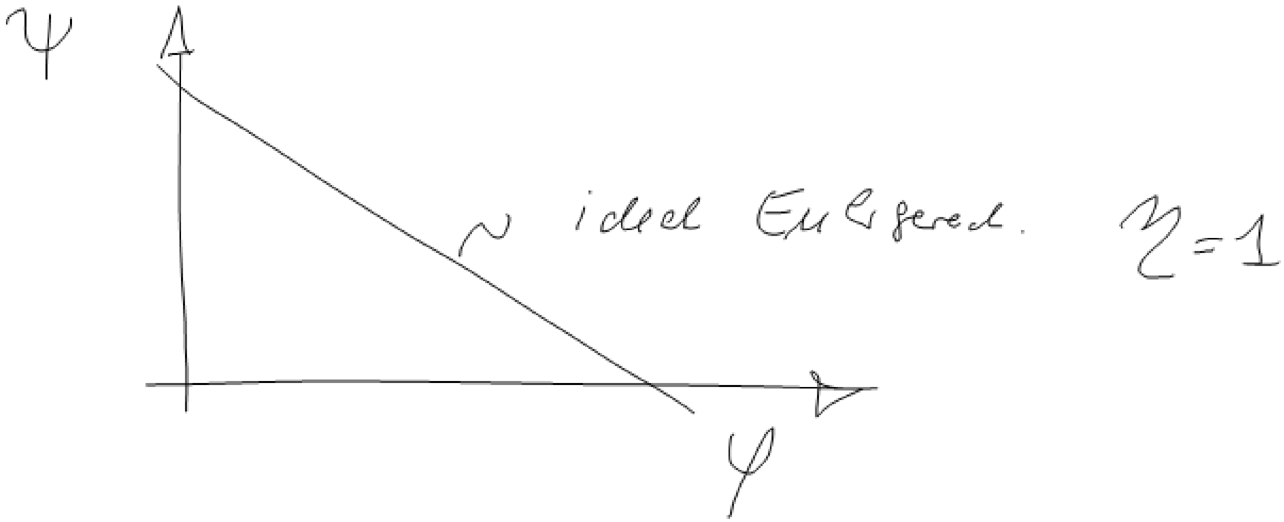
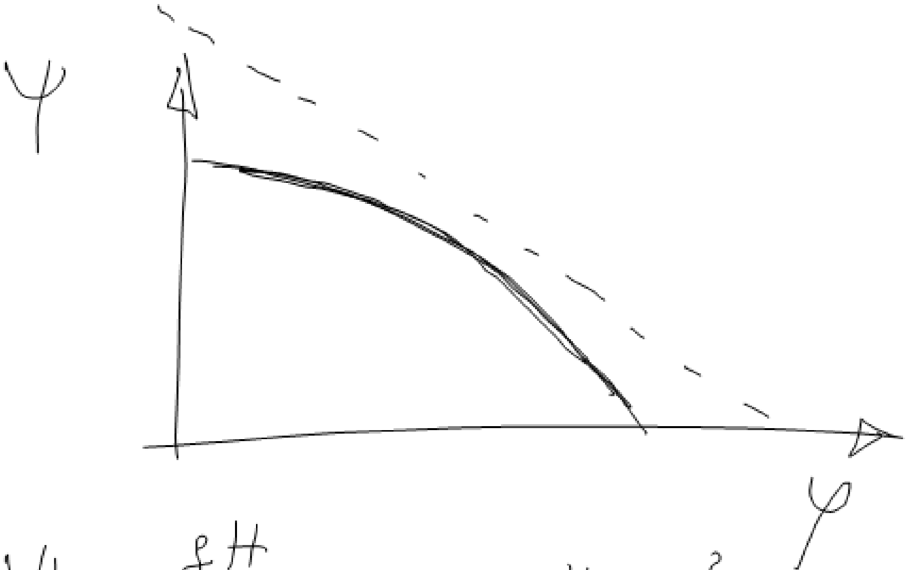
Vollständige und unvollständige Ähnlichkeit

