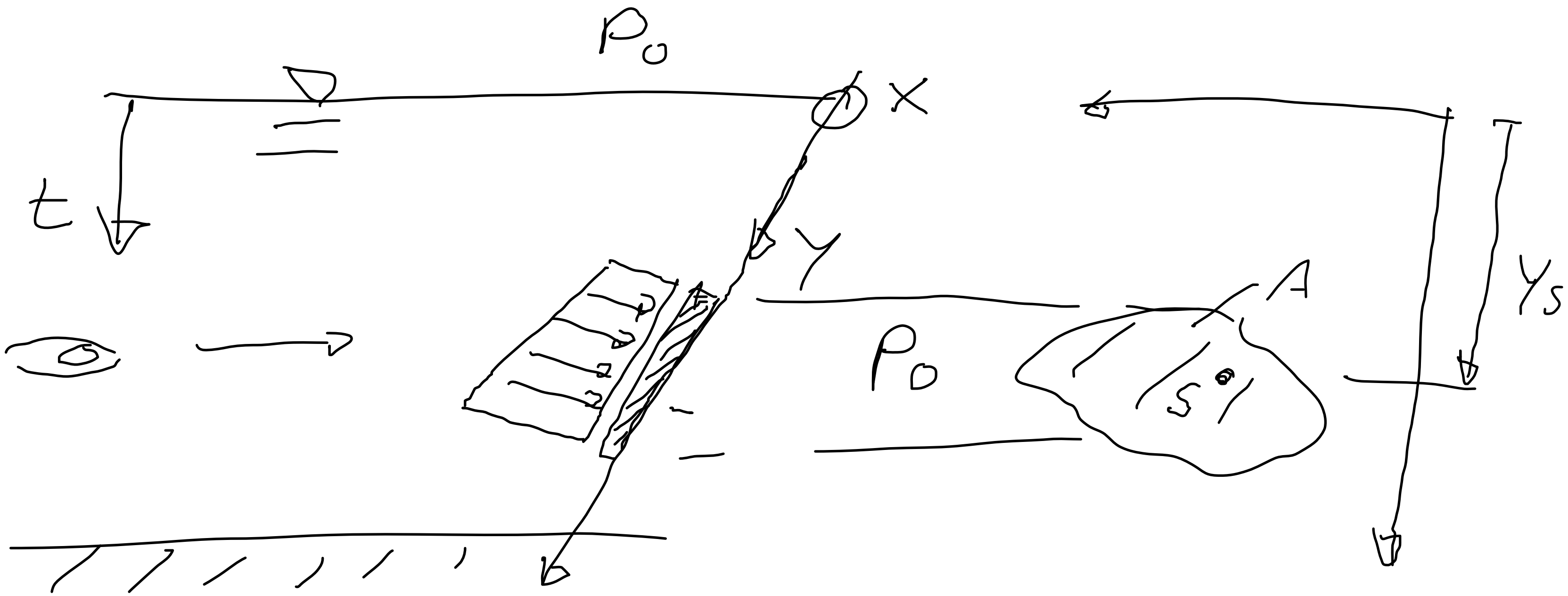
Hydrostatik

T. Bedorff

Flüssigkeitsdruck auf ebene Wände



1) Welche Kraft wirkt auf die Platte?

2) Wo greift diese Kraft an (nicht im Schwerpunkt)

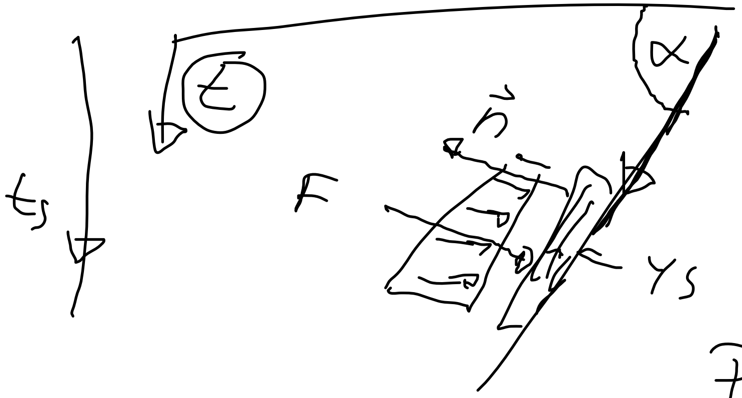
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

1) Welche Kraft F wirkt auf die Platte



allgemein $\vec{F} = -\int_A p\,\vec{n}\,dA$

$F = \int p\,dA$

$p = p_0 + \rho g t \qquad t = y\sin(\alpha)$

$\Rightarrow F = \int (\rho g y \sin(\alpha) + p_0)\,dA = \rho g \sin(\alpha) \int y\,dA + p_0 A$

TM: $\int y\,dA = S_x$ Flächenmoment 1.O.

