Optimaler Betrieb eines Wasserkraftwerkes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2011/12

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

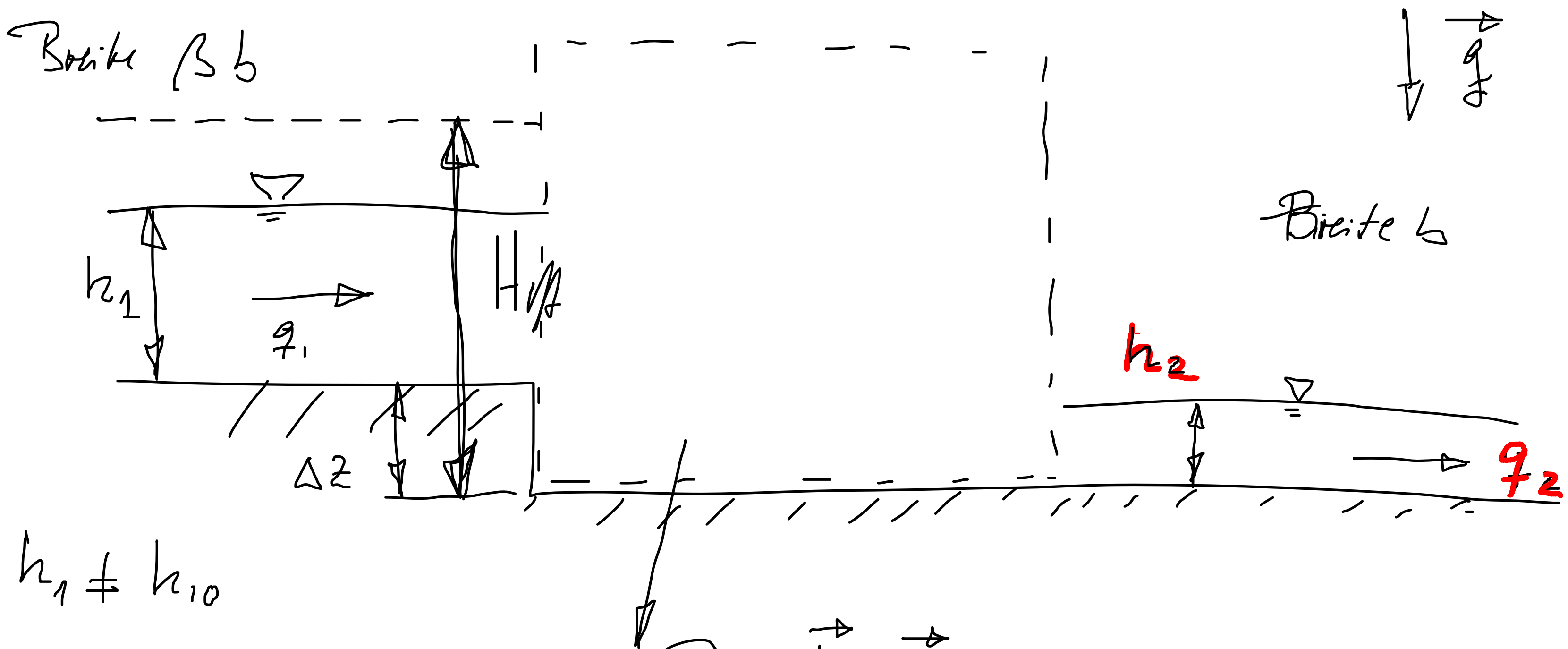
Vorlesung 9

11.01.2012

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen



$h_1 \neq h_{10}$

$q_1 \neq q_{10}$

$P_T = \vec{M} \cdot \vec{\Omega}$

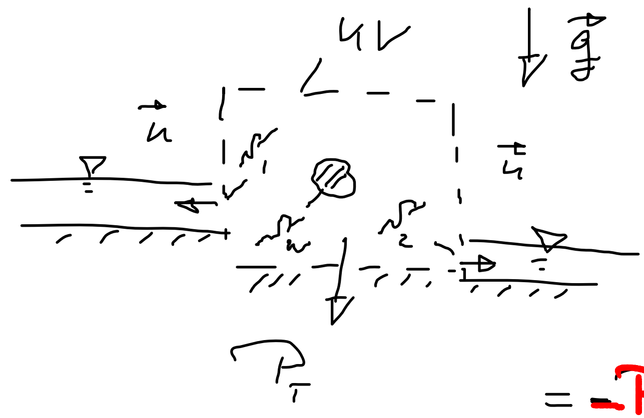
$q_2 = \dfrac{Q}{b}$ Volumenstrom pro Breite.

Aufgabe: ~~Besti~~ Löse die Optimierungsaufgabe in den Variablen h_2, q_2 derart, dass $P_T = \vec{M} \cdot \vec{\Omega} = \int_{S_{Welle}} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dS$ maximal wird.

$H_{eff} = \Delta z + h_1 + \dfrac{u_1^2}{2g}$ $\quad u_1 = \dfrac{q_1}{h_1}$ ist gegeben

Das Energieangebot wird über die effektive Höhe H_{eff} gegeben.

1. Hauptsatz in integraler Form



$$\boxed{\underbrace{\frac{DE}{Dt} + \frac{DU}{Dt}} = P + \underbrace{\dot{Q}}_{\equiv\, 0}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\rho e + \rho \frac{u^2}{2}\right) dV + \underbrace{\rho Q\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right)}_{\text{Fluß der kinet. Energie}} + \underbrace{\rho Q (e_2 - e_1)}_{\text{Fluß der inneren Energie}} = \overbrace{\int_{S_{Welle}} \vec{t}\cdot\vec{u}\, dS}^{= -P_T} + \int_{S_1 + S_2} \vec{t}\cdot\vec{u}\, dS + \int_V \rho \vec{g}\cdot\vec{u}\, dV$$

