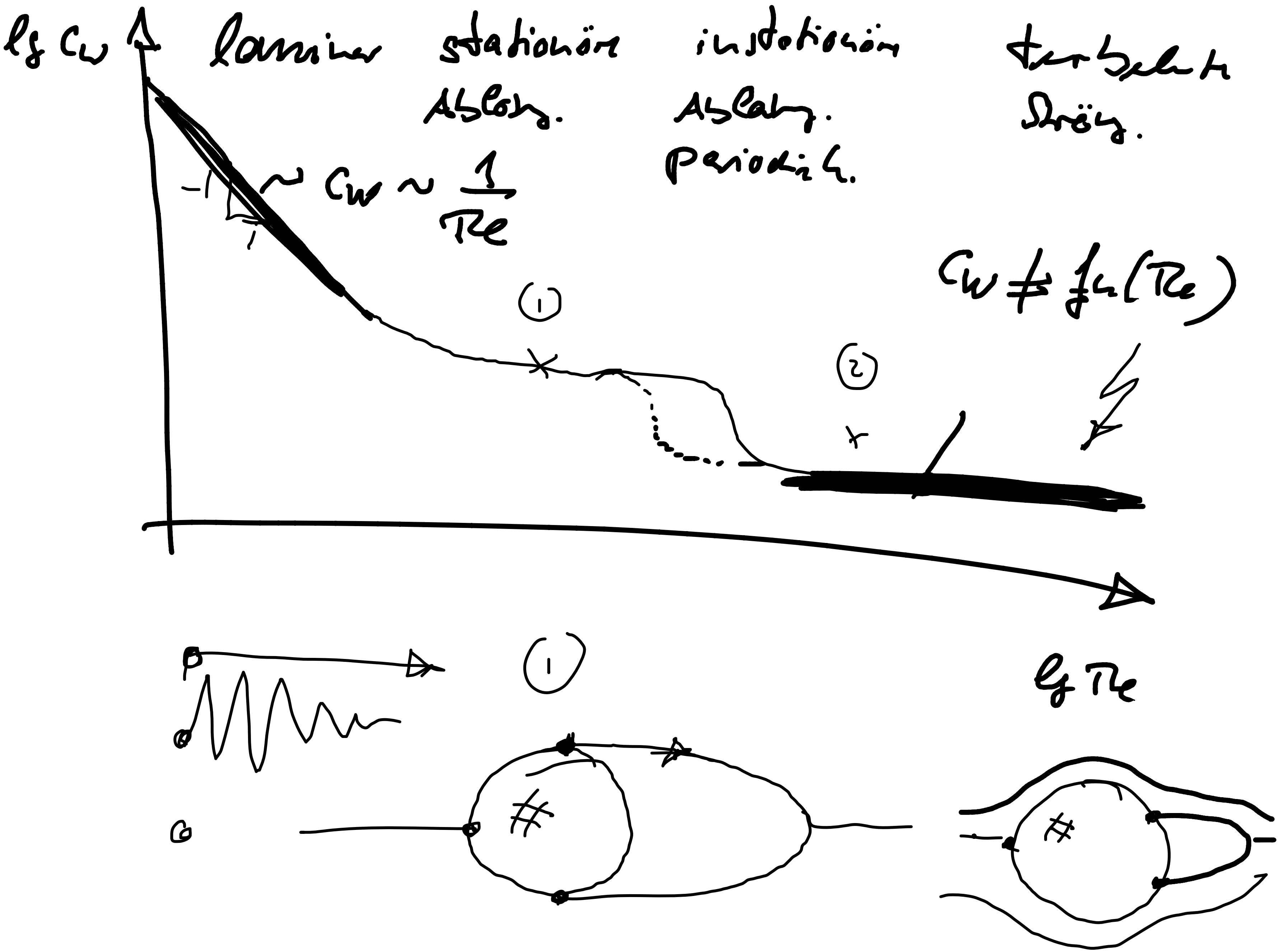


Re << 1



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4



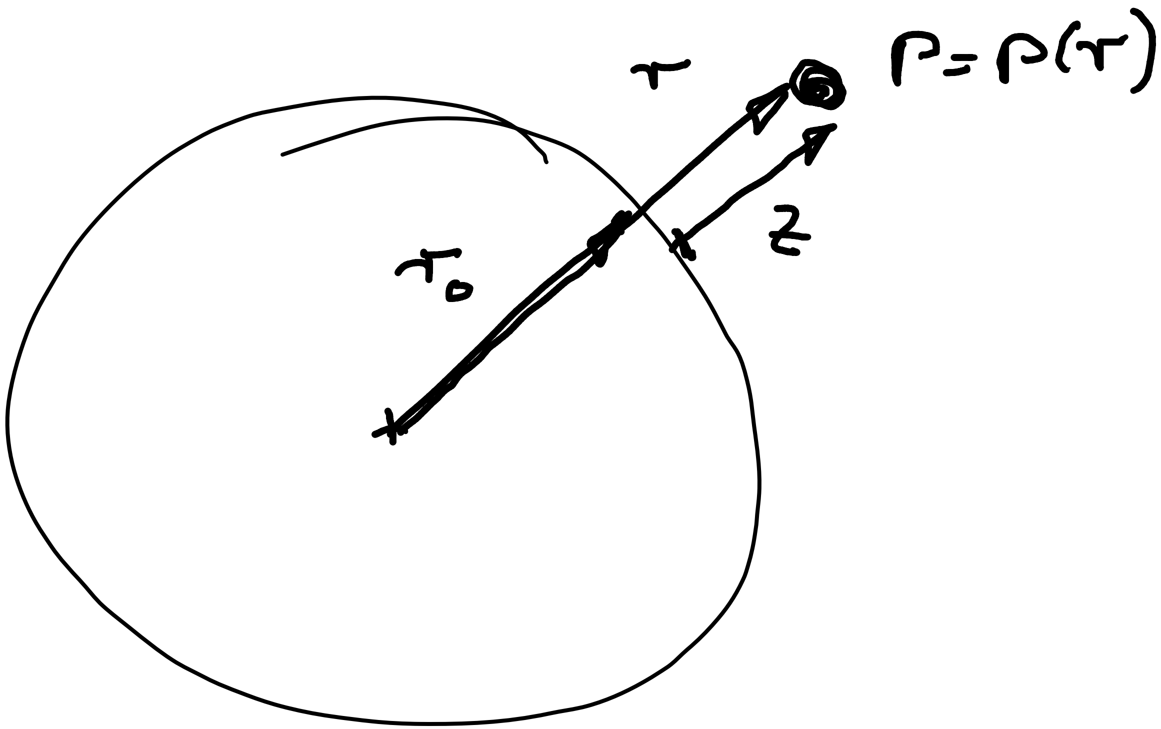
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

Druckverteilung in der Atmosphäre.



$$\vec{g} = -g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{f} = -\rho(r)\, g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \vec{e}_r .$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

$$\nabla p = \frac{dp}{dr}\vec{e}_r$$

Hydrostatische Grundgleichung