Statisches Moment

$$\boxed{\int y\,dA = y_s \cdot A}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$F = \rho g \sin(\alpha)\, y_s A + p_0 A$$

$$= \underbrace{(p_0 + \rho g\, t_s)}_{p_s} A$$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= p_s A \\ F_{Fe} &= (p_s - p_0) A \end{aligned}}$$

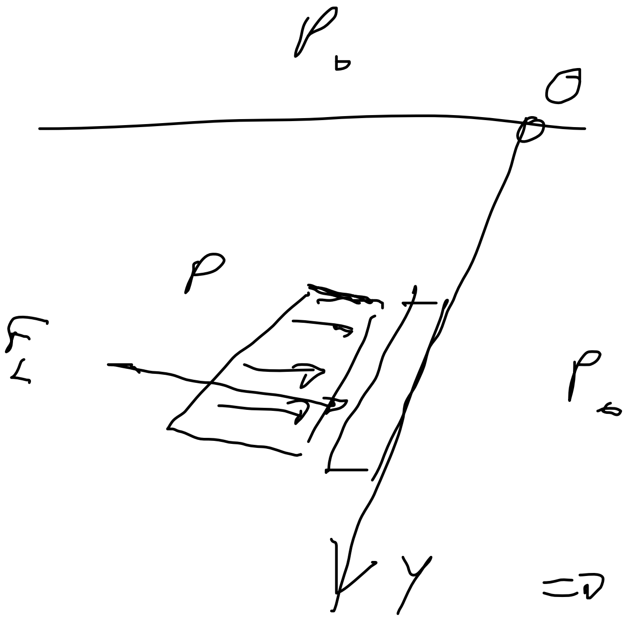
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

2) Wo greift F an

$\rightarrow$ Druckmittelpunkt $D\,(x_D, y_D)$



$$\underline{F_L \cdot y_D} = \int (p - \underline{p_0})\, y \, dA$$

$$p = \rho g y \sin(\alpha) + p_0$$

$$\Rightarrow F_L \cdot y_D = \int \rho g y \sin(\alpha)\, y \, dA$$

$$= \rho g \sin(\alpha) \underbrace{\int y^2 \, dA}$$

TM $\underline{II}$: $\int y^2 \, dA$: Flächenträgheitsmoment J_x

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$y_D = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{F_L} \cdot J_x \qquad \frac{\rho g \sin(\alpha)}{F_L} \hat{=} \frac{1}{S_x} \qquad \Rightarrow \boxed{y_D \; \frac{J_x}{S_x}}$$

$$y_D = \frac{J_x}{y_S A}$$

$$\underline{y_D > y_S} \quad !$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$F_{Fl}\, x_D = \int (p - p_0)\, x \, dA$$

$$= \rho g \sin(\alpha) \underbrace{\int x y \, dA}$$

Deviationsmoment J_{xy}

$$\Rightarrow \boxed{x_D = \frac{J_{xy}}{S_x}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$F = p_s A$$

$$F_F = (p_s - p_0) A$$

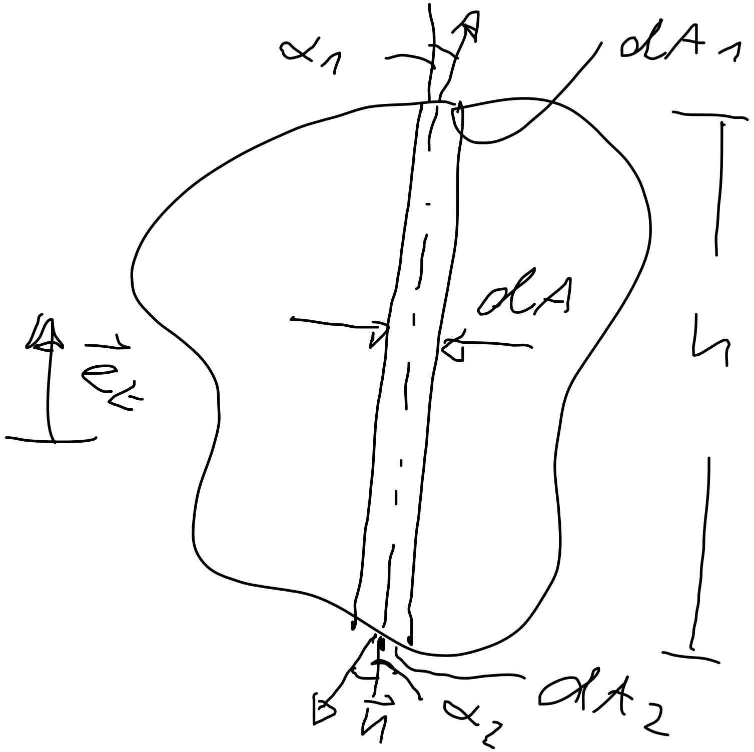
!

