Verfügbare Leistung bei einer Windkraftmaschine

$$P_{avail} := \frac{\rho}{2} u_\infty^3 A$$

A ist die durchströmte Fläche; $A = \frac{\pi}{4} D^2$ für eine Kreisscheibe

	1980	1985	1990	1995	2000	2005
D	15 m	20 m	30 m	46 m	70 m	115 m
P	30 kW	80 kW	250 kW	0.6 MW	1.5 MW	5 MW ...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2011/12
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen
Vorlesung 3

$P_{SW} < P_{avail}$

P_{SW} Wellenleistung $P_{SW} = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}$

„technische Arbeit"

$$\frac{P_{SW}}{P_{avail}} := C_P$$ Coefficient of Performance

Erntefaktor.

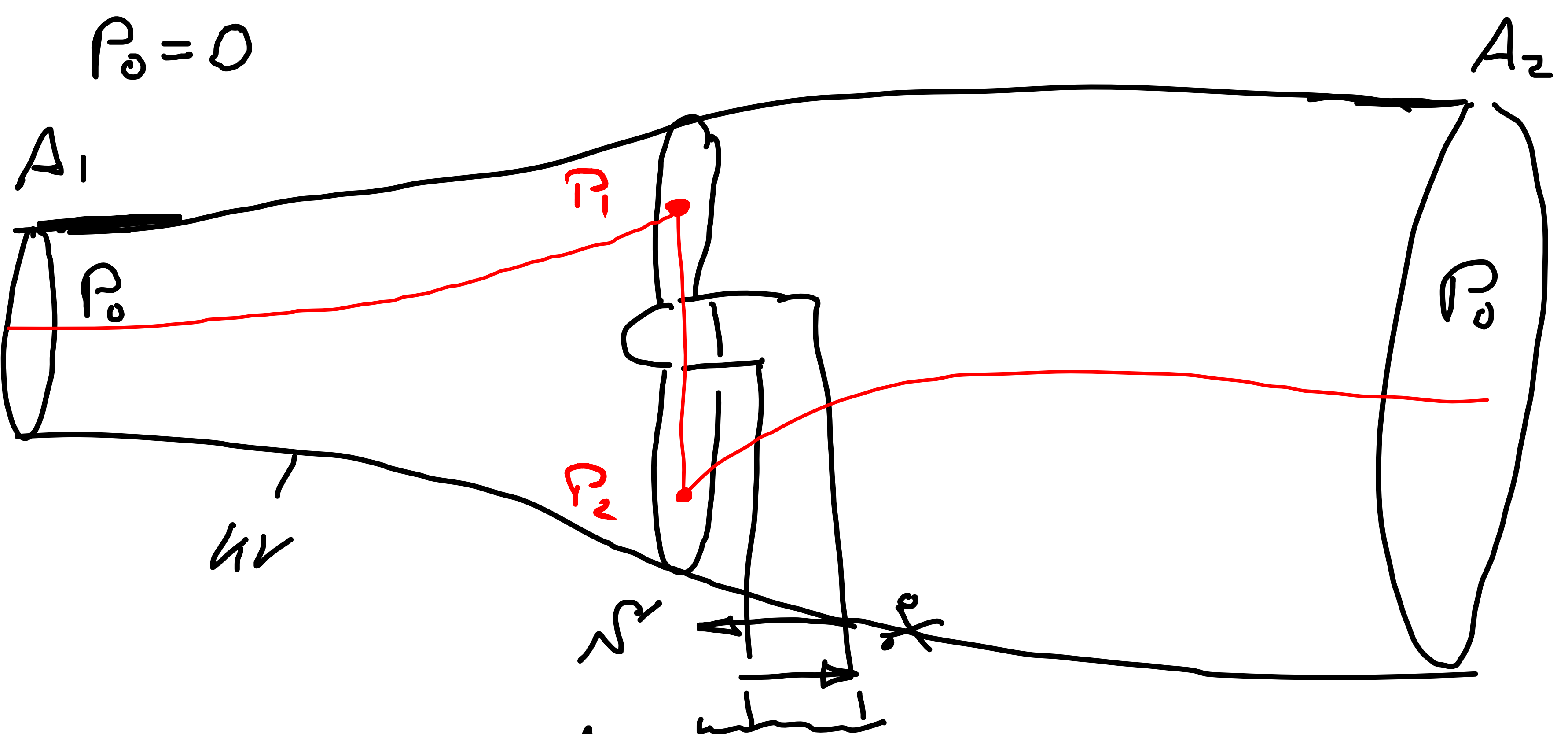
Betzsche Gesetz $C_{P\max} = \frac{16}{27} \eta = 0.59\,\eta$