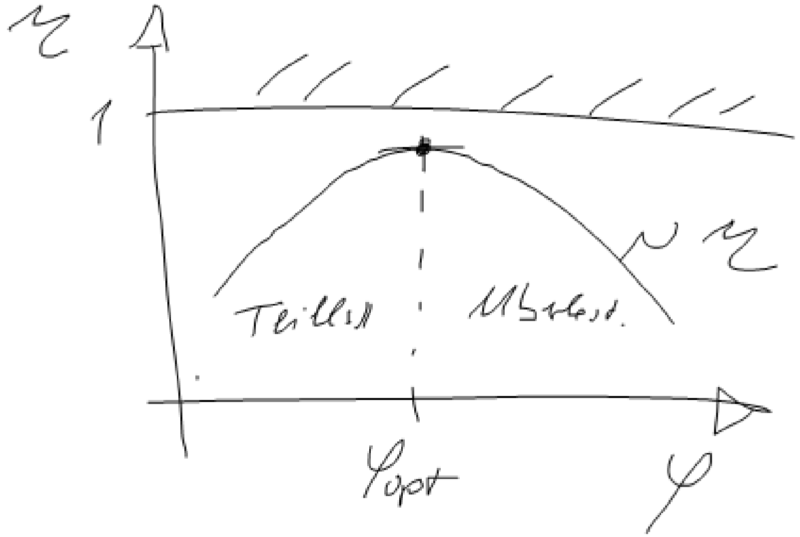
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2011/12
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 10

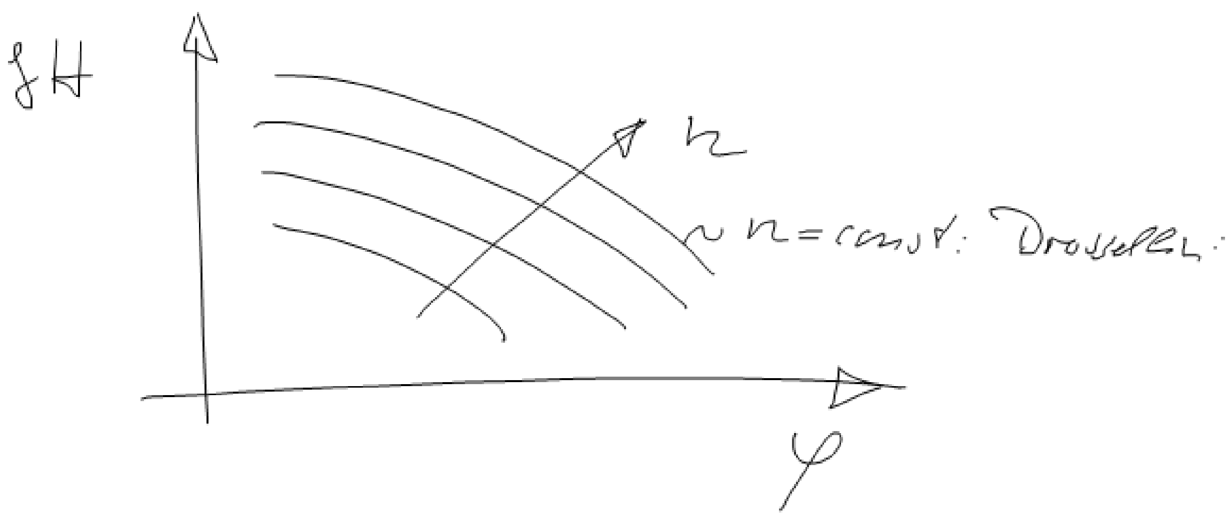


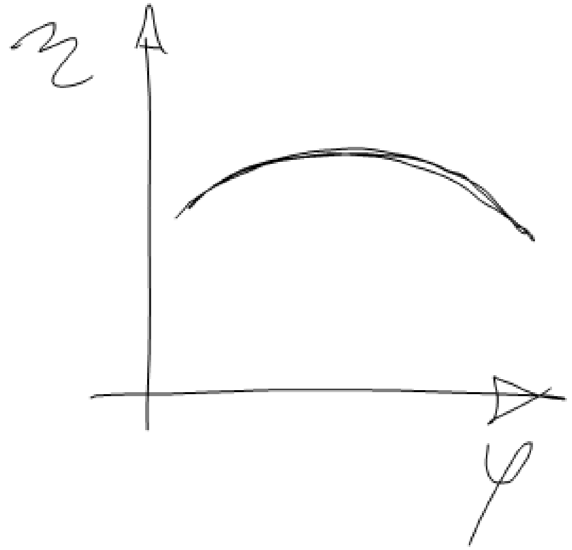




$$\Psi = \frac{gH}{n^2 d^2} \leadsto gH \sim n^2$$

$$gH \sim d^2$$





∘ Zusammenfallen auf einer einzigen Kurve gilt für den Grenzfall „unendlich" große Reynoldszahl.