Im zeitlichen Mittel verschwindet das Integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \phi \, dV \equiv 0.$$

$$\varrho Q\left(\frac{u_2^2}{2}-\frac{u_1^2}{2}\right)+\varrho Q\left(e_2-e_1\right)=-P_T+\int_{S_1+S_2}\vec{t}\cdot\vec{u}\,dS+\int_V \varrho\vec{g}\cdot\vec{u}\,dV$$

zum Volumenintegral oder zur Leistung der Volumenkraft $\varrho\vec{g}=-\varrho\nabla\psi$

ψ ist das Potential der Schwerkraft.

$\vec{g}=-g\vec{e}_z$, dann ist

$\psi=gz+\text{const.}$

$$\int_V \varrho\vec{g}\cdot\vec{u}\,dV=\int_V -\varrho\nabla\psi\cdot\vec{u}\,dV$$

$$=\int_V -\nabla\cdot(\psi\varrho\vec{u})\,dV+\underbrace{\int_V \psi\,\nabla\cdot(\varrho\vec{u})\,dV}_{\equiv 0}$$

$\equiv 0$, für inkompressible Strömung
oder für stationäre Str.

$$=-\oint_S \psi\varrho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT
FLUID
SYSTEM
TECHNIK
Optimierung
und Skalierung von
Fluidsystemen

Kontigleichung in differentieller Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$ und zweiten Integral verschwindet.

$$\int_V \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\,dV = \oint_S -\rho\psi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

