Kontigleichung und Impulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2011/12

Technische Fluidsysteme

Vorlesung 2

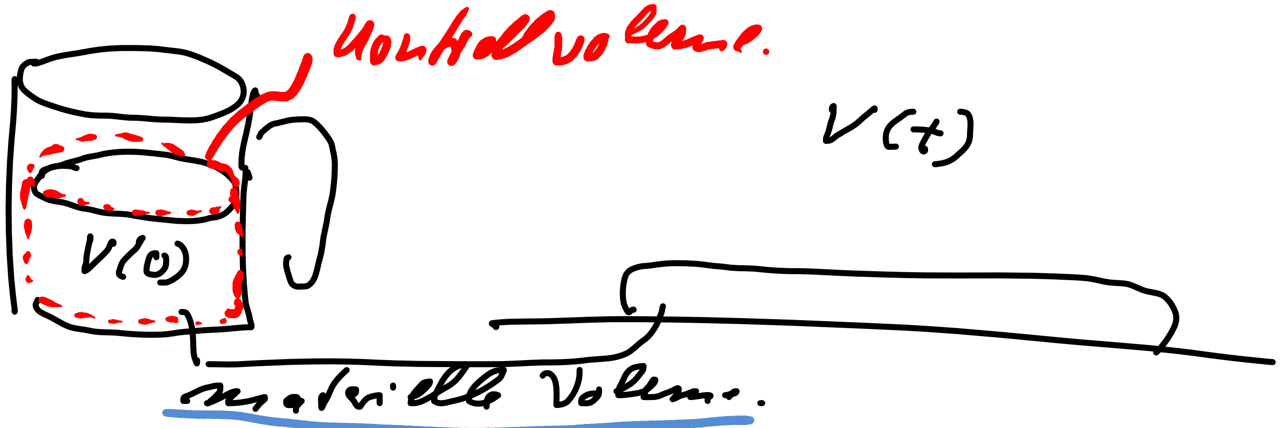
08.11.2011

Kontigleichung

$$\frac{Dm}{Dt} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \, dV + \oint_{S} \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

Integrale Form der Kontinuitätsgleichung.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Technische Fluidsysteme

Differentielle Form der Kontigleichung

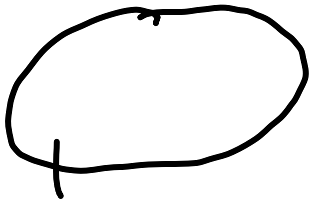
Generell gilt differentielle Formen von Erhaltungsgleichungen folgen aus den integralen Formen, da nur diese der Erfahrung zugänglich sind.

Literatur z.B. Sommerfeld
Mehrbändiges Physikbuch.

⇝ Sommerfeldzahl ist eine dimensionslose Gegenkraft für ein Zapfenlager.

integrale Form

$$\boxed{\frac{Dm}{Dt} \overset{!}{=} 0}$$



$V(T)$

materielles Volumen

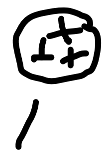
$$\frac{D}{Dt}\Phi = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \phi \, dV}^{\text{momentane Änderung}} + \overbrace{\oint \phi \, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dA}^{\text{Fluss}}$$

Reynoldsche Transporttheorem.

$$\Phi = \int_{V(t)} \phi \, dV$$

differentielle Form

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0}$$

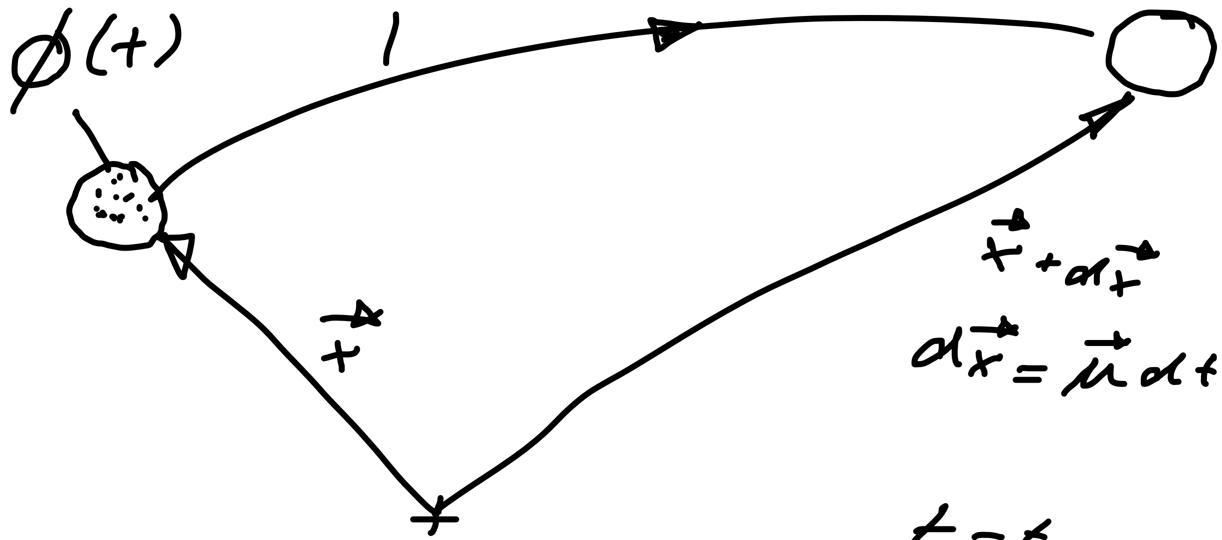


Flüssigkeitsteilchen der Dichte ρ
(Modellvorstellung)

$$\frac{D}{Dt}\phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\phi}_{\text{konvektive Änderung}}$$

Bahnlinie

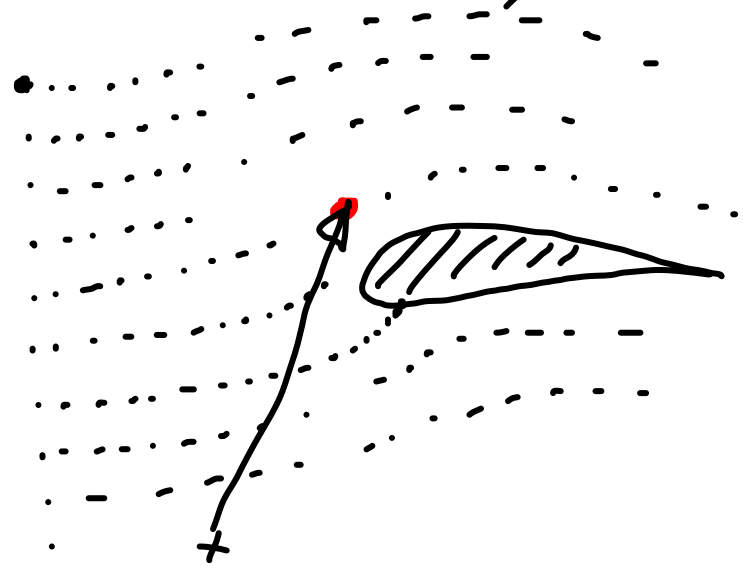
$$\Phi(t+dt) = \Phi(t) + d\Phi$$



$d\vec{x} = \vec{u}\,dt$ für die Bahnlinie

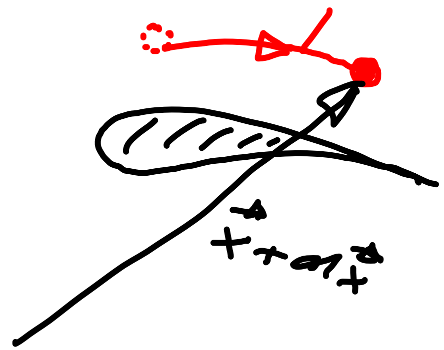
$t = t_1$

Streichlinie



- App „Windtunnel" Strömungssichtbarmachung mit Streichlinie.

Bahnlinie



$$d\phi = \phi(t+dt, \vec{x}+d\vec{x}) - \phi(t, \vec{x})$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$ Taylorentwickl.

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \nabla \phi \cdot d\vec{x}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Wenn $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$ (z.B. für die Bahn eines materiellen Teilchens,

dann $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{D}{Dt}$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{lokale Änd.}} + \underbrace{\nabla\phi \cdot \vec{u}}_{\text{konvektive Änd.}}$$

Zur Kontigleichung in differentieller Form.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$\frac{D\rho}{Dt} = 0$, wenn die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet.
Man spricht in diesem Fall von einer inkompressiblen Strömung.

~~Zur Divergenz~~

$$\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

für kartesische Koordinaten

$$\vec{x} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{u} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y + w\,\vec{e}_z .$$

Dimension der $\operatorname{div} \vec{u}$ ist die einer Rate (1/Zeit)

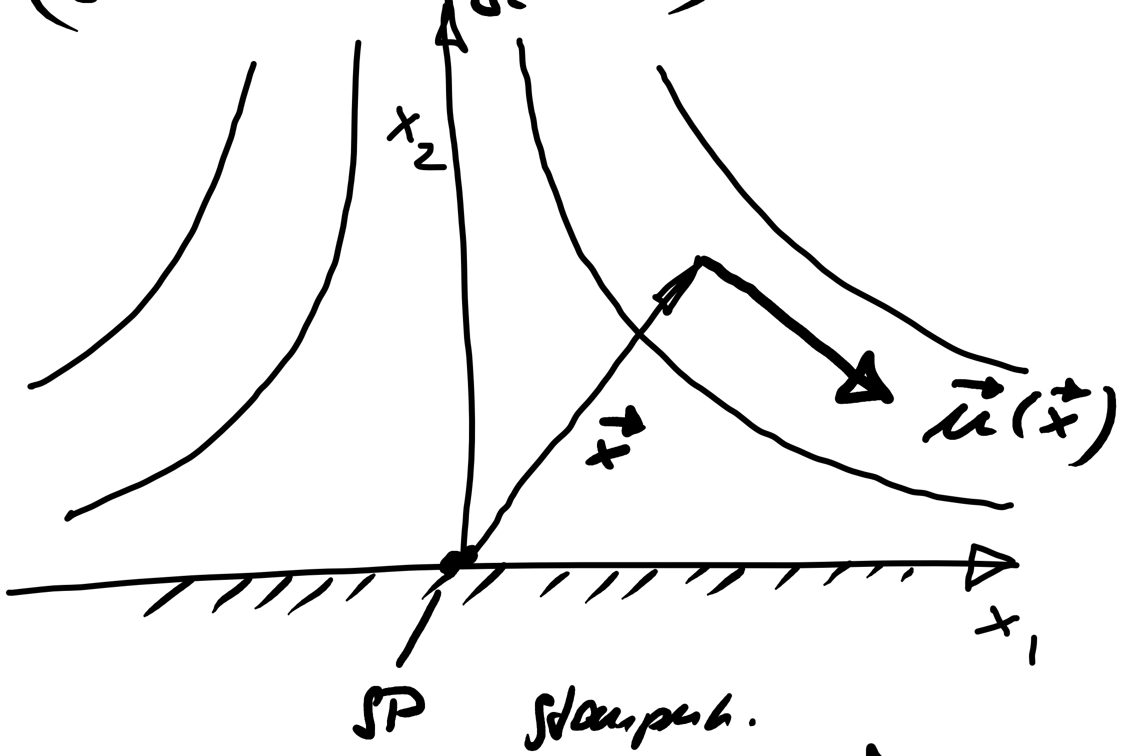
$$[\operatorname{div} \vec{u}] = \frac{1}{\text{Zeit}} = \frac{1}{T}$$

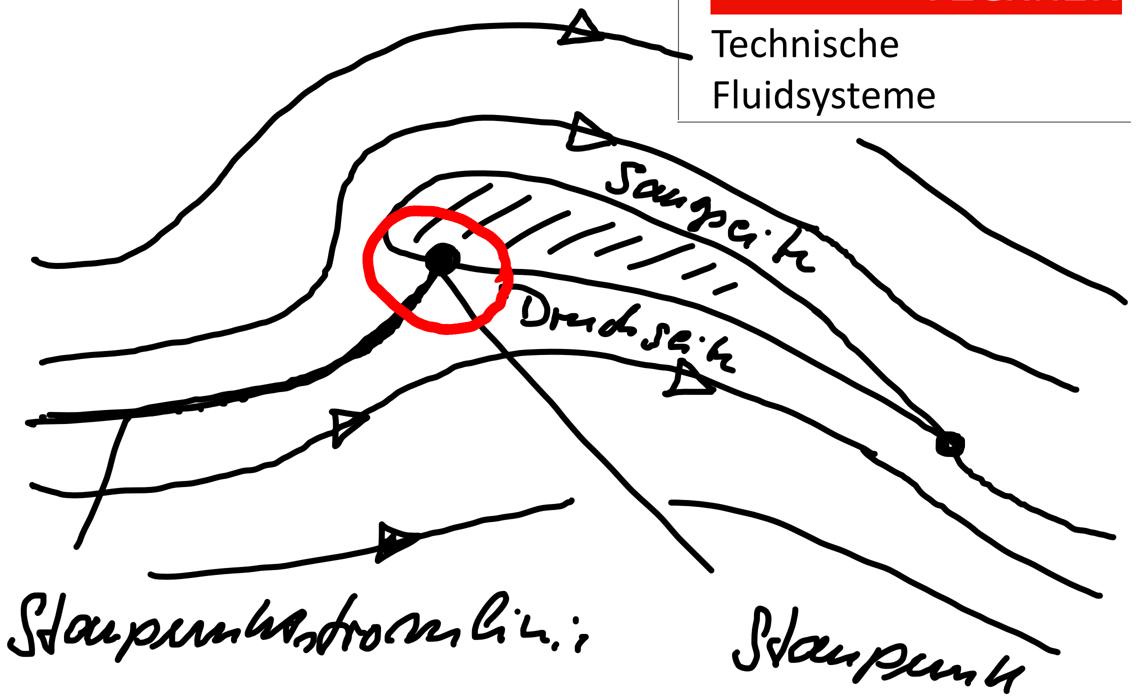
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{u} = -\frac{1}{dV}\frac{dV}{dt}}$$ Volumenänderungsrate.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

Beispiel für ein Geschwindigkeitsfeld mit verschiedenen Divergenz

ebene Staupunktströmung
(stationär $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$)





$$\vec{u} = -a x_2 \vec{e}_2 + a x_1 \vec{e}_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Technische Fluidsysteme

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(a x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-a x_2)$$

$$= a - a$$

$$= 0$$

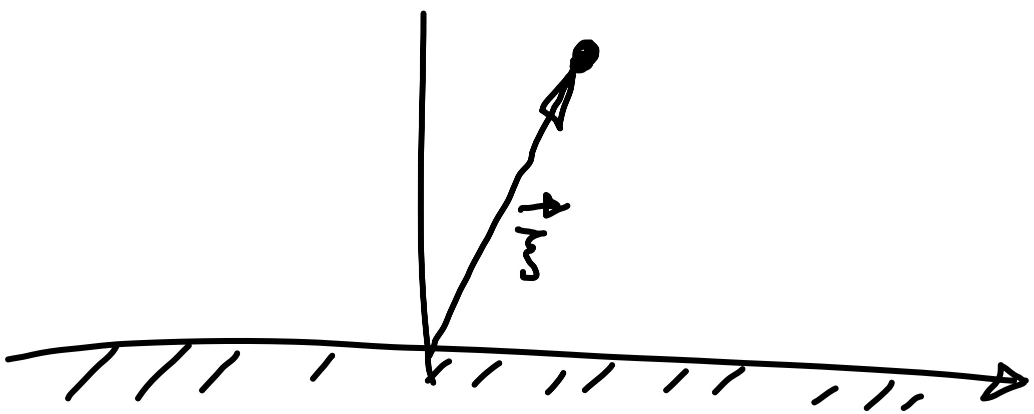
$$\hookrightarrow \frac{D\varrho}{Dt} = 0 \;, \quad -\frac{1}{dV}\frac{d(dV)}{dt} = 0$$

Volumenbeständige Strömung.

Bahnlinie für die Staupunktströmung.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \qquad \vec{x}(t=0) = \vec{\xi}$$

Dgl. Anfangsbedingung.



$$\frac{dx_1}{dt} = a x_1 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -a x_2$$

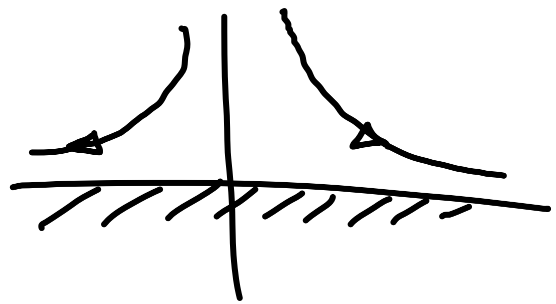
$$\ln\left(\frac{x_1}{\xi_{10}}\right) = a\,t \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \xi_{10}\exp(a t)$$

$$\ln\left(\frac{x_2}{\xi_{20}}\right) = -a\,t \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \xi_{20}\exp(-a t)$$

Bahnlinie in Parameterform

Zeit t ist Parameter der Bahnlinie.

Bahnlinie in parameterfreier Form.



$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= -a x_2 \\ \frac{dx_1}{dt} &= a x_1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

$$\boxed{\frac{x_2}{\xi_{20}} = \frac{\xi_{10}}{x_1} \qquad \text{Hyperbel.}}$$

5 Axiome

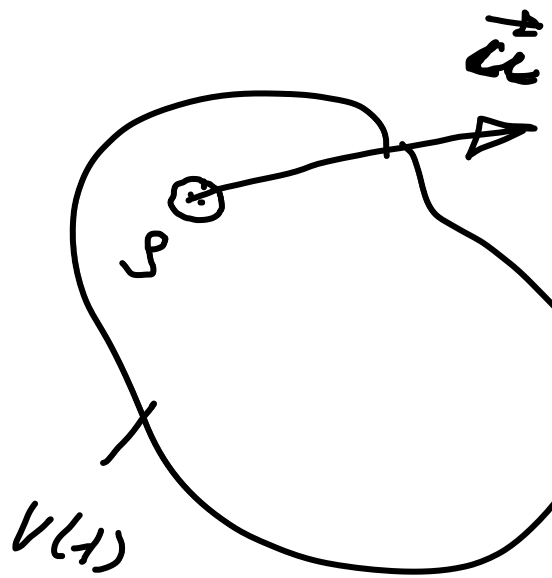
1. Masse ✓
2. Impulssatz
3. Drallsatz
4. 1. Hauptsatz
5. 2. Hauptsatz.

Zum Impulssatz:

Die zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Körpers ist gleich der Kraft, die auf diesen Körper wirkt.

(Zweites Newtonsches Axiom)

$$\frac{D}{Dt}\vec{I} = \vec{F}$$



$$d\_ = \rho u$$

$$\vec{\_} = \int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV$$

LS

RTT

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{u}\, dV}_{\text{momentane Änderung des Impulses}} + \underbrace{\oint_S \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{\text{Fluß des Impulses über die Oberfläche } S \text{ des Kontrollvolumens}}$$

RS

$$\vec{F} = \overbrace{\oint_S \vec{t}\, dS}^{\text{Oberflächen.}} + \overbrace{\int_V \vec{f}\, dV}^{\text{Volumenkräfte.}}$$

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

Spannungsvektor $\hat{=}$ flächenintensive Oberflächenkraft.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

$$\vec{f} := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$$ Volumenkraft

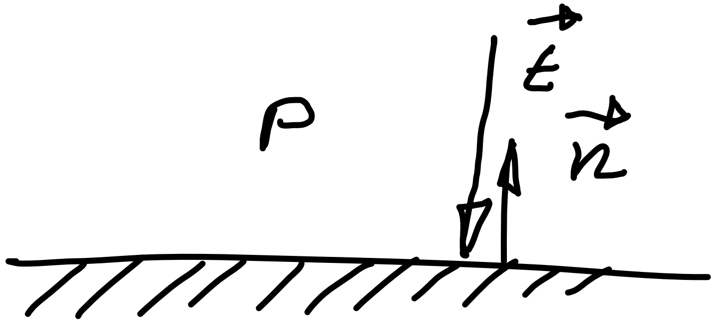
$$\vec{f} = \varrho \vec{k}$$

$$\vec{k} := \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}$$ Massenkraft.

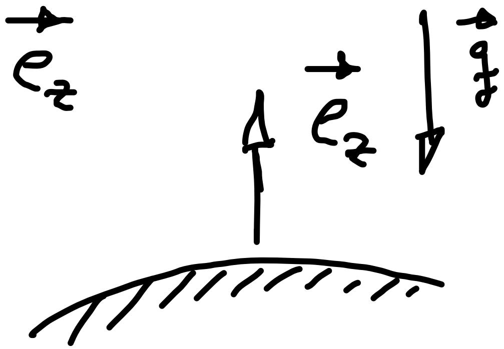
Beispiele für Volumen und Oberflächenkräfte.

z.B. Hydrostatik

$$\vec{t} = -p\,\vec{n}$$ Normale zur Oberfl.

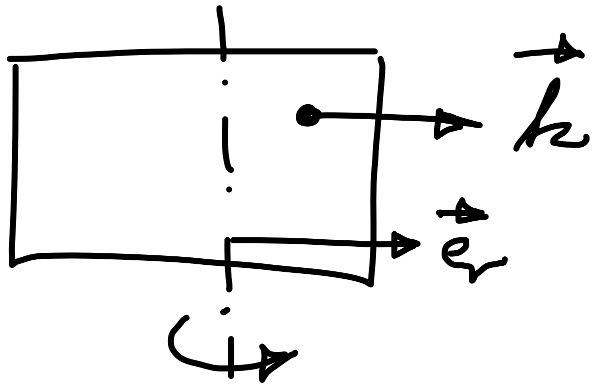


z.B. Schwerkraft $$\vec{k} = \vec{g} = -g\,\vec{e}_z$$



Zentrifugalkraft.

$$\vec{k} = \Omega^2 r \, \vec{e}_r$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

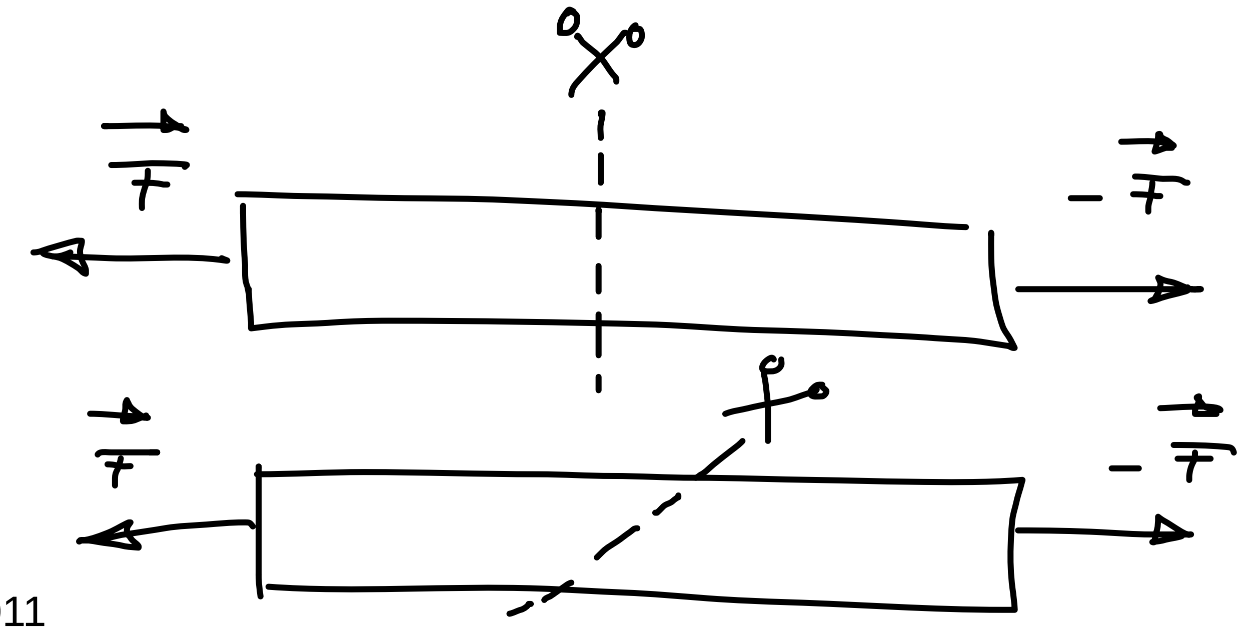
FLUID SYSTEM TECHNIK

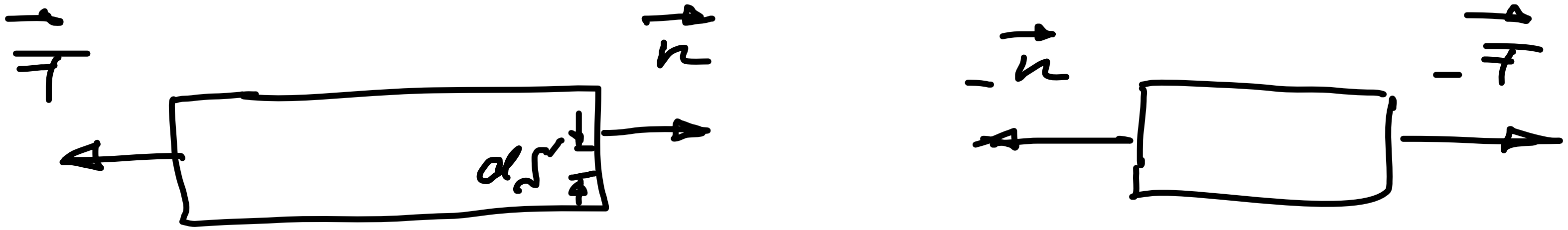
Technische Fluidsysteme

Zusammenhang zwischen
Spannungsvektor und Spannungstensor

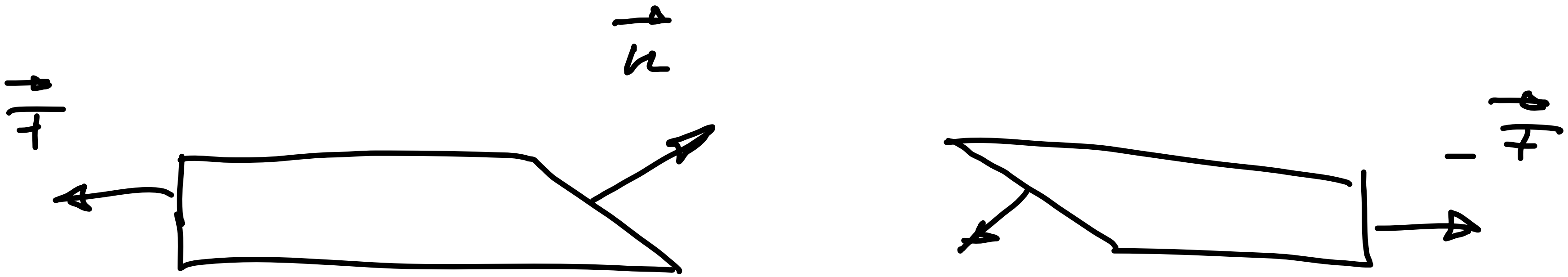
$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}$$

fkt(Flächenorientierung)





kein Schubspannungskomponente.



Schubspannungskomponente.

$$\underset{\sim}{T} = \tau_{xx}\,\vec{e}_x\,\vec{e}_x + \tau_{xy}\,\vec{e}_x\,\vec{e}_y + \tau_{xz}\,\vec{e}_x\,\vec{e}_z + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \tau_{zz}\,\vec{e}_z\,\vec{e}_z$$

Spannungstensor in symbolischer Schreibweise.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Technische Fluidsysteme

Spannungstensor ist symmetrisch,

d.h. $\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad i,j = 1,2,3.$

$\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji}}$ ist die differentielle Form des Drallsatzes!

Hinweis: Herleitung aus dem Drallsatz in integraler Form.

Einsetzen des Impulssatzes

$\rightsquigarrow$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Vom Spannungstensor wird i.d.R. als isotroper Anteil (hydrostatischer Druck) abgespalten.

$$\underset{\sim}{T} = \underbrace{-p\,\underset{\sim}{I}}_{\text{hydrostatischer Druck}} + \underset{\sim}{P}$$

Reibungsspannung

Spezialfall Hydrostatik $\underset{\sim}{P} \equiv 0$

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} \qquad \vec{t} = \vec{n}\cdot\underset{\sim}{T}$$

$$= \vec{n}\cdot(-p\,\underset{\sim}{I}) = -p\,\vec{n}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme

Materialgesetze

$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T\right)$$ Deformations-geschwindigkeitstensor.

$$\underset{\sim}{P} = 2\eta\,\underset{\sim}{E}$$ Newtonsches Material.

$\underset{\sim}{P} \sim$ Deformationsrate.

$$\underset{\sim}{P} \equiv \sigma$$

reibungsfreie Flüssigkeit.

$$\tau = \eta\,\dot{\gamma}$$

Impulssatz in integraler Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{u}\, dV + \oint_S \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS =$$

$$= \vec{F}$$

Impulssatz in differentieller Form.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k} + \nabla\cdot \underset{\sim}{P}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla\cdot \underset{\sim}{T}$$ Cauchy-Gleich.

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I}$$ reibungsfreie Fl.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} - \nabla p$$ Euler-Gleichung.

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + 2\eta \underset{\sim}{E}$$ Newtonsche Fl.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} - \nabla p + \nabla\cdot(\eta \nabla \vec{u})$$

Navier Stokessche Gleich.