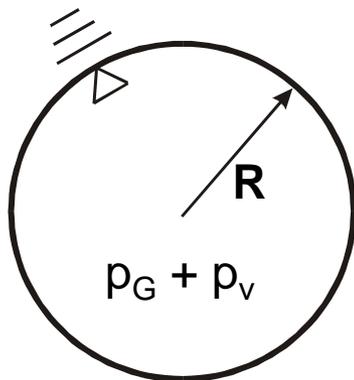


2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (1)

- Annahmen:**
- 1.) $m_G = \text{const.}$ (keine Diffusion)
 - 2.) \dot{R} ausreichend klein (keine Trägheitskräfte)
 - 3.) $\vartheta_G = \text{const.}; p_v = \text{const.}$ (isotherme Änderung)
 - 4.) kugelförmige Keime

Druckgleichgewicht: $p_{FL} - p_v = p_G - \frac{2 \cdot \tau}{R}$

$p_{FL}, \vartheta, \alpha_\infty$

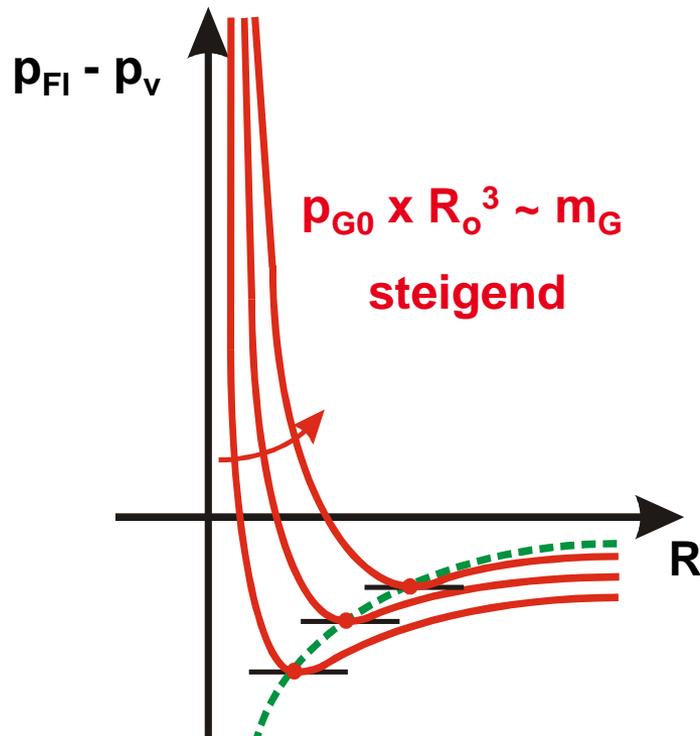


$$p_G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = m_G \cdot R_G \cdot \vartheta_G = \text{const.}$$

$$p_G = \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \cdot p_{G0}$$

$$\Rightarrow p_{FL} - p_v = \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \cdot p_{G0} - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (2)



$$R = R_{\text{krit}}$$

für $\frac{d(p_{\text{Fl}} - p_v)}{dR} = 0$

d.h. $\frac{dR}{d(p_{\text{Fl}} - p_v)} \rightarrow \infty$

$$\frac{d(p_{\text{Fl}} - p_v)}{dR} = -3 \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R^4} + \frac{2 \cdot \tau}{R^2} = 0$$

$$\Rightarrow R_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\tau}}$$

$$(p_{\text{FL}} - p_v)_{\text{krit}} = \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R_{\text{krit}}^3} - \frac{2 \cdot \tau}{R_{\text{krit}}} = \frac{1}{R_{\text{krit}}} \left[\frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\frac{3 p_{G0} \cdot R_0^3}{2 \tau}} - 2\tau \right] = \frac{1}{R_{\text{krit}}} \left[\frac{2}{3} \tau - 2\tau \right]$$

$$(p_{\text{FL}} - p_v)_{\text{krit}} = \ominus \frac{4}{3} \frac{\tau}{R_{\text{krit}}}$$

2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (3)

Zusammenhang zwischen R_{krit} und R_0 :

$$R_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{3 p_{G0} \cdot R_0^3}{2 \tau}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{p_0 - p_v}{\tau} \cdot R_0^3 + 2 \cdot R_0^2 \right)} = R_0 \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{p_0 - p_v}{\tau} \cdot R_0 + 2 \right)}$$

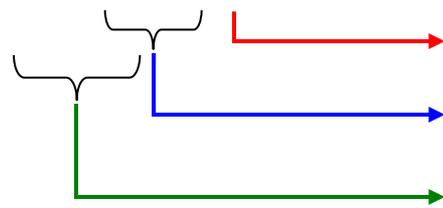
$$p_{G0} = p_0 - p_v + \frac{2 \cdot \tau}{R_0}$$

$$\Rightarrow \frac{R_{\text{krit}}}{R_0} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{p_0 - p_v}{2 \cdot \tau} \cdot R_0 + 1 \right)}$$

$$(p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_{\text{krit}}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_{\text{krit}}}$$

$$\Rightarrow (p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{R_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \left(\frac{p_0 - p_v}{2 \cdot \tau} \cdot R_0 + 1 \right)}}$$

d.h.: $(p_{\text{Fl}} - p_v)_{\text{krit}} = f(p_0 - p_v, \tau, R_0)$

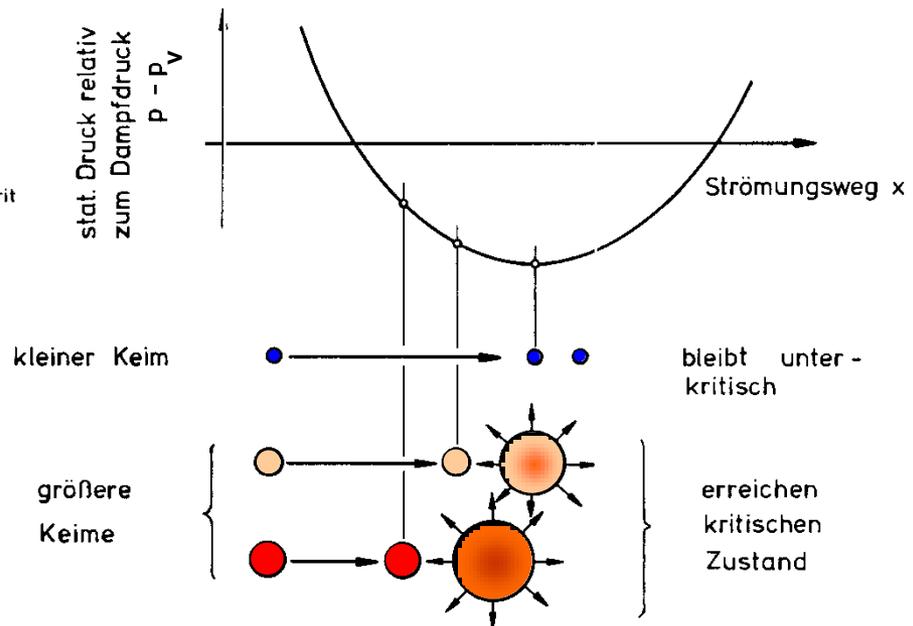
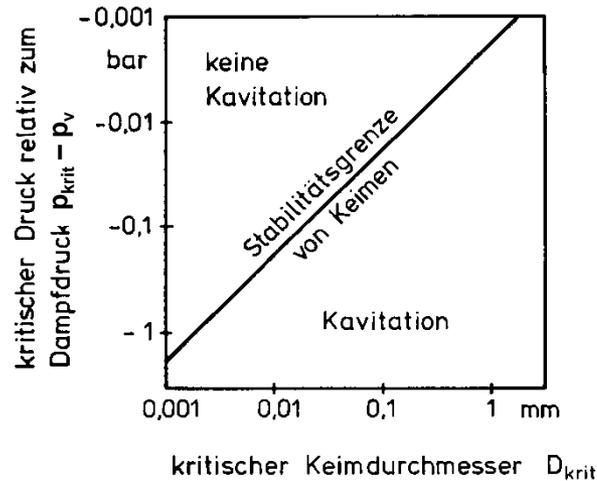


Keimgröße am Referenzort

Flüssigkeit

Dampfdruckabstand am Referenzort

2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (4)



2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (5)

Wasser: $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\vartheta = 20 \text{ °C}$
 $p_v = 0,0234 \text{ bar}$
 $\tau = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$

a.) Für welche Keimgrößen ergeben sich Zugspannungen?

$$p_{\text{FL,krit}} < 0 \quad \text{für} \quad R_0 < 9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$D_0 < 18 \mu\text{m}$$

b.) Wie groß sind die kritischen Drücke bei realistischen Keimgrößen?

D_0 [μm]	1	10	100
$p_{\text{FL,krit}}$ [bar]	- 0,949	- 0,030	+ 0,021

($\approx p_v$)

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (1)

- Annahmen:**
- 1.) $m_G = \text{const.}$ (keine Diffusion)
 - 2.) $p_\infty = p_\infty(t)$
 - 3.) kugelförmige Einzelblase

1.) Potentielle Energie der Blase

(infolge Ausdehnung der Blase $\hat{=}$ Feder):

$$E_{\text{pot}} = (p_\infty - p_{\text{FI,W}}) \cdot \underbrace{V_{\text{BI}}}_{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \frac{dE_{\text{pot}}}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = (p_\infty - p_{\text{FI,W}}) \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R}$$

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (2)

2.) Kinetische Energie der Flüssigkeit

(Kinetische Energie des gasförmigen Inhalts der Blase wird vernachlässigt)

$$E_{\text{kin}} = \frac{\rho_{\text{Fl}}}{2} \int_R^{\infty} c_r^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{dV} dr$$

aus Kontinuität: $4\pi R^2 \cdot \dot{R} = 4\pi r^2 \cdot c_r \quad \Rightarrow \quad c_r^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^4 \cdot \dot{R}^2$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= 4\pi \cdot \frac{\rho_{\text{Fl}}}{2} \cdot R^4 \cdot \dot{R}^2 \cdot \int_R^{\infty} r^{-2} dr \\ &= 2\pi \rho_{\text{Fl}} \cdot R^3 \cdot \dot{R}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = 2\pi \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot \left(2 \cdot R^3 \cdot \dot{R} \cdot \ddot{R} + 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R}^3 \right)$$

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (3)



3.) $\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{kin}}}{dt}$ (Annahme: reibungsfrei):

$$R \cdot \ddot{R} + \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{\text{Fl}}} (p_{\text{Fl,W}} - p_{\infty})$$

RAYLEIGH-PLESSET-ZWICK-Gleichung

- nichtlineare
- gewöhnliche (= f(Zeit))

} Differentialgleichung

$$p_{\text{FL,W}} = p_v + p_G - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

$$p_G = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n} \cdot p_{G0}$$

isotherm : $n = 1$

adiabat : $n = \kappa$

$$p_{G0} = p_0 + \frac{2 \cdot \tau}{R_0} - p_v$$

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (4)



4.) Berücksichtigung weiterer Einflüsse

a.) Viskosität μ_{FL} (nur an der Blasenwand)

Zusatzterm:
$$-\Delta p_{Rbg} = 4 \cdot \mu_{FL} \cdot \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{p} = p_v + p_G - \underbrace{\frac{2\tau}{R}}_{\Delta p_{Kr}} - \underbrace{4\mu_{FL} \cdot \frac{\dot{R}}{R}}_{\Delta p_{Rbg}} - p_\infty$$

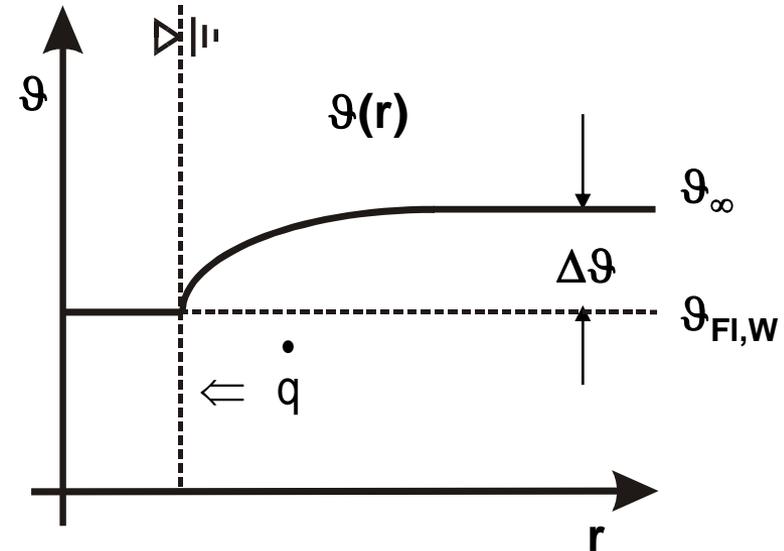
b.) Verdampfungsenthalpie \hat{r}

Zusatzterm:
$$\Delta p_v = \frac{dp_v}{d\vartheta} \Delta \vartheta$$

aus Gesetz von CLAUSIUS-CLAPEYRON:
$$\frac{dp_v}{d\vartheta} = \frac{\hat{r}}{\vartheta(v_v - v_{Fl})} \approx \frac{\hat{r}}{\vartheta \cdot v_v} \approx \frac{\hat{r} \cdot p_v}{R_v \cdot \vartheta^2}$$

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (5)

Wärmebilanz



$$\dot{q} = \begin{cases} = \hat{r} \cdot \rho_V \cdot \dot{V}_{BI} \\ = \lambda_{FL} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_W \cdot 4\pi R^2 \\ = \frac{d}{dt} \int_R^{\infty} \rho_{FL} \cdot c_{FL} \cdot \vartheta \cdot 4\pi r^2 dr \end{cases}$$

Wärmestromdichte für die Verdampfung/
Kondensation an der Blasenwand

Wärmestromdichte Durch Leitung

Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (6)



c.) Kompressibilität der Flüssigkeit

Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$

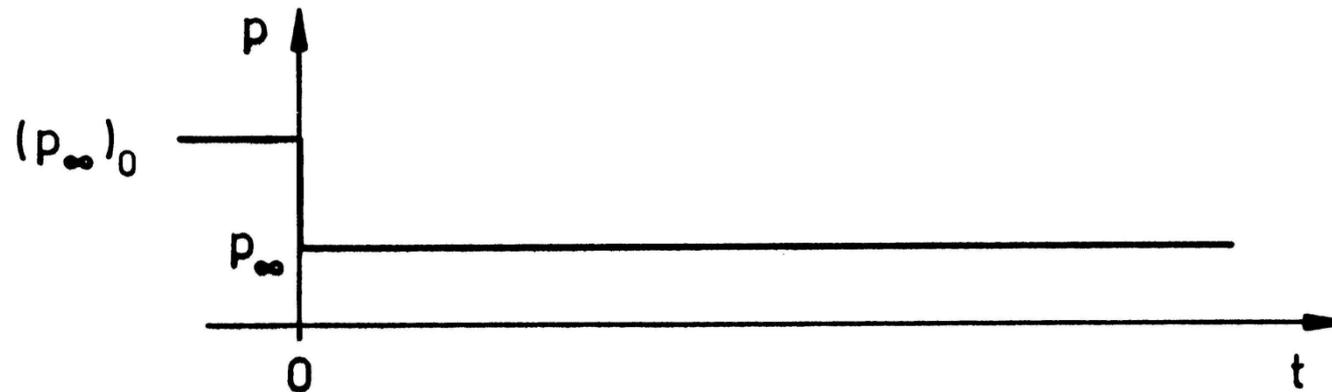
Annahme: $\dot{R} \ll a$

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot R \cdot \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3a}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot \frac{1}{\rho_\infty} \cdot \tilde{\Delta p} + \frac{R}{a} \left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) \cdot \frac{1}{\rho_\infty} \cdot \frac{d(\tilde{\Delta p})}{dt}$$

mit: $\tilde{\Delta p} = p_v(\vartheta_\infty) + \Delta p_v + p_G - \Delta p_{kr} - \Delta p_{Rbg} - p_\infty$

2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen (1)

Sprungfunktion des Druckes zum Zeitpunkt $t = 0$ von $(p_\infty)_0$ auf p_∞



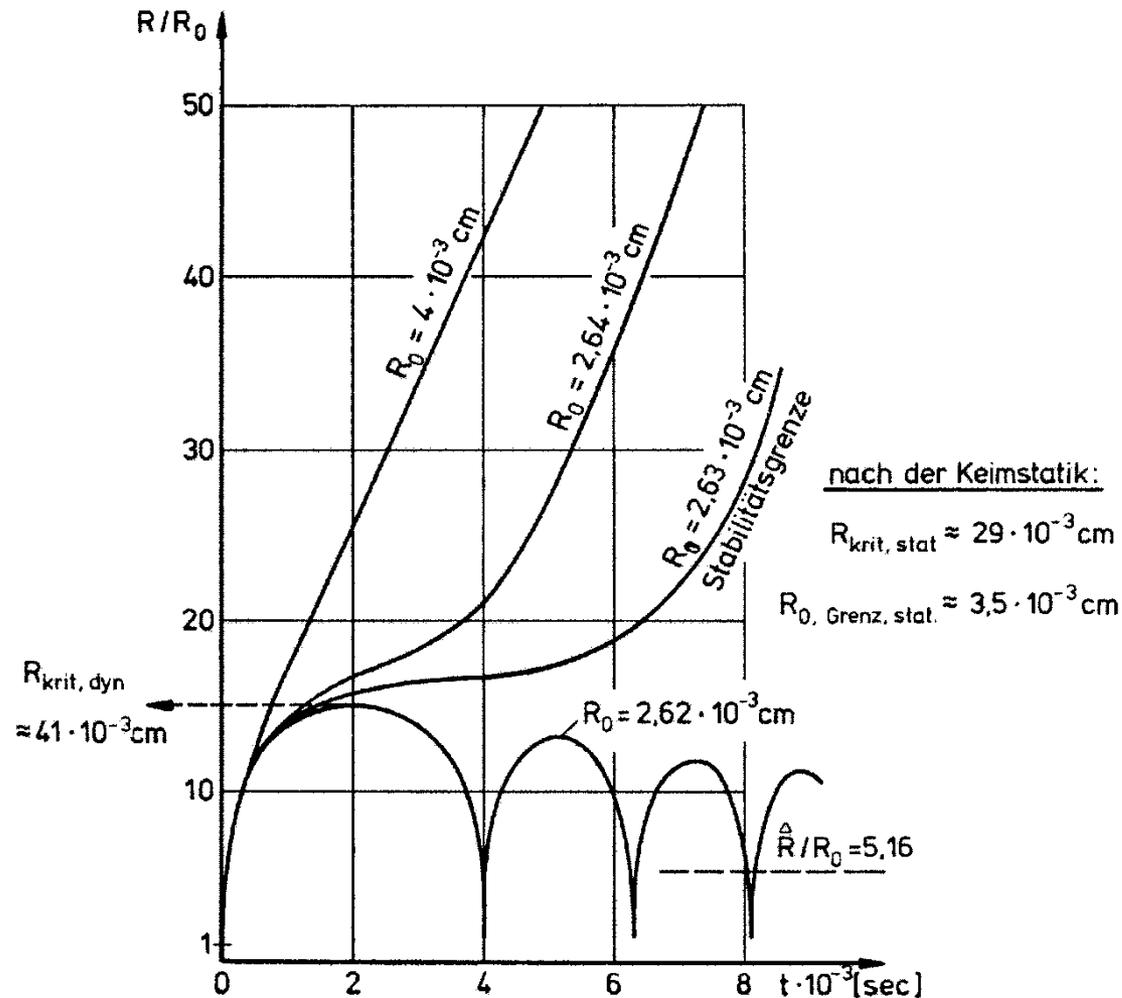
Betrachtet werden unterschiedlich große Werte von $R_0 = R(t < 0)$

$$(p_\infty)_0 = 1 \text{ bar}$$

$$p_\infty - p_v = -0,0034 \text{ bar}$$

$$p_\infty = 0,02 \text{ bar}$$

2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen (2)



2.2.2 Dynamische Stabilitätsgrenze von Kavitationskeimen (3)

Ergebnisse:

1.) $R_0 < R_{0,Grenz}$:

abklingende, nichtlineare Schwingung mit neuem GG-Radius $\hat{R} > R_0$ der für $t \rightarrow \infty$ erreicht wird.

2.) $R_0 \geq R_{0,Grenz}$:

Übergang in die asymptotische Lösung mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{R} = \text{const}$

3.) $R_0 = R_{0,Grenz}$:

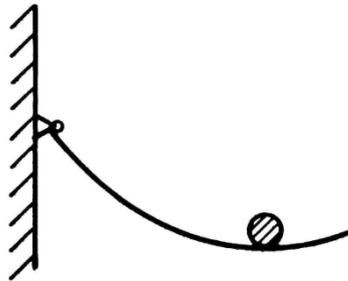
kritischer Zustand bei dynamischen Keimverhalten (Wendepunkt mit $\dot{R} = 0$)

4.) Es ist $R_{\text{krit,dyn}} > R_{\text{krit,stat}}$, jedoch $R_{0,Gr,dyn} < R_{0,Gr,stat}$

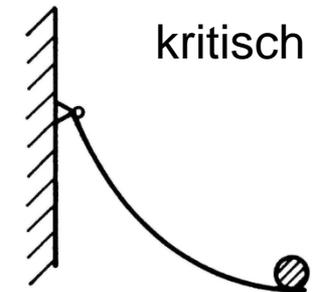
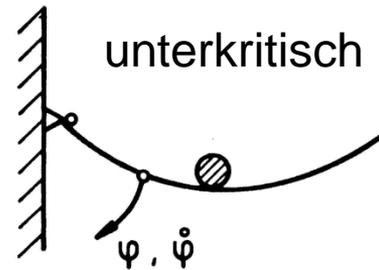
Anschauliche Deutung des Unterschieds zwischen Stabilitätsgrenze bei quasistatischer bzw. dynamischer Druckabsenkung: **Analogie aus Mechanik**

2.2.3 Mechanische Analogie zum kritischen Blasen Zustand

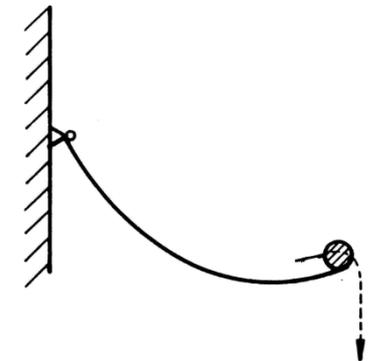
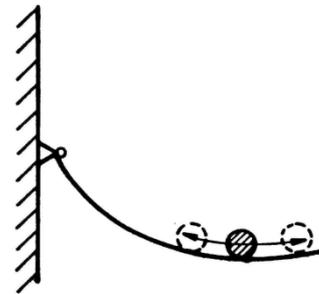
Ausgangszustand „0“



1.) quasistatische Änderung: $\dot{R} \approx 0 \rightarrow$ hier: $\dot{\varphi} \approx 0$



2.) Änderung mit Trägheitseinfluss

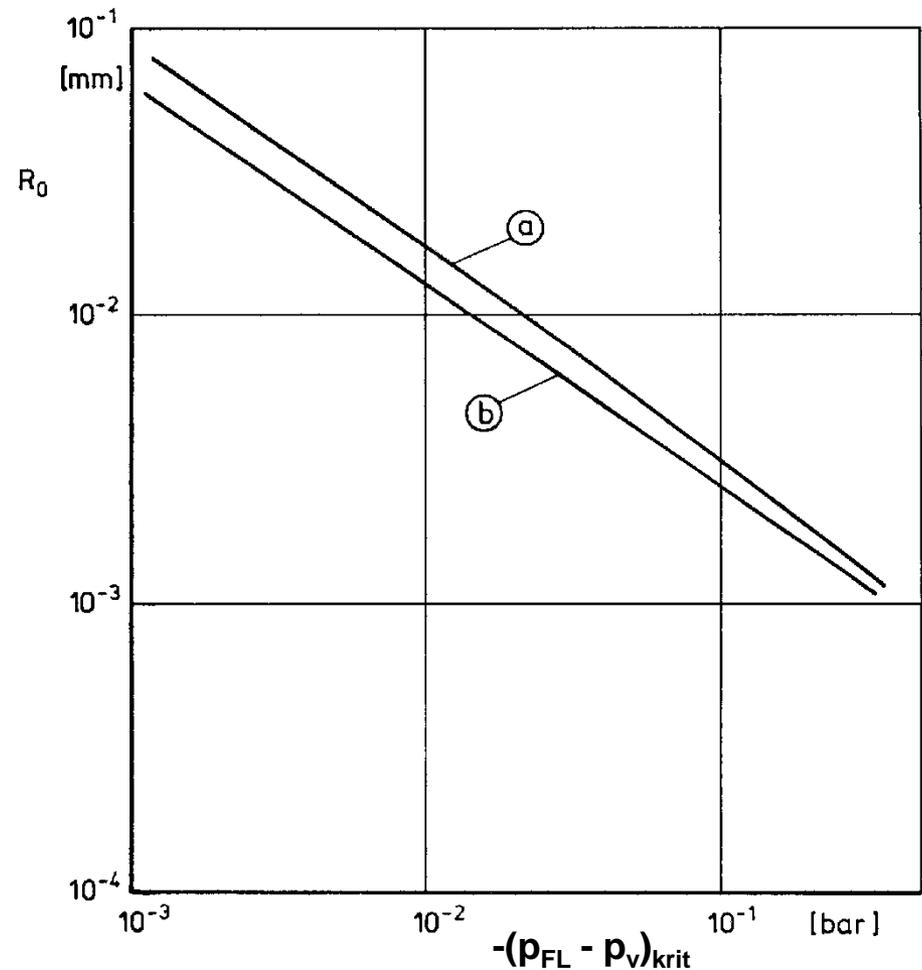


2.2.4 Kritischer Druck in Abhängigkeit vom Anfangs-Keimradius

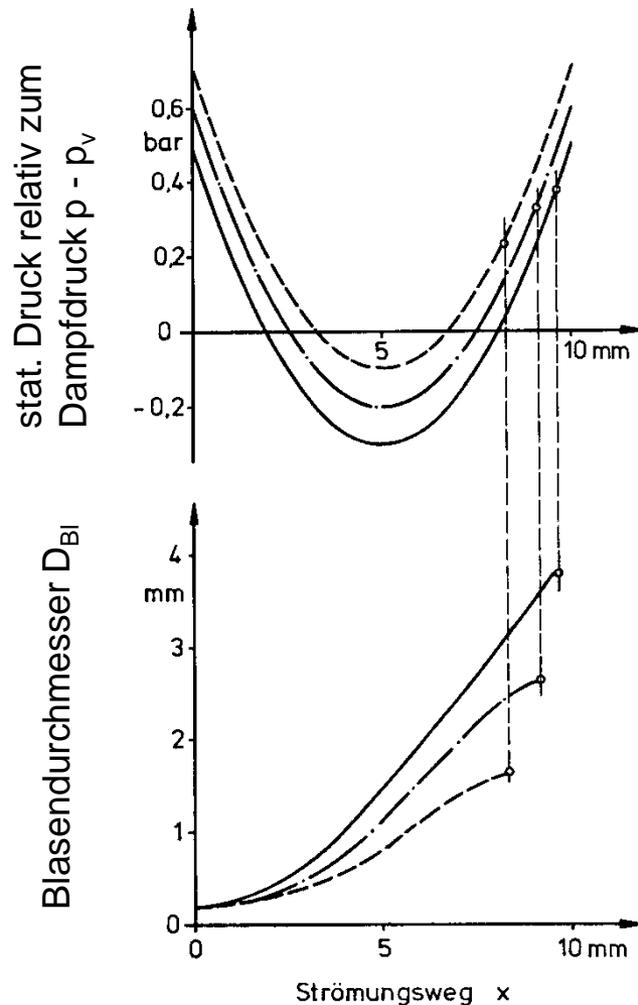
$p_0 = 1 \text{ bar}$; $\vartheta = 20 \text{ °C}$

- a.) Keimwachstum quasi-statisch
- b.) Keimwachstum dynamisch
(bei sprungartiger Druckänderung)

⇒ für technische Belange quasi-statische Betrachtung ausreichend



2.2.5 Berechnetes Blasenwachstum in einer Unterdruck-Zone



$$D_{BI,0} = 0,2 \text{ mm}; c_0 = 10 \text{ m/s}$$

Ergebnisse:

- 1.) Für $R_0 = \text{const}$ werden unterschiedliche R_{\max} -Werte erreicht.
- 2.) $x(R = R_{\max})$ befindet sich bei $p > p_v$
- 3.) Nach gewisser Wachstumszeit ist die erreichte absolute Blasengröße R weitgehend unabhängig von R_0

2.2.6 Blasen-Implosion (1)

Erste Theorie von Lord RAYLEIGH (1917)

- Annahmen:
- $p_G = 0$
 - $\tau = 0$
 - $\mu_{Fl} = 0$
 - $\rho_{Fl} = \text{const}$
 - $\vartheta = \text{const}$
 - $p_\infty = \text{const} > p_v$

$$t = 0: R = R_{\max}, \quad \dot{R} = \ddot{R} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{p_\infty - p_v}{\rho_{Fl}} \cdot \left[\left(\frac{R_{\max}}{R} \right)^3 - 1 \right]}$$

$$R_{\min} = 0$$

$$t_{\text{Impl}} = 0,915 \cdot R_{\max} \sqrt{\frac{\rho_{Fl}}{p_\infty - p_v}}$$

Beispiel

$$p_\infty = 1 \text{ bar}, \quad \vartheta = 20 \text{ °C}$$

$$\rho_{Fl} = 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad R_{\max} = 1 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow t_{\text{Impl}} = 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 93 \text{ } \mu\text{s}$$