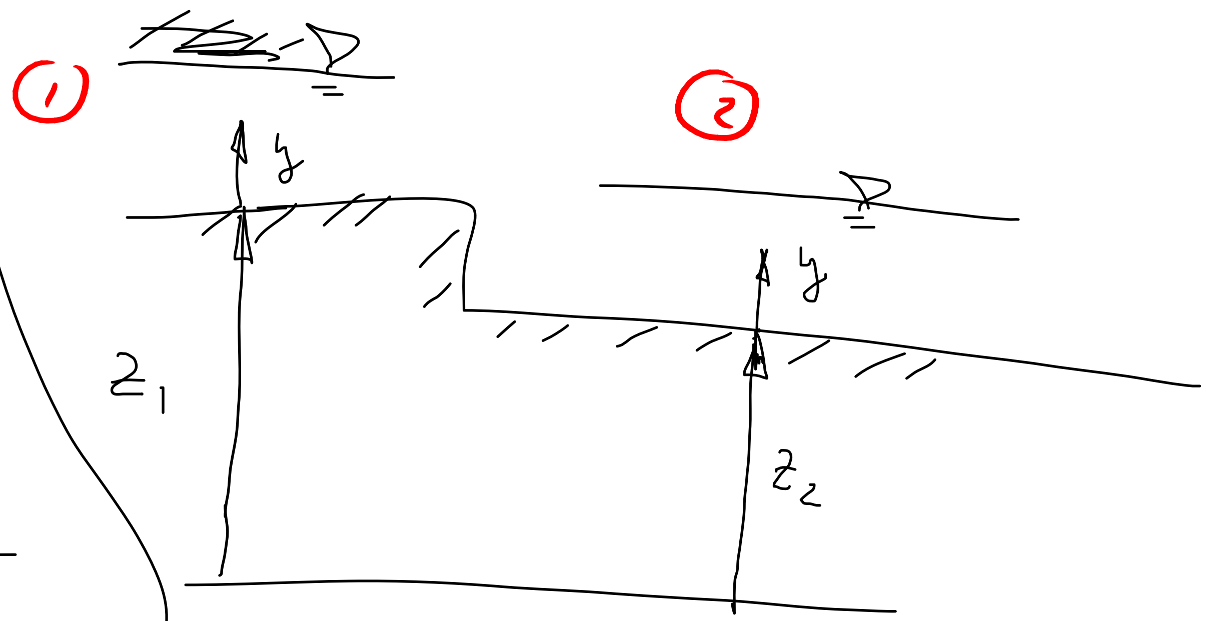
Leistung der Volumenkraft $\rho\vec{k}$ = Fluß des Potentials über die Grenzen des Kontrollvolumens.

$$\rho Q\left(\frac{u_2^2}{2}-\frac{u_1^2}{2}\right)+\rho Q\left(e_2-e_1\right)+\underbrace{\rho Q g\left(z_2-z_1\right)}_{a}=$$

$$=-P_T+\int_{S_1+S_2}\vec{t}\cdot\vec{u}\,dS+\int_{S_1+S_2}\underbrace{-\rho g y}_{b}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\Psi_1=g(\underbrace{z_1}_{a}+\underbrace{y}_{b})$$

$$\Psi_2=g(z_2+y)$$



Annahme: Ausgeglichene Strömung an 1, und 2.

$$\vec{t}=-\left[p_0+\rho g(h-y)\right]\vec{n}$$ hydrostatischer Spannungszustand.

$$\rho Q\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + e_2 - e_1 + z_2 g - z_1 g\right) = -P_T +$$

$$+ \int_{S_1+S_2} -\rho g(h - \cancel{y})\,\vec{n}\cdot\vec{u}\,dS + \cancel{\int_{S_1+S_2} -\rho g y\,\vec{n}\cdot\vec{u}\,dS}$$

$$\rho Q\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + e_2 - e_1 + z_2 g - z_1 g + h_2 g - h_1 g\right) = -P_T \quad \Big| \frac{1}{\rho Q g}$$

$$\underbrace{\left(\frac{u_2^2}{2g} + h_2 + z_2\right)}_{H_2} - \underbrace{\left(\frac{u_1^2}{2g} + h_1 + z_1\right)}_{H_1} + \underbrace{\frac{e_2 - e_1}{g}}_{h_v} = \underbrace{-\frac{P_T}{\rho Q g}}_{-H_T}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

$$H := h + z + \frac{u^2}{2g}$$ total head

$$h_v = \frac{e_2 - e_1}{g} = \frac{c}{g}(T_2 - T_1)$$ head loss Verlusthöh.