$$\vec{f} = \nabla p$$

$$-\rho(r)\, g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cancel{\vec{e}_r} = \frac{dp}{dr}\cancel{\vec{e}_r}$$

Ideale Gasgleichung $\quad p = \rho R T$

Annahme isotherme Atmosphäre.

$\Big\}$ barotrope Zustandsgleichung.

$p = \text{const}\,\rho$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

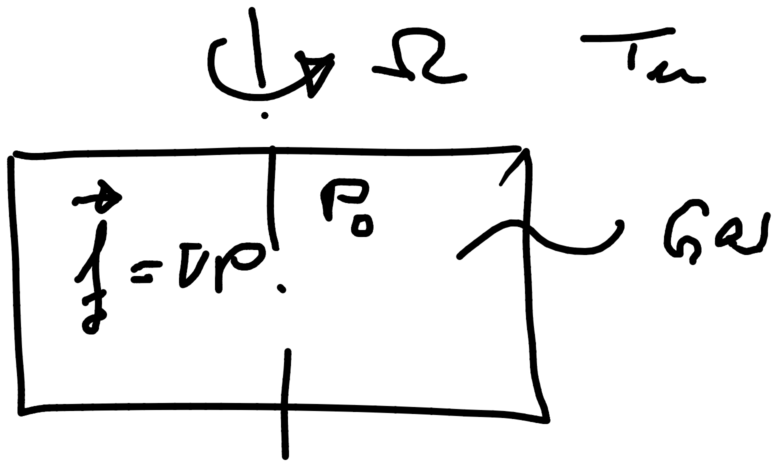
FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\rho = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n \rho_0$$