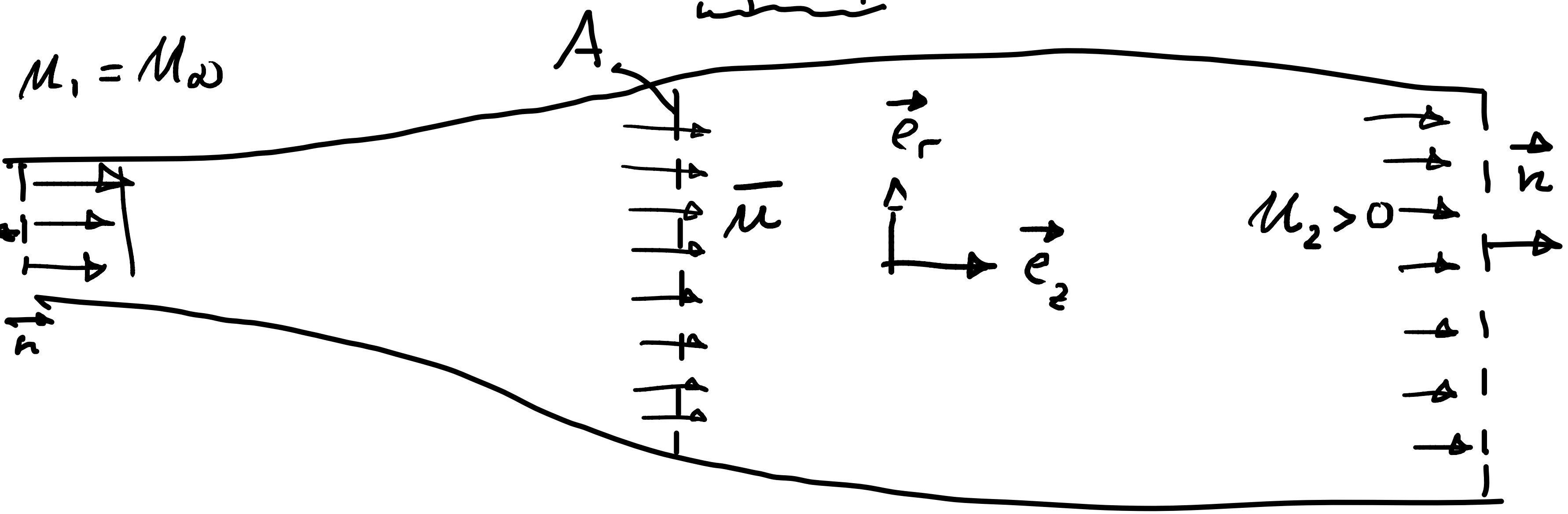
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Selbst für einen hydraulischen od. aerodynamischen Wirkungsgrad $\eta = 1$, d.h. keine Dissipation und damit keine Entropieerhöhung, ~~ist~~ kann nur rund 60% der verfügbaren Leistung in Wellenleistung umgesetzt werden.

Grund: 1. Kinetischer Fluß in der Abströmung

2. Aufstauen der Strömung durch das Windrad.


p0 = 0
A1
A2
p0
p1
p2
p0
KV
δ


u1 = u∞
A
ū
e_r
e_z
u2 > 0
n
n

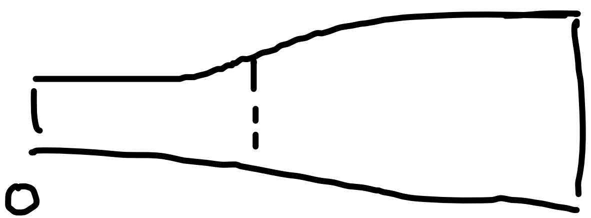
Ideale Leitungsumsatz:

Annahme kein Drall hinter der Maschine.

$$\vec{u} = \underbrace{u_z}_{\text{axiale Komp.}} \vec{e}_z + \underbrace{u_r}_{\text{radiale Komp.}} \vec{e}_r + \underbrace{u_\varphi}_{\text{Umfangskomponente od. Drall.}} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\rho}{2}\,\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{\rho}{2}u^2 = \frac{\rho}{2}\left(u_z^2 + u_r^2 + u_\varphi^2\right)$$

A_1: $u_r = u_\varphi = 0$



A_2: $u_r = 0$

$u_z, u_\varphi \neq 0.$

Ideale Umsetzung, u_φ an A_2 soll identisch Null sein.

1. Impulssatz für die Stromröhre

   $\rightsquigarrow$ Schub S

2. Impulssatz für die Scheibe

   $\rightsquigarrow$ Schub S

3. Bernoulli $0 \to 1$

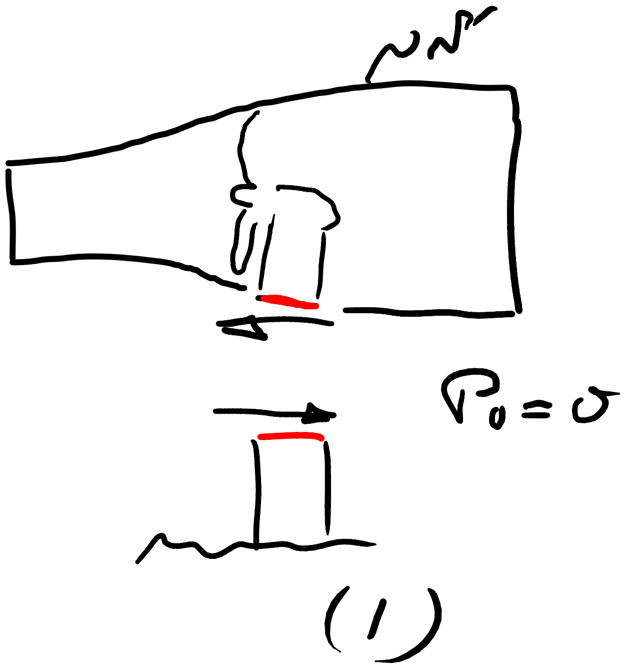
4. Bernoulli $2 \to 0$

Zu 1 axiale Komponente.

$$-\rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 = \underbrace{\int \vec{t}\cdot\vec{e}_z\, dS}_{\text{Schnittk.}} + \overbrace{\int t_z\, dS}^{\equiv 0}$$

S- Schnittk.

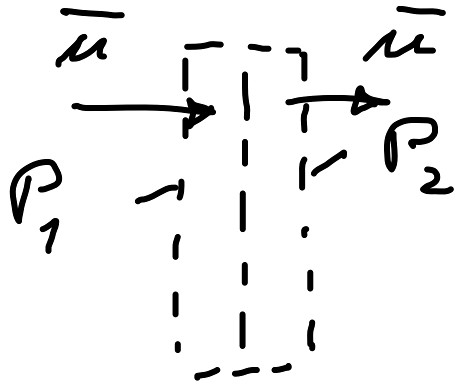
Kraft des Windrades auf die Luft $= -S$.



$$-\rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 = -S.$$

Zu 2.

$$N' = (p_1 - p_2)A \qquad (2)$$



Zu 3 Bernoullische Gleichung von $0 \rightarrow 1$

$$\frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 + p_1 \qquad (3)$$

Zu 4. Bernoulli von $2 \rightarrow 0$

$$\frac{\rho}{2} \bar{u}^2 + p_2 = \frac{\rho}{2} u_2^2 \qquad u_2^2 = u_{z2}^2 + u_{\varphi 2}^2 \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt die Druckänderung über den Zylinder

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(u_1^2 - u_2^2\right) \quad \checkmark$$

$$= \frac{\rho}{2}\left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 + u_2\right) \quad \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} S &= A\,\frac{\rho}{2}\left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 + u_2\right) \\ &= A\rho\,\bar{u}\left(u_1 - u_2\right) \quad \checkmark \\ S &= -\rho A_2 u_2^2 + \rho A_1 u_1^2 \\ &= \rho A \bar{u}\left(u_1 - u_2\right) \quad \checkmark \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\bar{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}}}$$

1. Ergebnis

Die Scheibe wird gerade mit dem arithmetischen Mittel aus An- und Abströmgeschwindigkeit durchströmt!