c Wärmekapazität.

$$H_T = \frac{P_T}{\rho Q g}$$ head drop Fallhöh.

$$\boxed{H_1 - H_2 = H_T + h_v}$$

1. HS in ~~integraler~~ Form (nicht Bernoullisch Gleich ?).

☺ sehr einfach

11.01.2012

$$H_1 - H_2 = H_T + h_L$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{\eta} H_T \,, \quad \text{mit } \eta := \frac{1}{1 + \frac{h_L}{H_T}}$$

hydraulischer Wirkungsgrad der Turbine

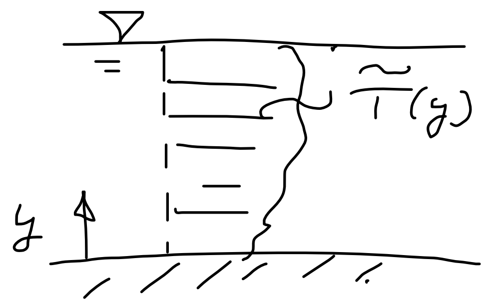
$$h_L = \frac{c}{g}\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\eta = 1 - \frac{c}{g}\,\frac{T_2 - T_1}{H_1 - H_2}$$

(+) sehr kostengünstig

(−) sehr ungenau.

$$T := \frac{1}{Q}\int u \tilde{T}\, dA$$



$$P_T(h_2, q_2) = \eta \rho g \underbrace{q_2 b}_{Q} (H_1 - H_2)$$ 1. HS.

$$H_{eff} := \Delta z + h_1 + \frac{q_1^2}{2 g h_1^2}$$ gegebene Größe

$$P_T(h_2, q_2) = \eta \rho g q_2 b \left(H_{eff} - h_2 - \frac{q_2^2}{2 g h_2^2}\right)$$

$$\nabla P_T \equiv 0$$

$$\leadsto \quad q_{2\,opt} = \left(\frac{2}{5} H_{eff}\right)^{3/2} g^{\frac{1}{2}}$$

