Elektrokinetische Transportprozesse

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{T} + \underbrace{\overbrace{\rho_e \left(\vec{E}\right.}^{\text{Coulombkr.}} + \left.\vec{v} \times \vec{B}\right)}_{\text{Lorentzkraft}} + \rho \vec{k}$$

Für das elektrische Potential. $\vec{E} = -\nabla\phi$ gilt für stationäre Felder und Material Konstante Permeabilität $\varepsilon = \text{const}$ die Poissongleichung.

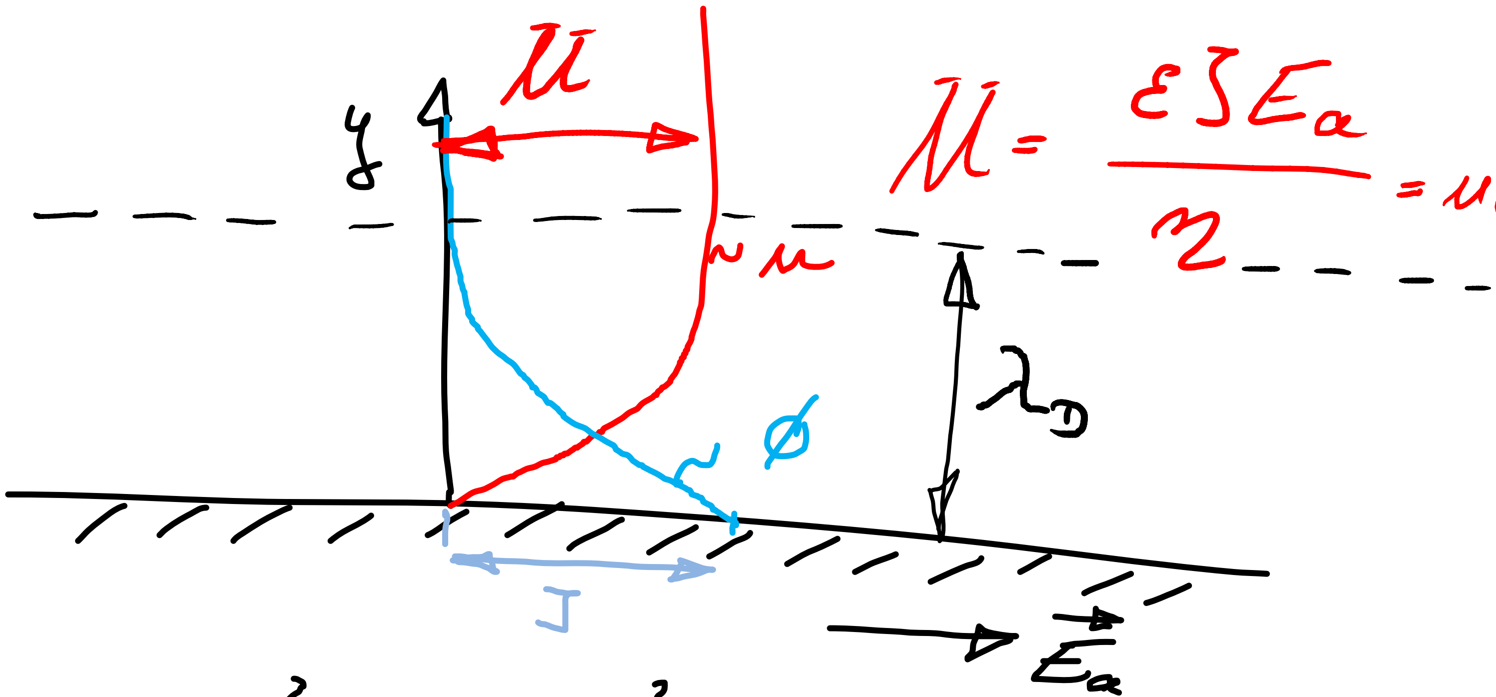
$$\Delta \bar{\Phi} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}.$$

für die halbunendliche Flüssigk.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17



$$U = \frac{\varepsilon \zeta E_a}{\eta} = u(\infty)$$

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} = \varepsilon \frac{d^2 \phi}{dy^2} E_a$$

$$u(0) = 0 \qquad \phi(0) = \zeta$$

Zeta Potential der elektrische Doppelschicht.

$$\frac{du}{dy}(\infty) = 0 \qquad \frac{d\phi}{dy}(\infty) = 0.$$

$$u = \frac{\varepsilon \zeta E_a}{\eta}$$ Helmholtz-S.-Geschwindigkeit.