Voraussetzung: Kein Drall in der Abströmung. Andernfalls Berücksichtigung in der Bernoulli Gleichung!

$$\bar{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

$\rightarrow$ Leistungsumsatz.

$$P_W = \eta\, S\, \bar{u}$$

$$= \eta A \rho\, \bar{u}^2 (u_1 - u_2)$$

$$= \frac{\eta A \rho}{4} (u_1 + u_2)^2 (u_1 - u_2)$$

$$\frac{P_W}{P_{avail}} = \eta\, \frac{1}{\cancel{4}\,2} \left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = c_P$$

$$P_{avail} = \frac{\rho}{2} u_1^3 A$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

In der Optimierung eine unabhängige Veränderliche, nämlich das Geschwindigkeitsverh.

$$\frac{u_2}{u_1}$$

$$c_p(u_+, \eta) = \eta \frac{1}{\cancel{4}\,2} (1+u_+)^2 (1-u_+)$$

$\eta = \text{const}$ Annahme.

$$\frac{d c_p}{d u_+} \overset{!}{=} 0 \rightsquigarrow 2\,\cancel{(1+u_+)}\,(1-u_+) \overset{!}{=} (1+u_+)^{\cancel{2}}$$

$$2 - 2u_+ = 1 + u_+$$

$$u_{+opt} = \frac{1}{3}$$ ✓

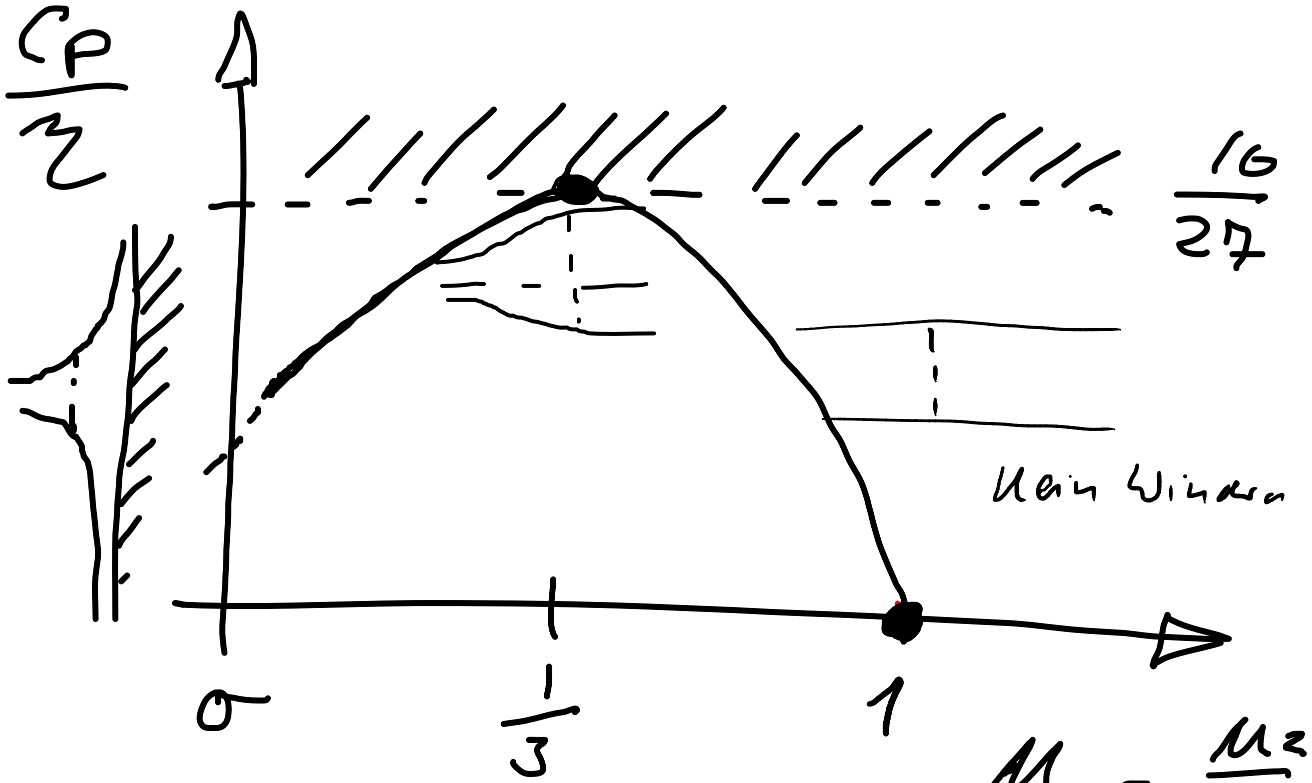
Einsetzen in C_p

$$C_{p\,opt} = C_p(\mu_{t\,opt}) = \eta \frac{1}{\cancel{4}\,2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \eta \frac{1}{\cancel{4}\,2}\,\frac{16}{9}\,\frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{= \eta \frac{16}{27}}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



$u_+ = \frac{u_2}{u_1}$

$u_+ = \frac{u_2}{u_1} \to 0$

Voraussetzung der Ableitung ist verletzt.

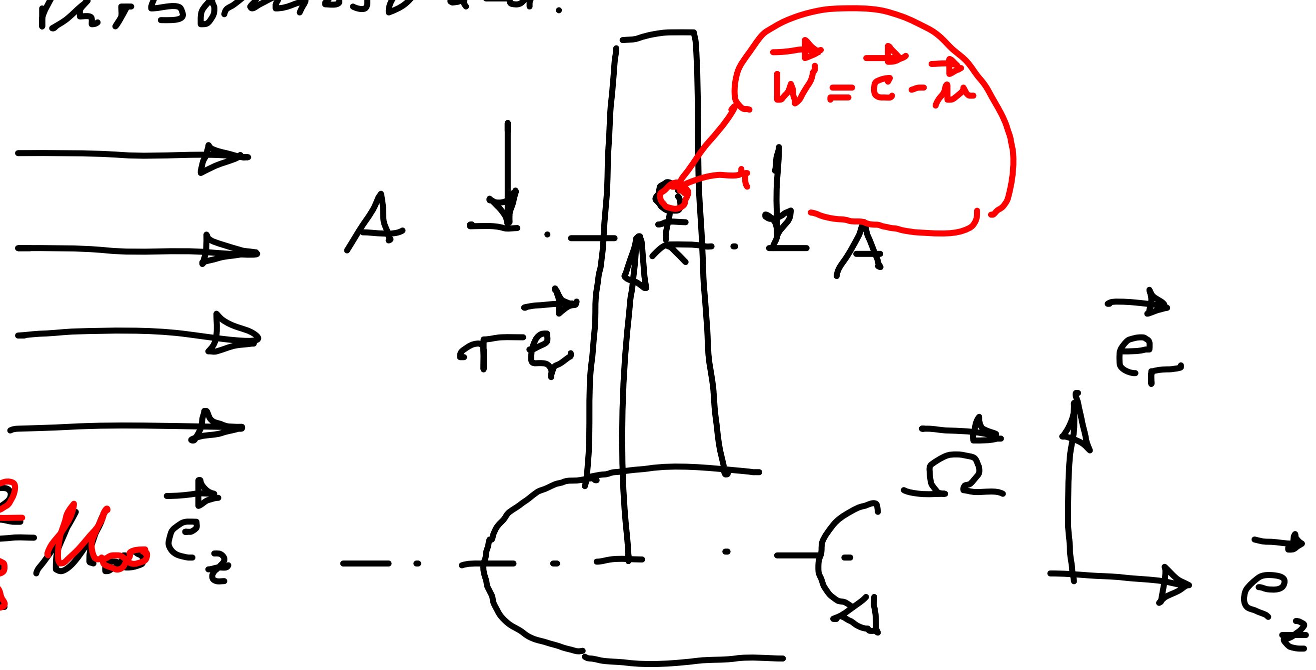
$u_+ = \frac{u_2}{u_1} \to 1$

kein Windrad

Nutzen des Betzschen Gesetzes zur Auslegung eines Windrades.

$$\bar{u}_{opt} = \frac{1}{2}\left(u_\infty + \frac{1}{3}u_\infty\right) = \frac{2}{3}u_\infty$$

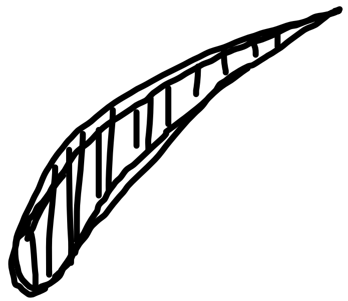
Ab jetzt konkrete Maschine, nämlich eine Turbomaschine.



$$\vec{c} = \frac{2}{3} u_\infty \vec{e}_z$$

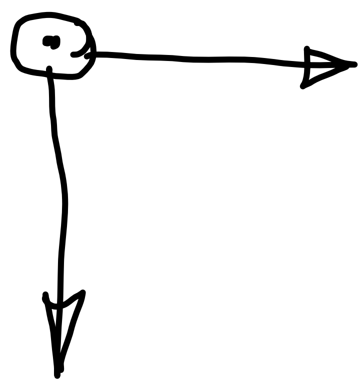
Schaufelschnitt A-A am Radius r

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen



Schnitt A-A
am Radius r

$\vec{c} = \frac{2}{3} u_\infty \vec{e}_z$



Geschwindigkeitsdreieck

$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$

Weitere Unterteilung der Maschine

Wenige Schaufeln

große Teilungswinkel $= \frac{2\pi}{z}$

z Schaufelanzahl.

i.d.R. $z=3$ $\leadsto$ Teilungswinkel $= \frac{2}{3}\pi$.

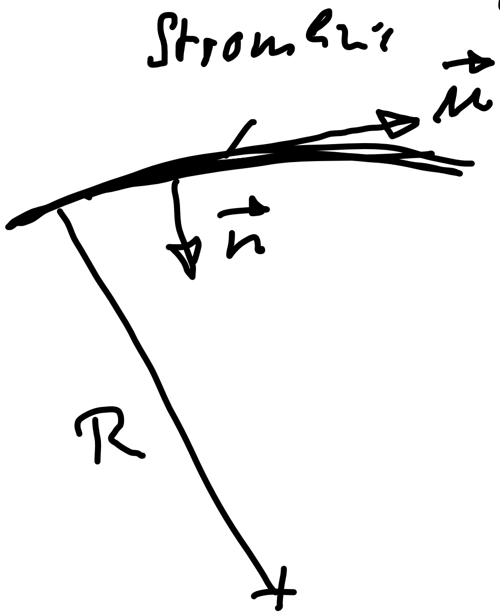
$\Longrightarrow$ Auslegung mit Methoden der Aerodynamik.

sonst Auslegung mittels Drallsatz.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

Wenn Stromlinien nicht gekrümmt sind, dann verschwindet die Änderung des Druckes normal zur Stromlinie

vgl. Eulergleichung in natürlichen Koordinaten.

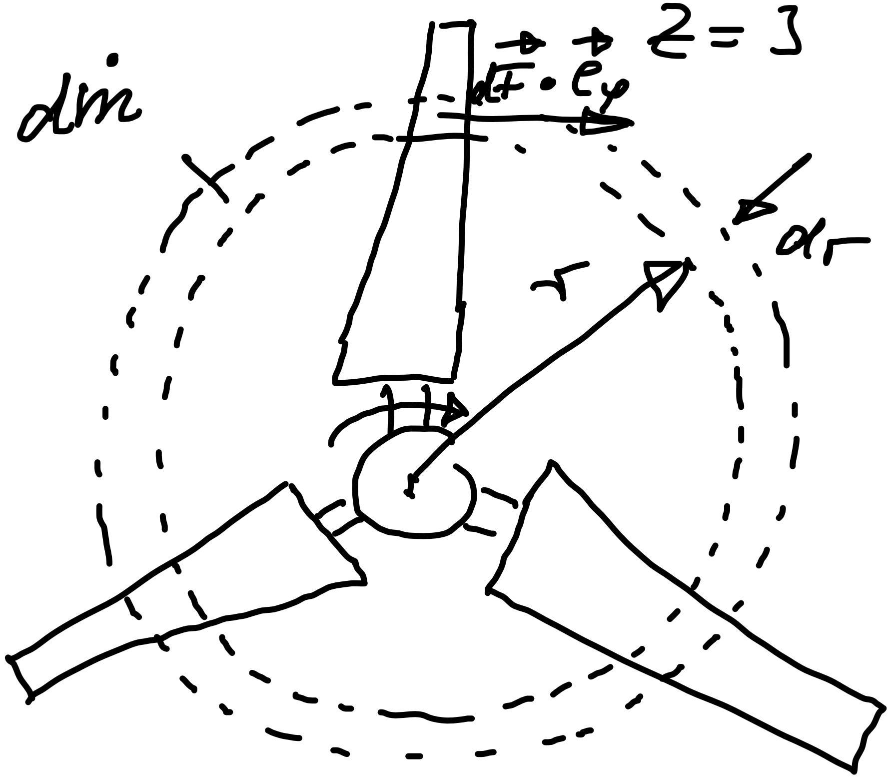


$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim \frac{u^2}{R} \qquad u = |\vec{u}|$$

Für $R \to \infty$ gilt

$$\frac{\partial p}{\partial n} \to 0$$

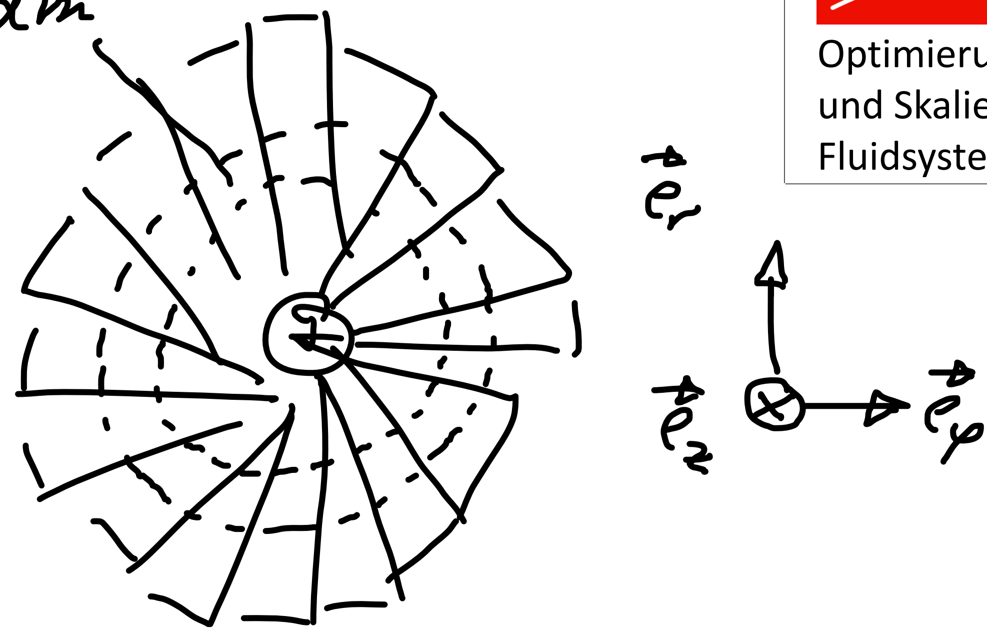
Turbo.



Turbo

$z \geq 10$

$d\dot m$



Aerodynamik

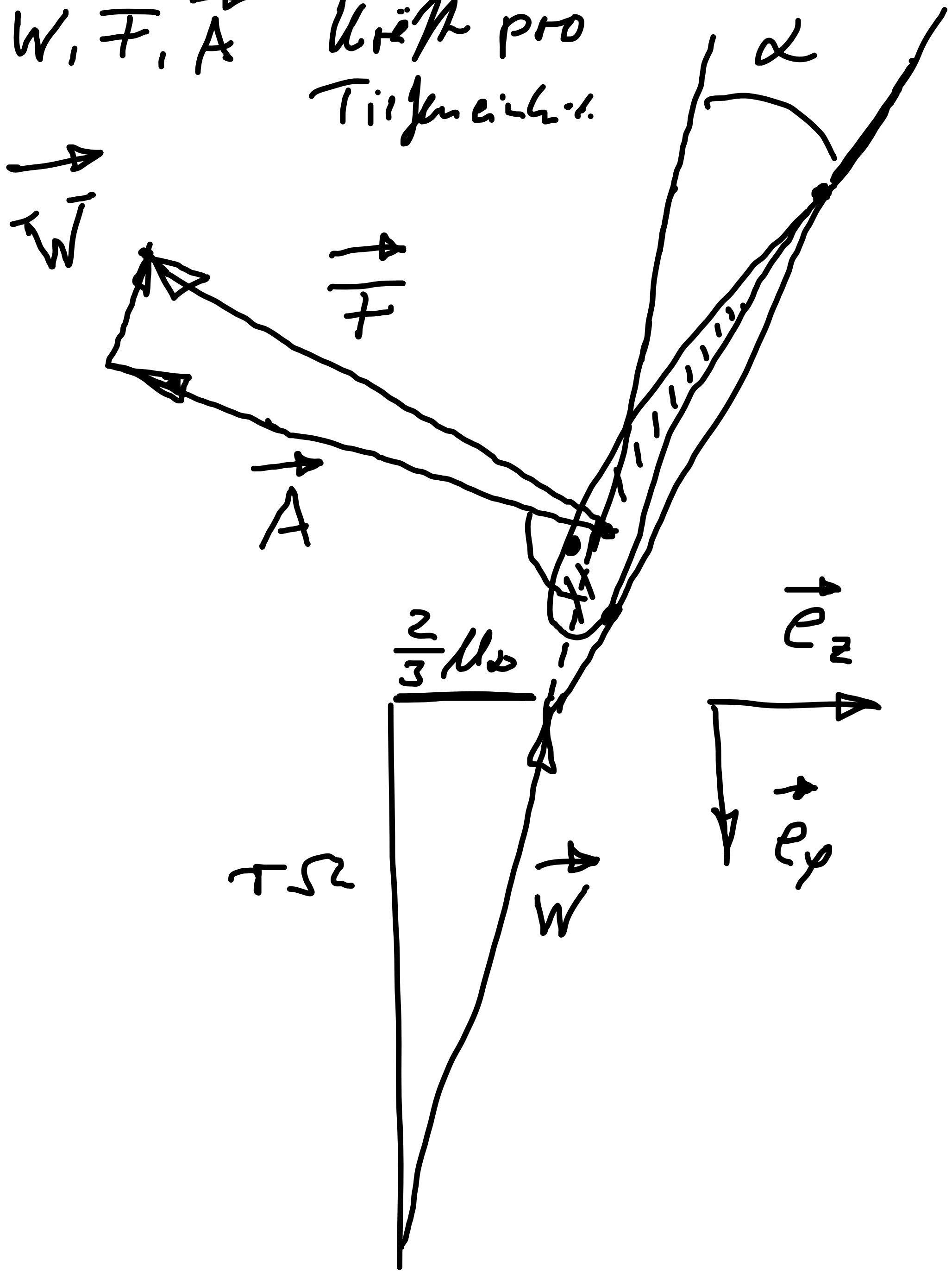
$$dM_z = z \, d\vec F \cdot \vec e_\varphi \, r$$

Eulersche Turbinengleichung (Drallsatz)

$$\frac{dM_z}{d\dot m} = r\left(c_{u2} - c_{u1}\right)$$

$$u \mathrel{\hat=} \varphi$$

$\vec{W}, \vec{F}, \vec{A}$ Kräfte pro Tiefeneinheit



Bei verlustfreier Strömung steht die Kraft auf die Schaufel senkrecht zur Anströmung.

d'Alembertsches Paradox

$\Rightarrow \eta = 1$ für verschwindende Widerstandskraft $\vec{W}$.

Die Auftriebskraft $\vec{A} \perp$ auf der lokalen Anströmrichtung $\vec{w}$