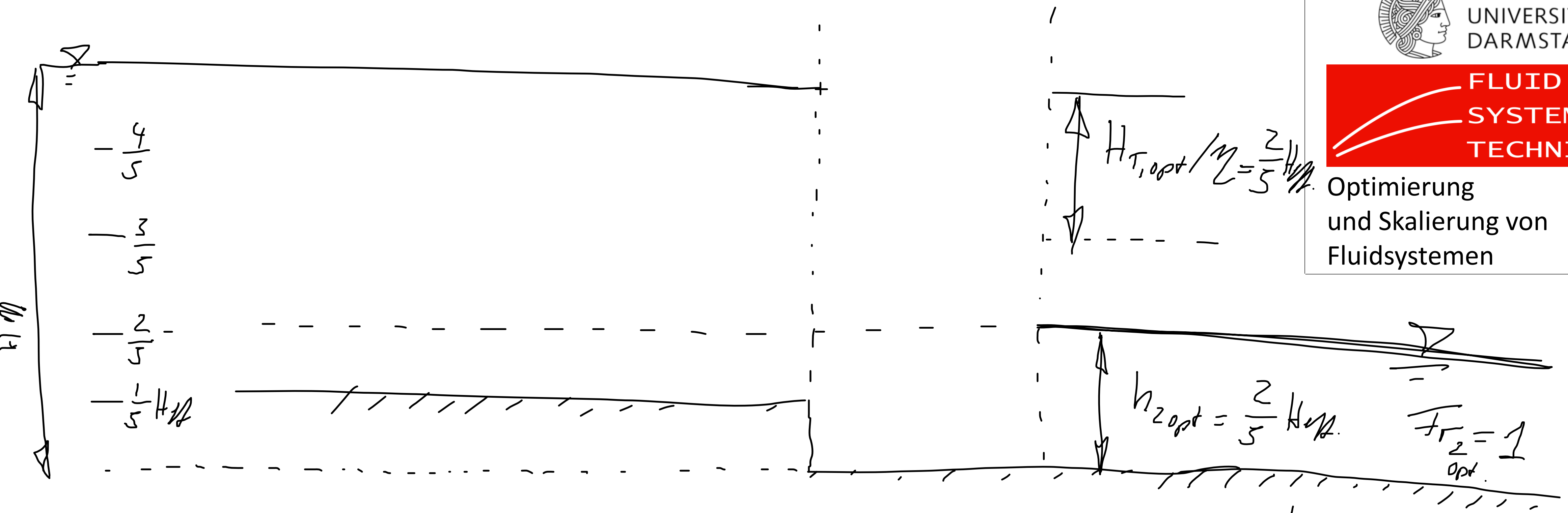
$$h_{2\,opt} = \frac{2}{5} H_{eff}$$

Einsetzen in der 1. H.S.

$$\Delta P_{T,opt} = 2 \varrho g^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5} H_{eff}\right)^{5/2} b$$

$$H_{T,opt} = \frac{P_{T,opt}}{\varrho Q g} = 2 \, \frac{2}{5} H_{eff}$$

besser geht es nicht!



$$q_{2opt} = g^{\frac{1}{2}} h_2^{3/2}$$

$$= g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5} H_{eff}\right)^{3/2}$$

$$q_{2opt} = \left(\frac{2}{5} H_{eff}\right)^{3/2} g^{\frac{1}{2}}$$

$$Fr_{2opt} \overset{!}{=} 1 = \left.\frac{u_2}{\sqrt{g h_2}}\right|_{opt} \leadsto \left. u_2 = \sqrt{g h_2}\right|_{opt}$$

$$u_2 = \frac{q_2}{h_2} = g^{\frac{1}{2}} h_2^{\frac{1}{2}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

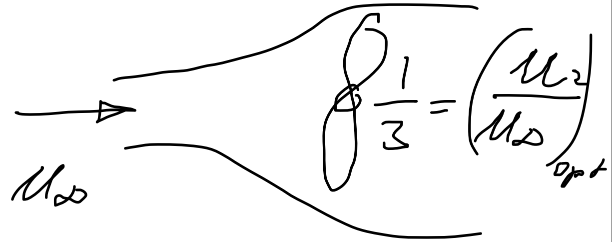
FLUID SYSTEM TECHNIK

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

Windkraft

$$\frac{P_T}{\frac{\varrho}{2} u_\infty^3 A} := c_P$$

$$\frac{c_{P\,opt}}{\eta} = \frac{16}{27}$$



$$\frac{1}{3} = \left(\frac{u_2}{u_\infty}\right)_{opt}$$

Wasserkraft.

$$\frac{P_T}{P_{avail}} := c_P$$

$$P_{avail} = 2 \varrho g^{3/2} \left(\frac{2}{3} H_{eff}\right)^{5/2} b = 2 P_{T\,max}/\eta$$