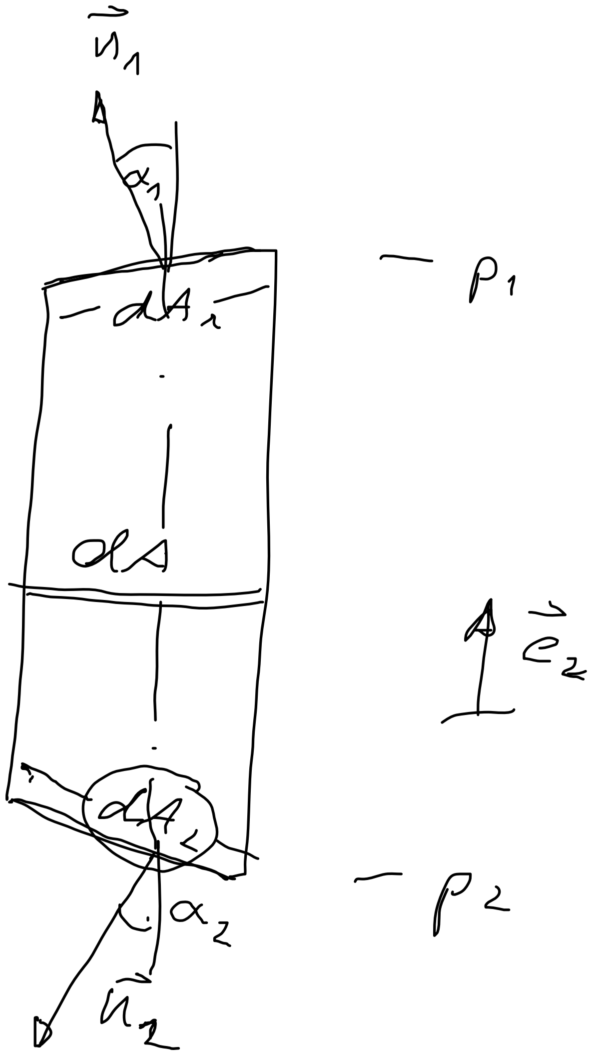
Druckmittelpunkt $D(x_D, y_D)$

$$x_D = \frac{J_{xy}}{S_x} \qquad y_D = \frac{J_x}{S_x}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

Auftrieb





gesucht: Kraft in $\vec{e}_z$ - Richtung

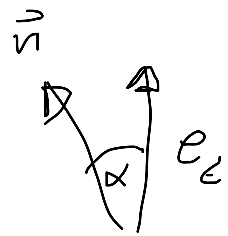
$$\underline{d\vec{F}} = -p\,\vec{n}\,dA \, ; \quad dF_z = d\vec{F} \cdot \vec{e}_z$$
$$= -p\,(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)\,dA$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

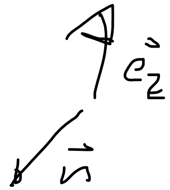
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$\vec{n}\cdot\vec{e}_z = \cos(\alpha)$$



obere Fläche: $\vec{n}_1\cdot\vec{e}_z = \cos(\alpha_1)$

untere Fläche: $\vec{n}_2\cdot\vec{e}_z = -\cos(\alpha_2)$



$$\Rightarrow\; dF_1 = -p_1 \underbrace{\cos(\alpha_1)\,dA_1} = \underline{\underline{dA}}\,p_1$$

$$dF_2 = -p_2 \underbrace{\cos(\alpha_2)\,dA_2} = \underline{\underline{dA}}\,p_2$$

$$\Rightarrow\; dF_a = dF_1 + dF_2 = (p_2 - p_1)\,dA$$

$$F_a = \int dF_a = \rho g \int h\,dA = \rho g V$$

$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

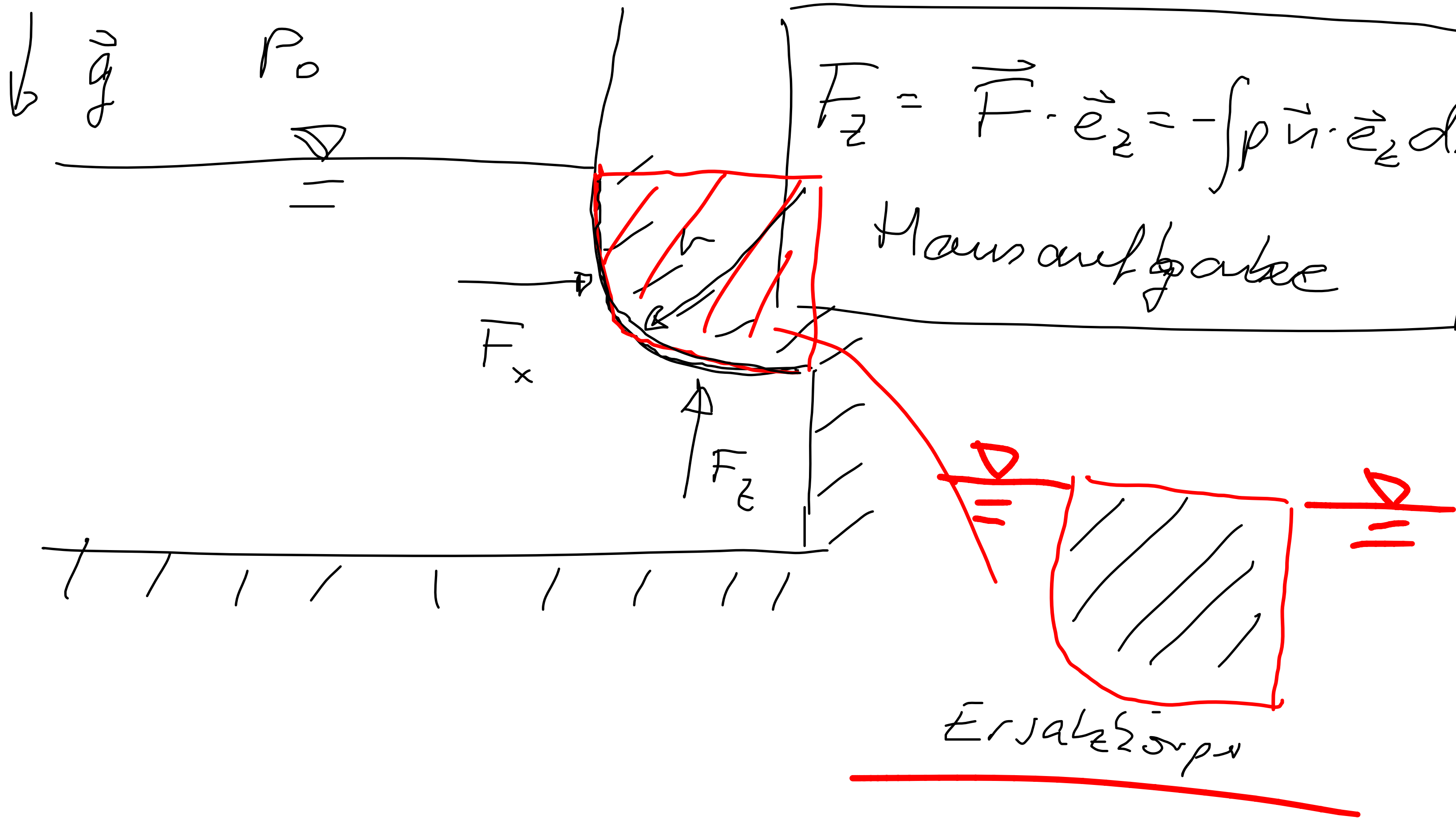
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

$$\boxed{F_a = \varrho_{Fl}\, g\, V}$$

Archimedische Auftriebsformel

$$F_z = \vec{F}\cdot\vec{e}_z = -\int p\,\vec{n}\cdot\vec{e}_z\,dA$$

Hausaufgabe

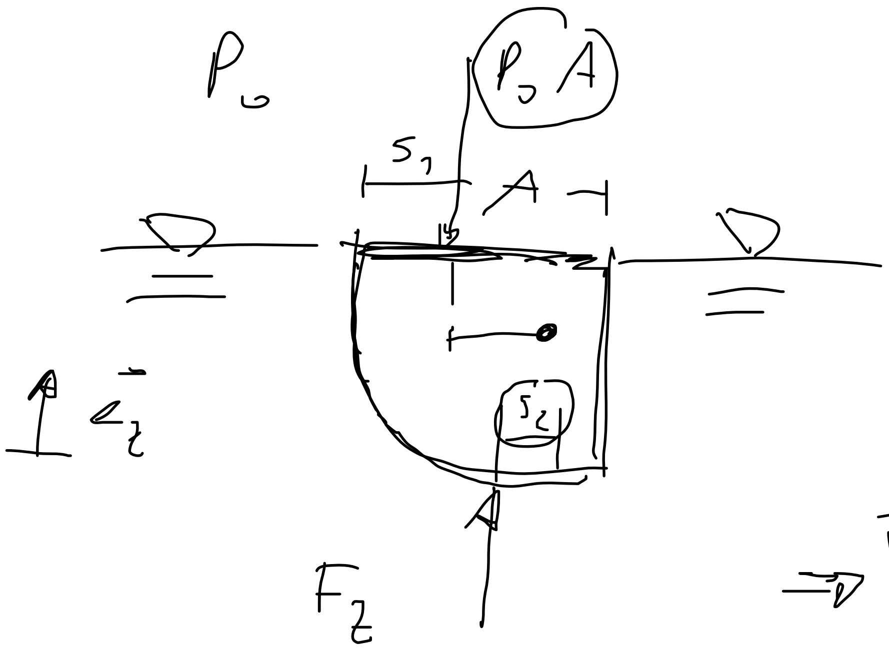


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3



$$-p_0 A + F_z = F_A$$

$$\Rightarrow \boxed{F_z = F_A + p_0 A}$$

Wo greift F_z an?

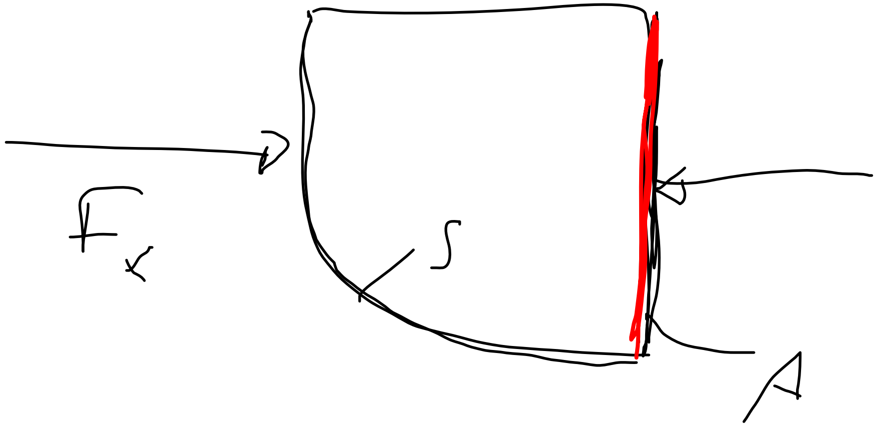
$\Rightarrow$ Momentengleichgewicht: $p_0 A s_1 - F_z s_z \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow s_z = \frac{p_0 A}{F_z} s_1 = \frac{p_0 A}{F_A + p_0 A} \cdot s_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

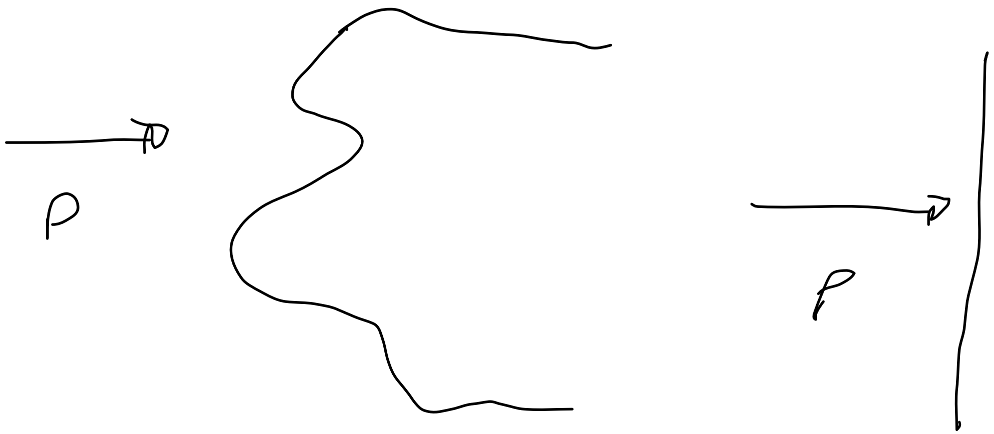
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



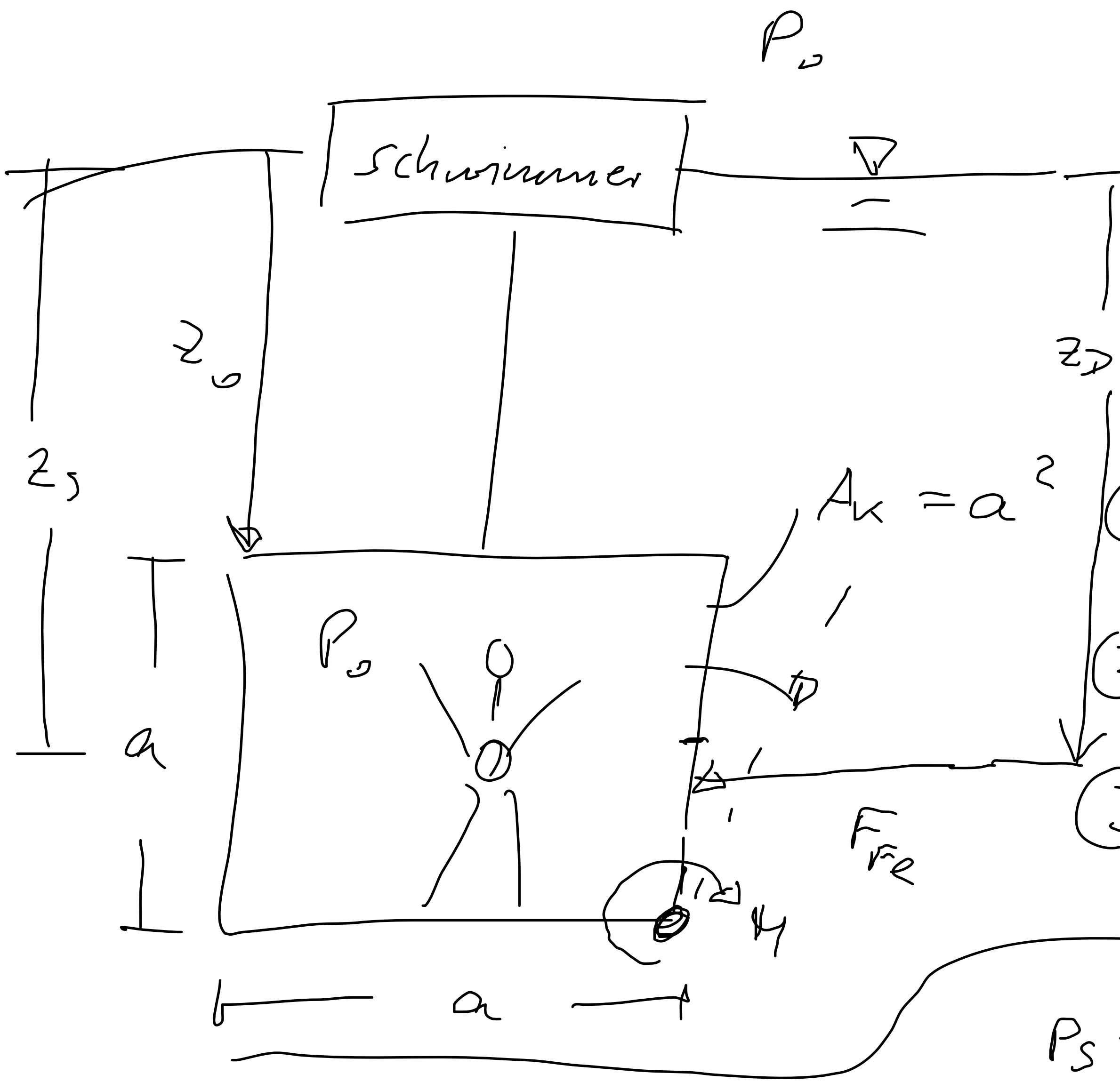
$$F = p_S A$$

$$F_x = p_S A_{proj}$$

A = projizierte Fläche von S



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



gesucht

① F_{Fl} auf Klappe

② $z_D = ?$

③ $M = ?$

$$p_S = \varrho g z_S + p_0$$

$$z_S = z_0 + \frac{a}{2}$$

① $$F_{Fl} = (p_S - p_0) A_K =$$

$$\Rightarrow F_{Fl} = \varrho g a^2 \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

z_D : $\quad \underline{F_{Fl}} \cdot \underline{z_D} = \int_S p\, z\, dA$

$p = \rho g z \qquad dA = a\, dz$

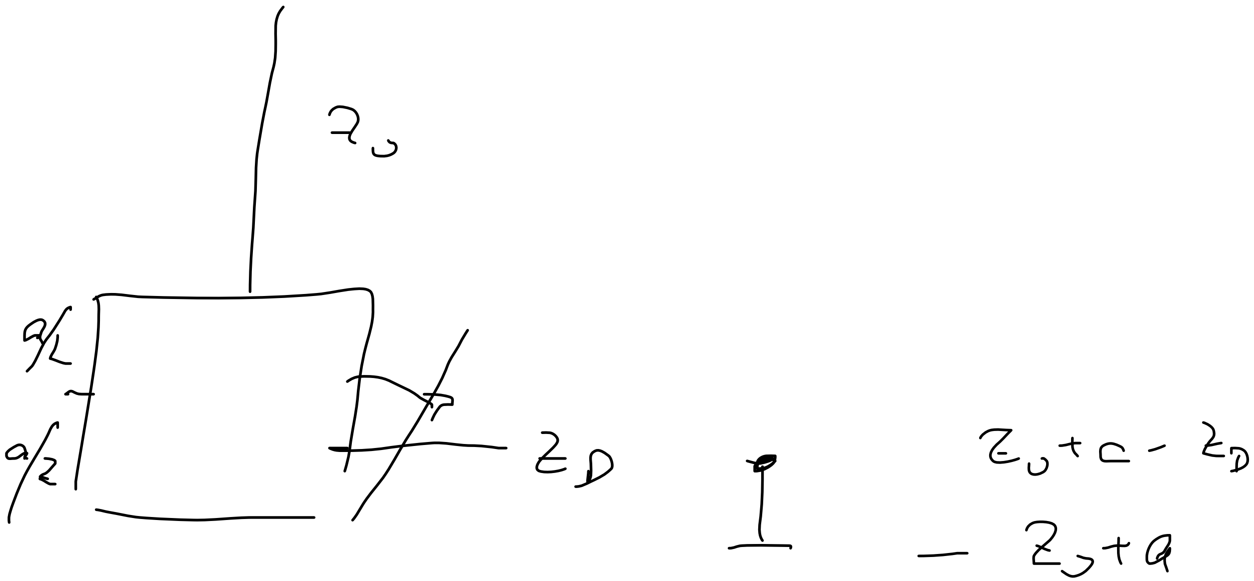
$\Rightarrow F_{Fl} \cdot z_D = \int_{z_0}^{z_0+a} \rho g z^2 a\, dz = \rho g a \int_{z_0}^{z_0+a} z^2\, dz$

$\Rightarrow \underline{F_{Fl}} \cdot z_D = \rho g a \frac{1}{3} z^3 \Big|_{z_0}^{z_0+a} \quad . \quad . \quad . \quad .$

$z_D = \frac{2}{3} \frac{(z_0+a)^3 - z_0^3}{a(2 z_0 + a)}$ $\Big|$ mit $F_L = \rho g a^2 \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

3



$$M = F_{Fe}\left(z_0 + a + z_D\right)$$ (1)

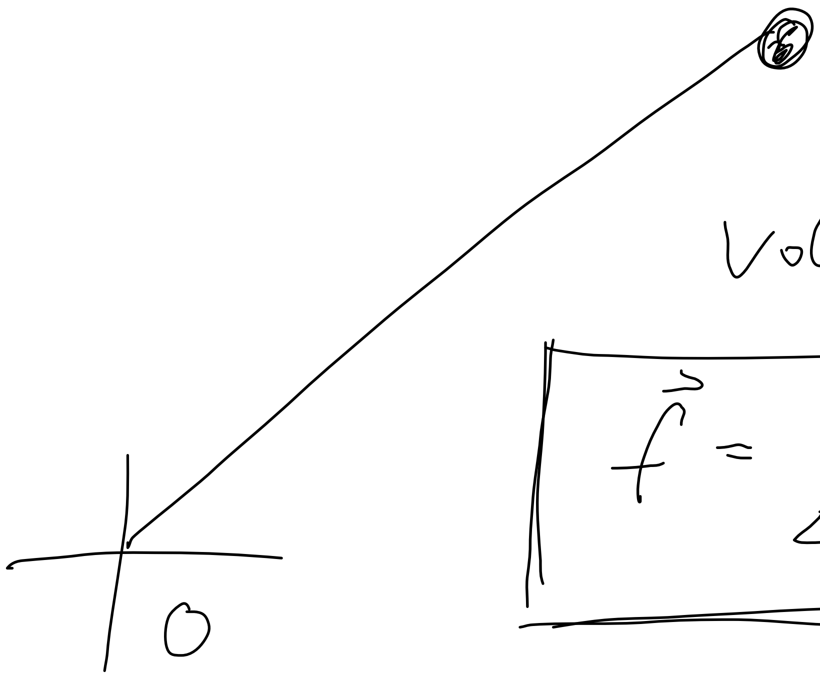
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

Volumenkraft



$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Volumenkraft $\vec{f}$

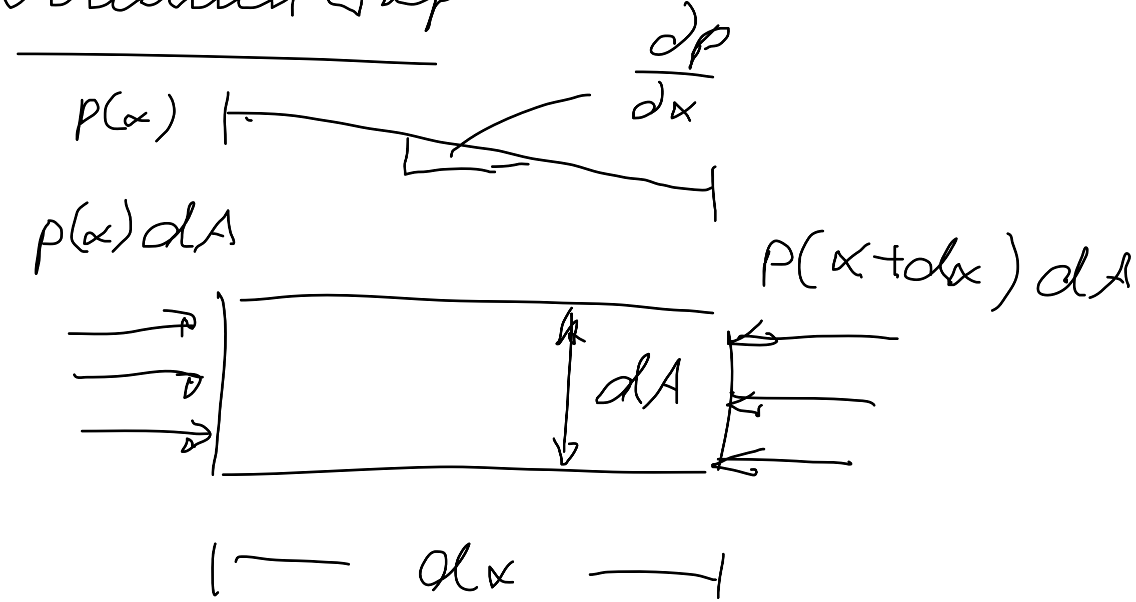
$$\boxed{\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}}$$

Auftrieb: $\vec{f} = -\varrho g \vec{e}_z$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Zusammenhang zwischen Druckverteilung und Volumenkraft



$$dF = \underbrace{p(x+dx)} dA - p(x)\, dA$$

$$p(x+dx) \approx \boxed{p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 3

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$dF = \left(p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx - p(x) \right) dA$$

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial p}{\partial x} \underbrace{dx \, dA}_{dV} \Rightarrow dF = \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$\vec{f} = \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

$$\frac{dF}{dV} = \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = f_x}$$

$$y: \quad f_y = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$z: \quad f_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f} = \nabla p}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 3