$y \gg \lambda_D$

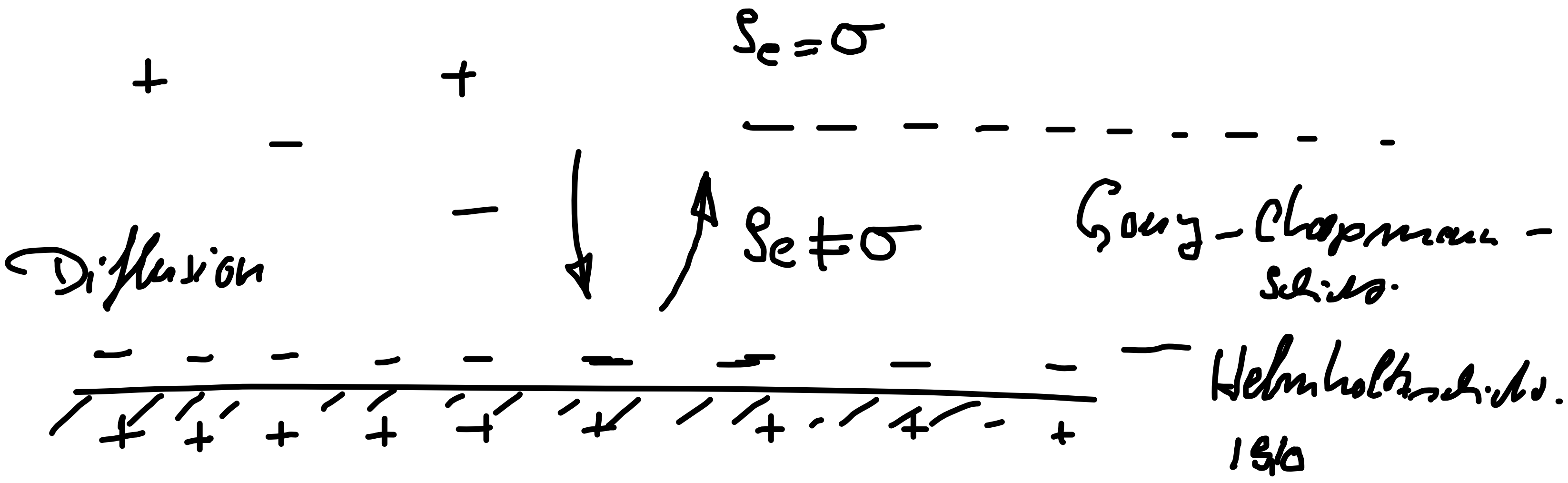
λ_D Debye Länge

Peter Debye * 1884 Maastricht.
† 1966 N.Y.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

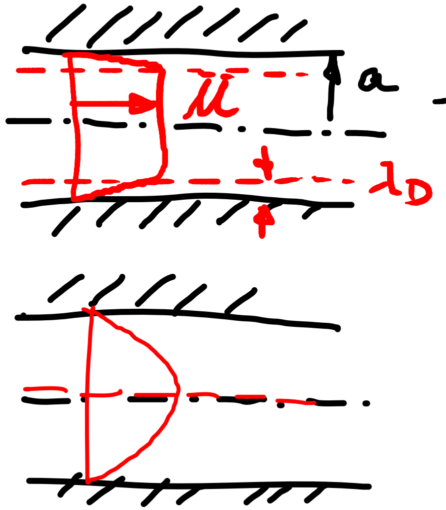


Grenzfälle mit der Geometrielänge a

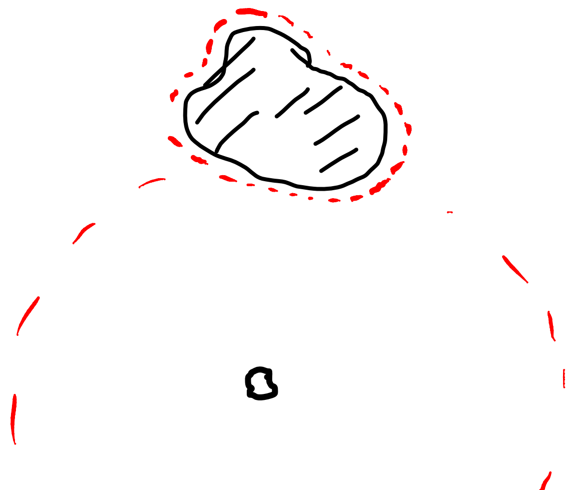
Elektroosmose	Elektrophorese.

$\lambda_D \ll a$

$\lambda_D \gg a$



im Folgenden



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

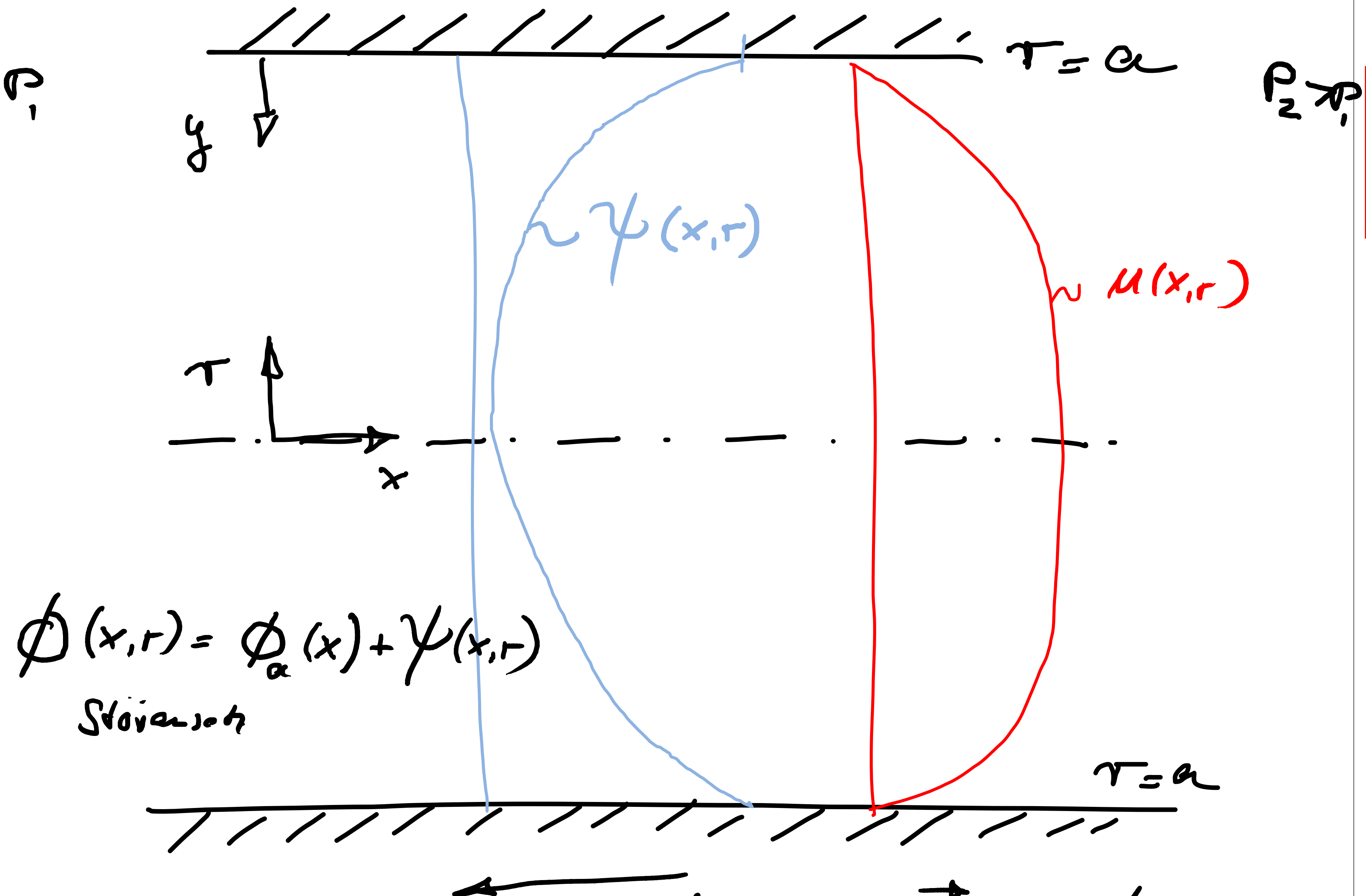
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Störpotential ψ (elektrisches Potential



$$\phi(x,r) = \phi_a(x) + \psi(x,r)$$

Störansatz

$$\vec{E}_a = E_a \vec{e}_x \,, \quad \text{mit} \quad \vec{E}_a = -\nabla \phi_a$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

$$\underbrace{\eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}_{\text{Viskose Spg.}} = \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\text{Änderung Druck}} - \underbrace{\underbrace{\varepsilon\Delta\phi}_{\sim\rho_e}\ \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{\sim E}}_{\text{Grenzladung}}$$

Annahme.

Störansatz

$$\phi(x,r) = \phi_a(x) + \psi(r,x)$$

$$\frac{d\phi_a}{dx} \gg \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ϕ_a ist das von außen aufgeprägte Potential

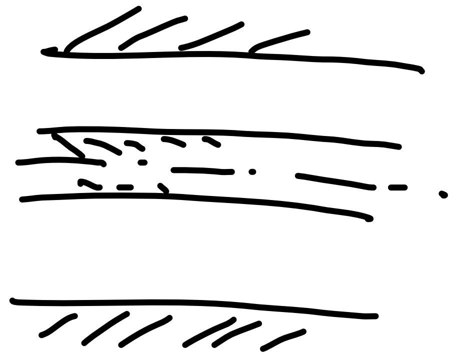
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \gg \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

ψ ist das durch die Verteilung der Ladungen im Elektrolyt erzeugte ~~Feld~~. Potential.

Technische Universität Darmstadt
Fluid System Technik
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Randbedingungen

$$\psi(a,x) = \psi(y=0,x) = J(x).$$



$$u(a,x) = u(y=0,x) = 0.$$

Mit den Annahmen wird die Bewegungsgleich.

$$\eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \approx \frac{dp}{dx} + \varepsilon \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}_{\approx \Delta\phi} \underbrace{E_a}_{\approx \frac{\partial\phi}{\partial x}}$$

$$\eta r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dp}{dx} + \varepsilon r \frac{\partial\psi}{\partial r} E_a + F(x).$$

„Integrationskonstante" ist eine Funktion von x, da partielle Integration.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Aus Symmetriegründen an $r=0$ muß $f(x) \equiv 0$ sein.

$$\eta u = \frac{1}{4} r^2 \frac{dp}{dx} + \varepsilon \psi E_a + \tilde{f}(x)$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{\varepsilon \psi}{\eta} E_a + f(x)$$

mit der Randbedingung

$$\left.\begin{aligned} u(a) &= 0 \\ \psi(a,x) &= \zeta(x) \end{aligned}\right\} \quad f = -\frac{a^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} - \frac{\varepsilon \zeta}{\eta} E_a .$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

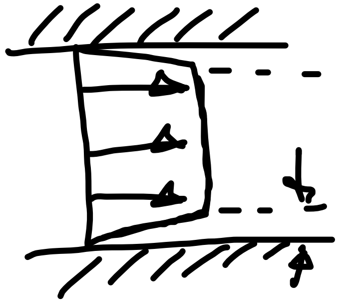
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

$$u(r,x) = -\frac{a^2}{4\eta}\frac{dp}{dx}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] + \quad \text{Poiseuill-Anteil}$$

$$+\ \frac{\varepsilon}{\eta}E_a\left[\psi(x,r)-\zeta(x)\right].$$

Osmotische Anteil.

2.



Aufgabe: Bestimmung des Störpotentials $\psi(x,r)$.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

③ Das Störpotential muß die Poisson'sche Gleichung erfüllen.

$$\Delta\psi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \underbrace{+ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}_{\approx 0 \text{ Näh.}} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Einschub Elektrochemie

Ladungsdichte

$$\rho_e = F\,(z_+ c_+ + z_- c_-)$$

$= \dfrac{\text{Ladungen}}{\text{Volumeneinheit}}$

z.B. unsymmetrisches Salz

$z_+ = 2 \qquad z_- = -1$

$$CaCl_2 \rightleftharpoons Ca^{2+} + 2\,Cl^-$$

Symmetrisches Salz

$$CuSO_4 \rightleftharpoons Cu^{2+} + SO_4^{2-}$$

$z_+ = 2 \qquad z_- = -2$

$$z := z_+ = -z_- = 2$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Faradaysche Konstante

$$F = N_A e = 9.65 * 10^4 \frac{C}{mol}$$

Avogadro Zahl

$$N_A = 6022 * 10^{23} \; mol^{-1}$$

Elementarladung

$$e = 1.602 * 10^{-19} \; C$$

Valenzzahl von Cu^{2+}

$$z_+ = 2$$

SO_4^{2-}

$$z_- = -2$$

Konzentration

$$[c_-] = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen.}}$$

$$\{c\} = \frac{mol}{m^3}$$

Dimensionskontrolle

$$[\rho_e] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumeneinheit}}$$

$$\{\rho_e\} = \frac{\text{Coulomb}}{m^3}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zur Vereinfachung der Darstellung angenommen, daß das Salz symmetrisch ist.

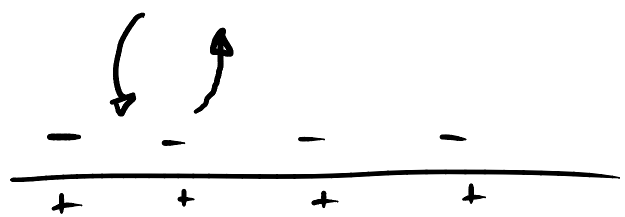
$$\rho_e = F z \left(c_+ - c_- \right)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Einsetzen in $\Delta\psi = -\dfrac{\rho_e}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\psi = -\frac{Fz}{\varepsilon}\left(c_+(\tau) - c_-(\tau)\right).$$

$\Rightarrow$ Aufgabe: Bestimmung der Konzentrations-verteilung.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

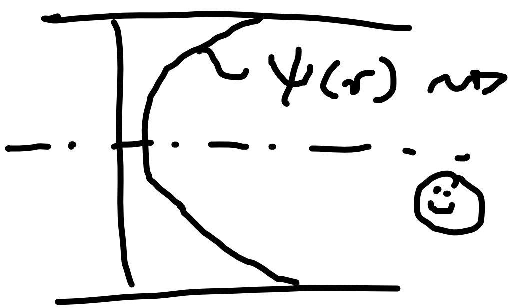
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Wesentlicher Unterschied zur Elektrolytischen Zelle:

$$\vec{i}_+ \cdot \vec{e}_r \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{i}_- \cdot \vec{e}_r \overset{!}{=} 0$$

Im zeitlichen Mittel kein Stromfluß in radialer Richtung.



$$\underbrace{\psi(r) \rightsquigarrow \vec{E} \rightsquigarrow \vec{i}}$$

Materialgesetz.

Ohmsches Gesetz.

$$\vec{i} = fu(\vec{E})$$ Ohmsches Gesetz.

Festkörper

Elektrolyt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

Zum ohmschen Gesetz für ein Elektrolyt.

$$\vec{\dot{i}}_+ = F z \underbrace{c_+ \vec{u}_+}_{\vec{\dot{j}}^*_+}$$

F: $\frac{\text{Zahl}}{\cancel{\text{mol}}}$ $\quad$ c_+: $\frac{\text{mol}}{\text{Volum.}}$

Molare Stromdichtevektor der k-ten Kompon.

$$\vec{\dot{j}}^*_k = \vec{u}_k c_k$$

$$c\vec{u}^* = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots$$

$$c = c_1 + c_2 + \dots$$

(Impulssatz)

Massenstromdichte.

$$\vec{\dot{j}}_k = \vec{u}_k \rho_k$$

$$\rho\vec{u} = \rho_1\vec{u}_1 + \rho_2\vec{u}_2 + \dots$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \dots$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

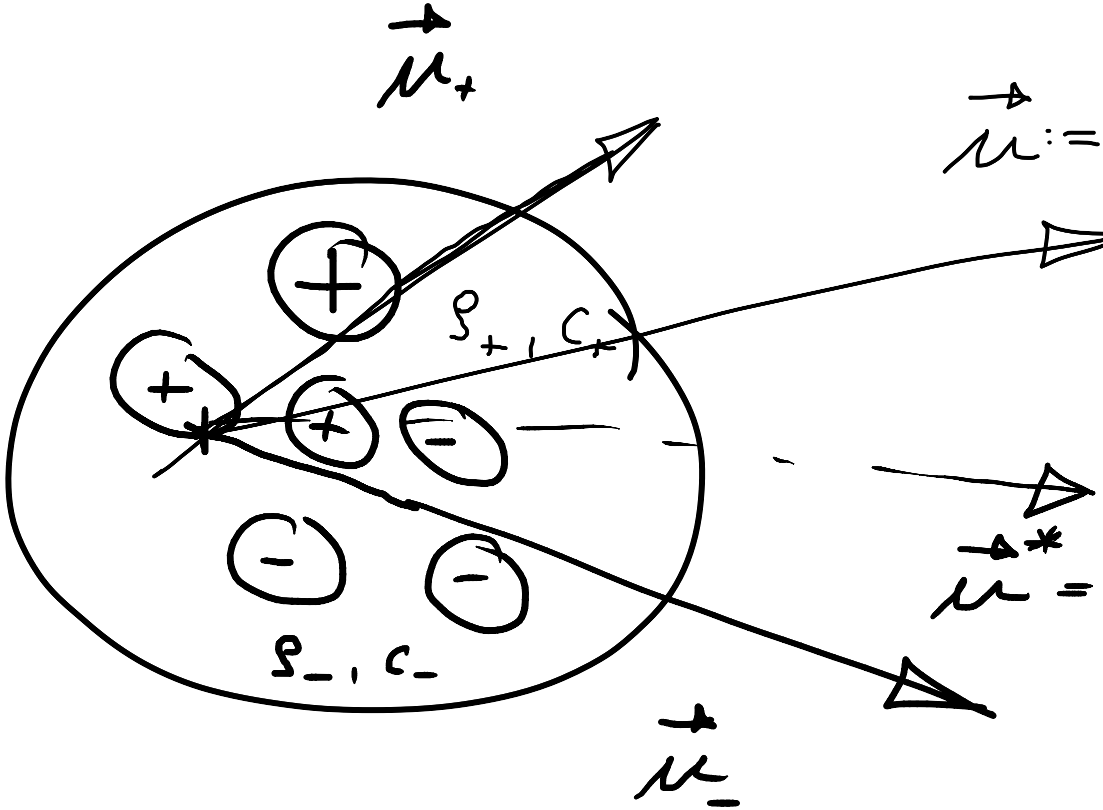
FLUID SYSTEM TECHNIK

$\vec{u}^*$ molare Geschwindigkeit.

physikalische Ge.

$\vec{u}$ massengemittelte Geschwindigkeit

Wichtig für Impulsbilanz.



$$\vec{u} := \frac{\rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-}{\rho}$$

$$\rho = \rho_- + \rho_+$$

$$\vec{u}^* = \frac{c_+ \vec{u}_+ + c_- \vec{u}_-}{c}$$

$$c = c_+ + c_-$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Bird, Steward, Lightfoot. | Fluid transports

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 17