$\rightsquigarrow$

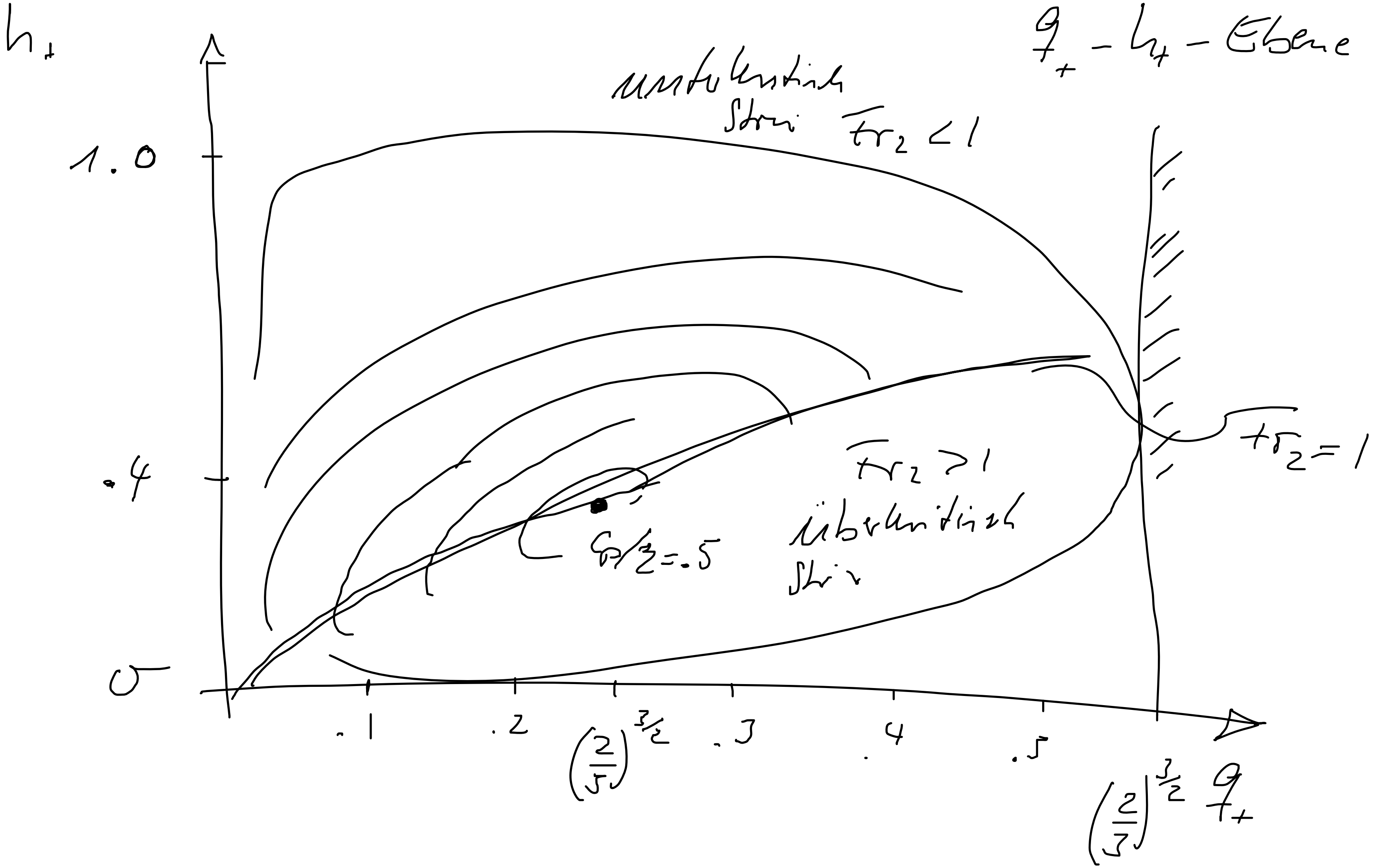
$$\frac{c_{P\,opt}}{\eta} = \frac{1}{2}$$

Definition dimensionsloser Größe.

$$q_+ := \frac{q_z}{g^{\frac{1}{2}} H_{eff}^{3/2}} \qquad h_+ := \frac{h_z}{H_{eff}}$$

$$q_{+opt} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} \qquad h_{+opt} = \frac{2}{5}$$

$$c_p(h_+, q_+) = 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2} q_+ \left(1 - h_+ - \frac{1}{2}\,\frac{q_+^2}{h_+^2}\right) \qquad \text{1. HS.}$$


$q_+ - h_+$ - Ebene
h_+
unterkritisch
Strö.
$Fr_2 < 1$
1.0
.4
0
$Fr_2 > 1$
überkritisch
Str.
$Fr_2 = 1$
.1
.2
.3
.4
.5
$\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} q_+$