$$Re = \frac{\text{Trägheit}}{\text{Reibung}} = \frac{\rho n^2 d^2}{\mu n} = \frac{n d^2}{\nu}$$

∘ " " "

für den Grenzfall „kleine" Machzahl

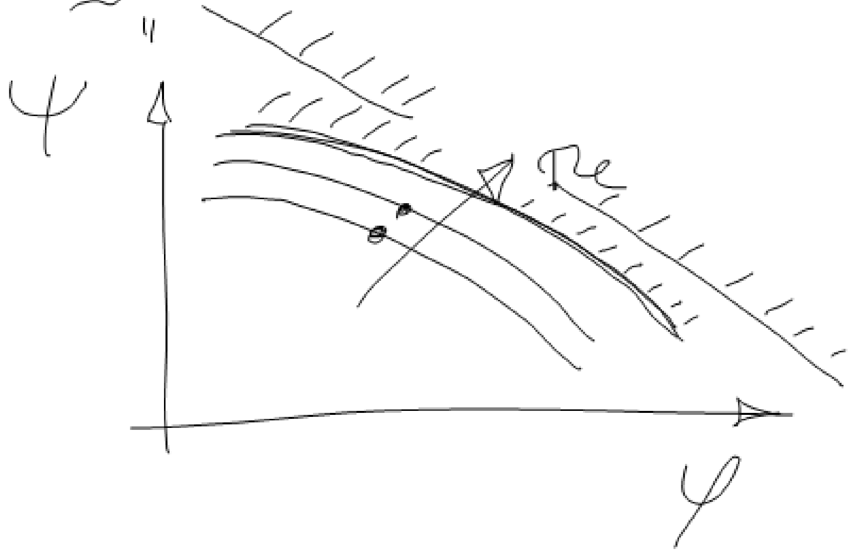
$$Ma = \frac{\text{Strömungsgeschw.}}{\text{Schallgeschw.}} = \frac{n d}{a}$$

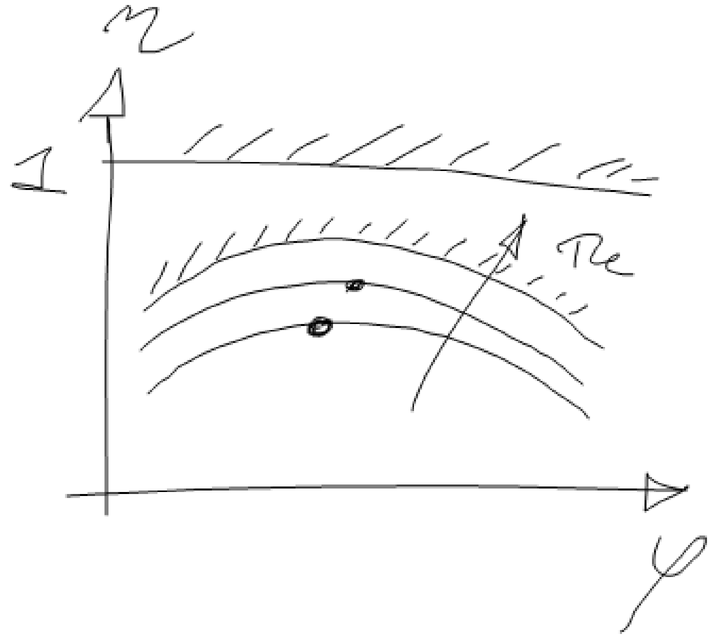
a Schallgeschw. $\quad a = \sqrt{\kappa R T} := \underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=\text{const}}}_{\text{ad.}}$

n Drehzahl

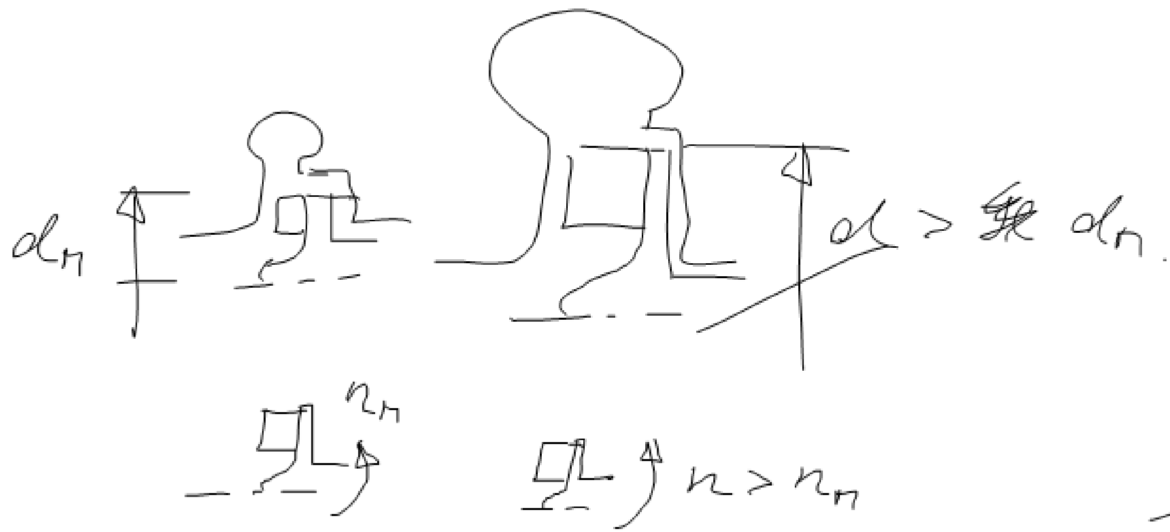
d Laufraddurchm.

$Re \mathrel{\hat{=}}$ „∞" endliche Reynoldszahl





Reynoldszahl ≙ „Größe" einer Maschine



Ähnlichkeitstheorie

$$gH = gH(Q,\ n,\ d,\ \nu,\ a,\ k,\ s,\ H_i)$$

Geometrie-Verhältnisse

Volumenstrom

Drehzahl

Durchmesser

kinematische Viskosität

Schallgeschw.

Rauhig.

Spalt

$$\psi \sim \frac{gH}{n^2 d^2}$$ Druckzahl

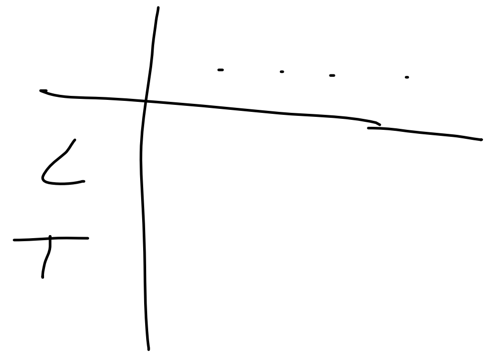
$$\varphi = \frac{Q}{n d^3}$$

$$Re = \frac{n d^2}{\nu}$$

$$Ma = \frac{n d}{a}$$

$$k^+ = \frac{k}{d}$$ relative Rauheit

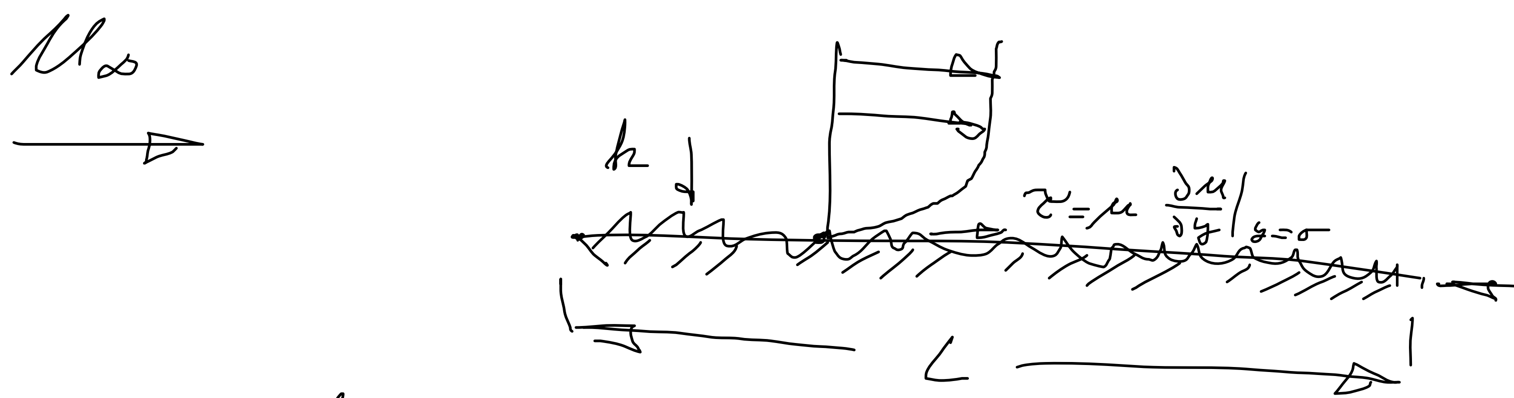
$$s^+ = \frac{s}{d}$$ relativer Spalt



$$\psi = \psi(\varphi,\ Re,\ Ma,\ k^+,\ s^+,\ H_i)$$

$$\eta = \eta(\underbrace{Re \quad k^+}_{c_f(Re,\ k^+)})$$

Reynoldszahl und relative Rauheit tauchen i.d.R. nur gemeinsam in einem Reibungsbeiwert auf.



$$F := L \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \, c_f(Re, k_+)$$

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

$$k_+ = \frac{k}{L}$$

Modell für die Reibung in einer Strömungsmaschine

↳ Ähnlichkeit in der Reibung einer angeströmten Platte und einer Turbinenschaufel.

$$\Psi = \Psi\left(\varphi,\ c_f(Re, k_+),\ Ma,\ s_+,\ \mathcal{H}_i\right)$$

$$\eta = \eta\left(\varphi,\ \underbrace{c_f(Re, k_+),\ \ldots}_{}\ \mathcal{H}_i\right)$$

$$\underset{\text{Drag}}{c_D}(Re, k_+, Ma, s_+) = \overbrace{c_f(Re, k_+)}^{\text{Reibung}} + \overbrace{c_s(s_+)}^{\text{Spaltverlust}} + \underbrace{c_w(Ma)}_{\text{Wellenwid.}}$$

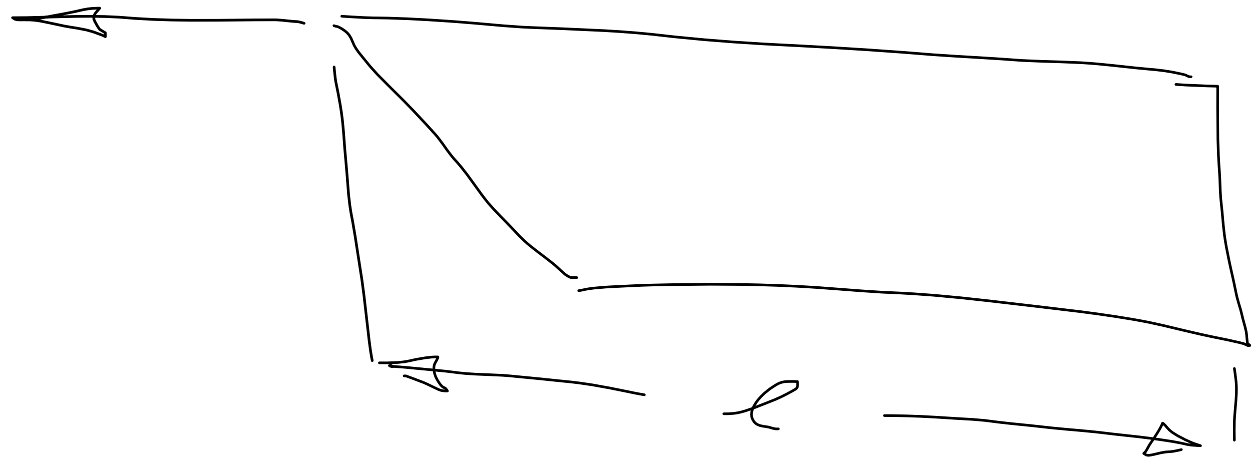
Addition von Widerstandsbeiwerten geht auf Froude zurück

$\boxed{\text{Froudsche Hypothese}}$

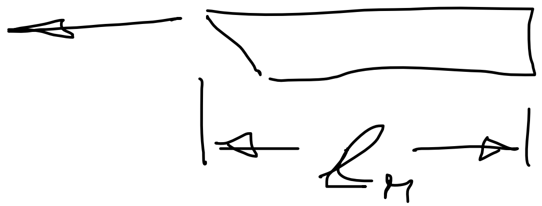
$$c_D\left(Fr,\ Re,\ Ki\right)$$

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} \qquad Re = \frac{U\ell}{\nu}$$

$$F = \frac{\rho}{2} U^2 c_D \ell^2$$



$$F_M = \frac{\rho}{2} U_M^2 c_D \ell_M^2$$



$$\underline{c_D = ?}$$

Messung | Wirklich

$$c_{Dm}(Re_m, Fr_m, \Pi_{i,m}) = c_D(Re, Fr, \Pi_i),$$

sofern $Re = Re_m \Longleftrightarrow \dfrac{u\,l}{\nu} \overset{!}{=} \dfrac{u_m\,l_m}{\nu_m}$ (1)

$Fr = Fr_m \qquad \dfrac{u}{\sqrt{g\,l}} \overset{!}{=} \dfrac{u_m}{\sqrt{g_m\,l_m}}$

$\Pi_i = \Pi_{i,m}$ fluid Gestalt: geometrisch ähnlich

} vollständige physikalische Ähnlichkeit

I.d.R. Industrie $\quad \nu = \nu_m \qquad g = g_m$

$u\,l \overset{!}{=} u_m\,l_m$ (1)

$u\,l^{-\frac{1}{2}} \overset{!}{=} u_m\,l_m^{-\frac{1}{2}}$ (2)

Fazit: Eigentlich sind Modellversuche nicht statthaft, da eine vollständige physikalische Ähnlichkeit nicht erreicht werden kann!

Trick: Aufgabe der Reynoldsschen Ähnlichkeit

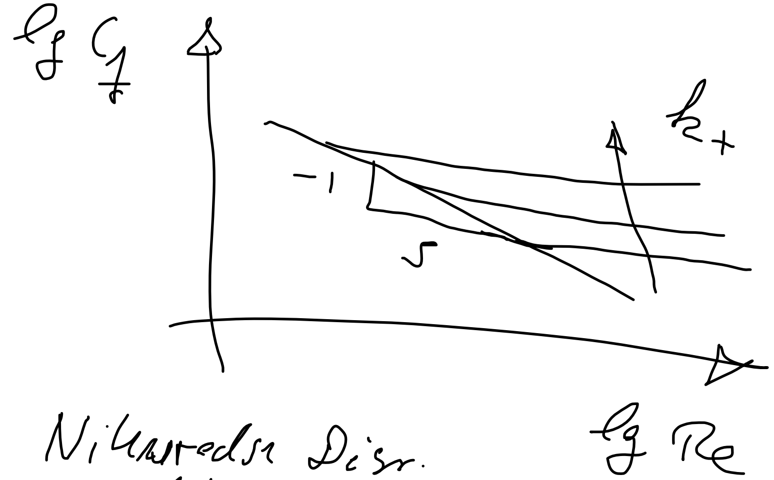
$$Fr \overset{!}{=} Fr_M \rightsquigarrow \frac{u}{\sqrt{l}} = \frac{u_M}{\sqrt{l_M}} \rightsquigarrow u\sqrt{\frac{l_M}{l}} = u_M$$

$$Re \neq Re_M \qquad \frac{Re}{Re_M} = \frac{u}{u_M}\frac{l}{l_M} = \sqrt{\frac{l_M}{l}}\,\frac{l}{l_M} = \sqrt{\frac{l}{l_M}}.$$

$$c_D(Re, Fr, \Pi_i) = c_f(Re, \Pi_i) + c_w(Fr, \Pi_i)$$

$$c_{DM} = \underbrace{c_{fM}(Re_M)}_{\text{Modell}} + c_w(Fr)$$

Messung



Nikuradse Diagr.
Schichtige Grenzschichttheorie

$$\leadsto \quad c_w(Fr) = c_{DM} - c_{fM}(Re_M)$$

Aufweitung: Umgang mit unvollständigen Ähnlichkeiten

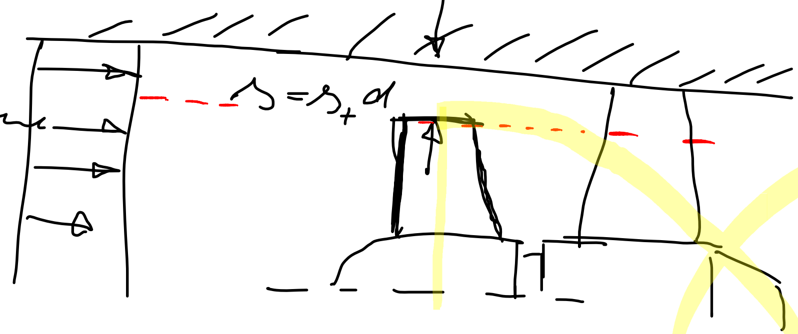
$$\psi = \psi(c_D, \varphi, \kappa_i)$$

$$\eta = \eta(c_D, \varphi, \kappa_i)$$

Widerstandsbeiwert c_D „D" Drag

Warum führt ein Spalt zu einem Widerstand?

Axialmaschine



kein Enthalpieerhöhung:

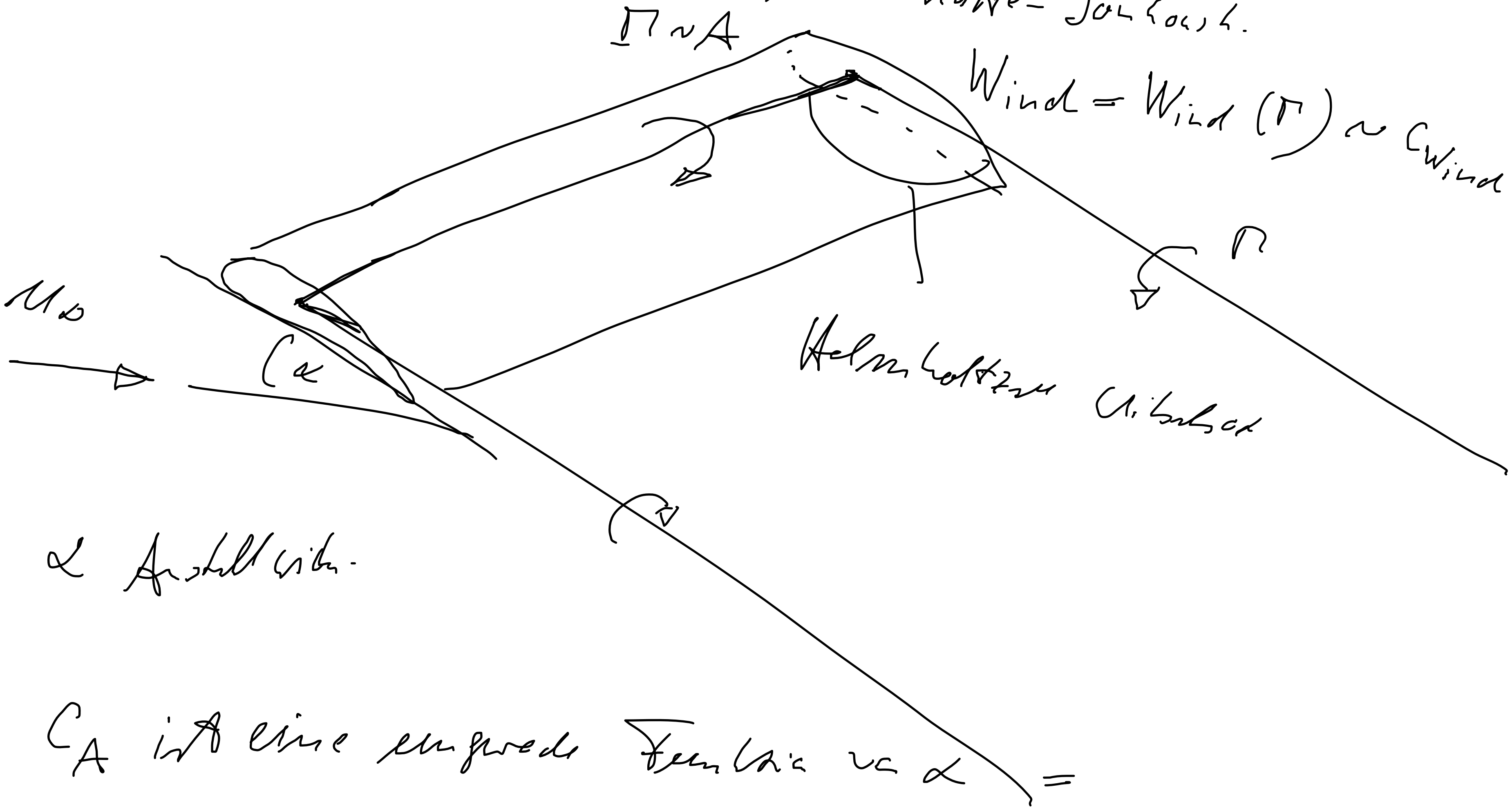
Enthalpieerhöhung

Randwirbel

$A = -\rho u_\infty \Gamma \sim c_A$

Kutta-Joukowski

$W_{ind} = W_{ind}(\Gamma) \sim c_{W_{ind}}$



α Anstellwinkel

c_A ist eine ungerade Funktion von α =

$c_A = 2\pi\alpha + O(\alpha^3)$

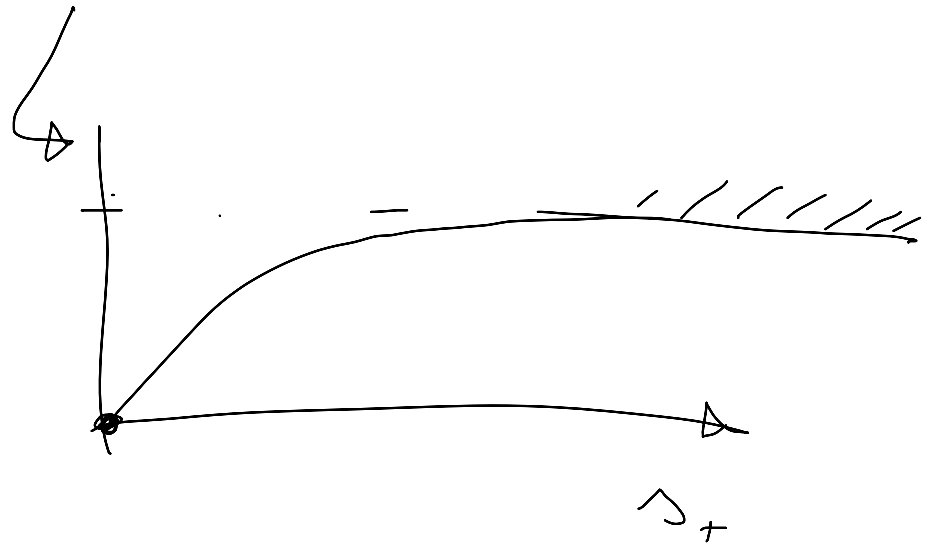
c_W ist eine gerade Funktion von α

$$\boxed{c_{W_{ind}}(c_A) = \text{const}\; c_A^2}$$

Verlust an Druckaufbau

$$\left.\frac{p_V}{p_T}\right|_{Spalt} = \psi_{th}^2 \, f_u(s_+)$$

$\hat{=} \; c_w$



Zugang zu einer einfachen Aufwertgleichung

Ineffizienz $\varepsilon := 1-\eta := \dfrac{P_V}{P_W} = \dfrac{\text{Verlustleistung}}{\text{Wellenleistung}}$

totales Differential

$\varepsilon = 0.2$ für $\eta = 0.8$

$\varepsilon^2 = 0.04$

$$d\varepsilon = \frac{dP_V}{P_W} - \frac{P_V}{P_W^2}\, dP_W$$

$$d\varepsilon = \varepsilon \frac{dP_V}{P_V} - \varepsilon \frac{dP_W}{P_W}$$

$$d\varepsilon = \varepsilon \frac{dP_V}{P_V} - \varepsilon^2 \frac{dP_W}{P_V} = \varepsilon \frac{dP_V}{P_V} + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{dP_v}{P_v} = \frac{dc_D}{c_D}$$

Bewegen im Kanal.

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{dc_D}{c_D}} \Longleftrightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \overbrace{\frac{\Delta c_D}{c_D}}^{\text{Modelle}}$$

Die logarithmischen Änderungen von Effizienz $\varepsilon = 1 - \zeta$ und Gesamtwiderstandsbeiwert sind gleich bis auf Terme der Ordnung ε^2.