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\frac{p}{p_0}\right)^n \rho_0 \, g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\frac{p}{p_0} = \left[1-(1-n)\frac{\rho_0 g_0 r_0}{p_0}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



$$m(\Omega = 0) = m(\Omega \neq 0).$$

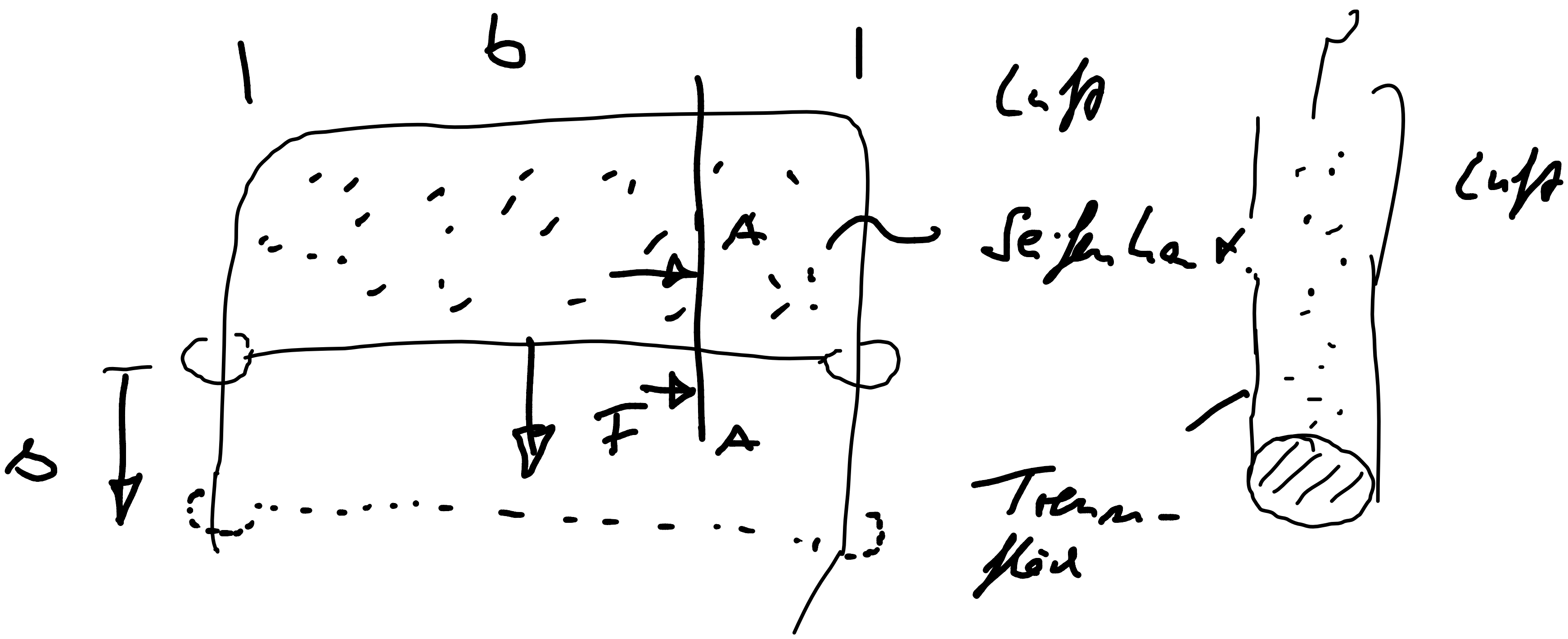
→ übung, Wärmeleitgesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Oberflächenspannung



$F \sim b = 2\sigma b$

$F \neq f(s)$ unabhängig von s.

$F \sim s$ bei einer Membran

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

σ Kapillarkonstante

σ bestimmt sich durch die Stoffpaarung der zu trennenden Flüssigkeiten.

Arbeit $W = \int F \, ds = 2\sigma b s$

$= \sigma A$

neu erzeugte Trennfläche $A = 2bs$

$\sigma = \frac{W}{A}$ Oberflächenspezifische Arbeit

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz