Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 6 (1970) 4/5, 239–254

Verallgemeinerte Pullbackkonstruktionen bei Semi-Thuesystemen und Grammatiken[1])

Von HERMANN WALTER[2])

1. Einleitung

In [1] wurde gezeigt, daß sich über der Kategorie der ebenen Netze [2] zu zwei gegebenen Semi-Thuesystemen stets ein Semi-Thuesystem konstruieren läßt, so daß man nach Übergang zu freien X-Kategorien ([2], [3]) ein Pullbackdiagramm in der Kategorie aller X-Kategorien und X-Funktoren erhält. Diese Konstruktion ist eine direkte Verallgemeinerung der entsprechenden Konstruktion des direkten (oder auch kartesischen) Produktes bei endlichen Automaten. Es ergab sich ferner analog wie bei endlichen Automaten ([4]), daß die Zerlegung eines Semi-Thuesystems als Pullback über der Kategorie der ebenen Netze effektiv durchführbar war, sofern dieses Semi-Thuesystem überhaupt zerlegbar war.

Um entsprechende Operationen bei Chomskygrammatiken ([5], [6]) durchführen zu können, ist es nützlich, eine weitere Verallgemeinerung zu betrachten, die darin besteht, gewisse „Unter"-Semi-Thuesysteme bei der Konstruktion festzuhalten. Wir werden zunächst zeigen, daß sich die gleichen Sätze wie in [1] auch bei dieser Verallgemeinerung ergeben. Anschließend werden wir drei sich aus dieser verallgemeinerten Pullbackkonstruktion ergebende Operationen bei Chromskygrammatiken diskutieren.

Daß es nützlich ist, derartige Konstruktionen und Operationen zu verwenden, erkennt man daraus, daß man mit Hilfe von Zerlegungen nach solchen Operationen die Struktur einer Grammatik erheblich einfacher beschreiben kann. Im Hinblick auf Vereinfachungen des Wort- und Analyseproblems bei Grammatiken vergleiche man [1].

2. Einige Hilfsmittel

Ein *Semi-Thuesystem* S ist ein Tripel $S = (A(S), P(S), \vdash_S)$ bestehend aus einem endlichen Alphabet $A(S)$, einer endlichen Teilmenge $P(S) \subseteq A(S)^* \times A(S)^*$ und der *Ableitungsrelation* $\vdash_S$ ([6]).[3]) Bei einer algebraischen Betrachtungsweise ist es nützlich, anstelle des *Produktionensystems* $P(S)$ eine abstrakte Menge, die wir wieder $P(S)$ nennen, zusammen mit zwei Abbildungen Q_S und

---

[1]) Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des von Professor Dr. G. HOTZ, Saarbrücken, geleiteten Forschungsvorhaben Ho 251/5 gefördert.

[2]) Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes.

[3]) Mit $A(S)^*$ bezeichne ich das freie Monoid über $A(S)$ mit der Einheit $\square$.

Z_S von $P(S)$ in $A(S)^*$ zu betrachten (Q_S ist bei dem ursprünglichen Produktionensystem die Projektion auf die erste Komponente, Z_S die Projektion auf die zweite Komponente), wir schreiben also: $S = \big(A(S), P(S), Q_S, Z_S, \vdash_S\big)$. Durch diese Schreibweise haben wir den Begriff des Semi-Thuesystems nur unwesentlich verallgemeinert.

Eine *Chomskygrammatik* G ist dann ein Tripel $G = (S, a, e)$ mit einem Semi-Thuesystem S und zwei disjunkten Teilmengen a und e von $A(S)$ (a *Anfangssymbole*, e *Endsymbole*) ([6]). Nach G. HOTZ [3] kann man nun einem Semi-Thuesystem S eine *freie X-Kategorie* $F(S)$ so zuordnen, daß gilt: $w \vdash_S v$ gilt genau dann, wenn $H_{F(S)}(w, v) \neq \emptyset$ ist $\big(H_{F(S)}(w, v)$ = Menge der *Morphismen* von $F(S)$ mit *Quelle* w und *Ziel* $v\big)$.

Ferner gilt: Hat man einen Homomorphismus $h\colon A(S)^* \to A(S')^*$ und eine Abbildung $h\colon P(S) \to P(S')$, die den Relationen

$$h\big(Q_S, Z_S(r)\big) = Q_{S'}, Z_{S'}\big(h(r)\big) \quad \text{für} \quad r \in P(S)$$

genügen, dann induzieren diese beiden Abbildungen (in eindeutiger Weise) einen X-Funktor $F(h)\colon F(S) \to F(S')$. (Dabei seien S und S' zwei Semi-Thuesysteme).

G. HOTZ hat nun bewiesen, daß jeder Morphismus f von $F(S)$ (S gegebenes Semi-Thuesystem) eine *sequentielle Darstellung*

$$f = (1_{v_1} \times r_1 \times 1_{w_1}) \circ \cdots \circ (1_{v_s} \times r_s \times 1_{w_s}) ,$$

mit

$$s \geqq 0 , \qquad w_i, v_i \in A(S)^* \quad \text{und} \quad r_i \in P(S) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, s ,$$

besitzt.[1])

Man nennt diese Darstellung *kanonisch*, falls für alle $l = 1, \ldots, s-1$ gilt:

$$L\big(v_l\, Q(r_l)\big) > L(v_{l+1})\,^{2})$$

gilt. G. HOTZ bewies, daß ein Morphismus höchstens eine kanonisch sequentielle Darstellung besitzt.

G. HOTZ hat nun ferner gezeigt, daß folgendes gilt: Besitzt S eine der beiden folgenden Eigenschaften:

(1) $\quad Z_S(r) \neq \square \quad$ für alle $\quad r \in P(S) \quad$ oder

(2) $\quad Q_S(r) \neq \square \quad$ für alle $\quad r \in P(S)$,

dann besitzt jeder Morphismus f eine (und daher nur eine) kanonische sequentielle Darstellung.

In diesem Falle wollen wir S *regulär* nennen. Beachte, daß die zu Grammatiken gehörigen Semi-Thuesysteme stets regulär sind.

Die zu einer Grammatik $G = (S, a, e)$ gehörige *Sprache* $L = L(G)$ ist definiert durch

$$L(G) = \{w \in \theta^* \mid H_{F(S)}(a, w) = \bigcup_{\alpha \in a} H_{F(S)}(\alpha, w) \neq \emptyset\} .$$

3. Die Existenz von verallgemeinerten Pullbacks von Semi-Thuesystemen

Bevor wir den Begriff des Pullbacks definieren, benötigen wir einige einfache Bezeichnungen.

---

[1]) Bei Kategorien ist $\circ$ die „Hintereinanderausführung" und $\times$ die „Parallelausführung" von Morphismen, Q, Z sind die zugehörigen Quell- bzw. Zielfunktionen der Kategorie.

[2]) Mit L bezeichnen wir die Wortlänge in $A(S)^*$.

Sei T ein Alphabet, dann sei

$$\hat{S}(T) = (T, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \vdash),$$
$$\bar{S}(T) = \bigl(T \cup \{1\}, (T \cup \{1\})^* \times (T \cup \{1\})^*, p_1, p_2, \vdash\bigr),$$

(p_1 ist die Projektion auf die erste, p_2 die Projektion auf die zweite Komponente. Wir haben stillschweigend angenommen, daß $1 \notin T$ ist).

Die zugehörigen freien X-Kategorien bezeichnen wir mit

$$F\bigl(\hat{S}(T)\bigr) = \emptyset(T) \quad \text{und} \quad F\bigl(\bar{S}(T)\bigr) = \mathfrak{N}(T).$$

Ist $T = \emptyset$, so ist $\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{N}$ die Kategorie der ebenen Netze. Betrachte zwei Semi-Thuesysteme S_0 und S. Wir schreiben $S_0 \subseteq S$, wenn gilt: $A(S_0) \subseteq A(S)$, $P(S_0) \subseteq P(S)$, $Q_{S_0} = Q_S/P(S_0)$ und $Z_{S_0} = Z_S/P(S)$. Entsprechend schreiben wir: $F(S_0) \subseteq F(S)$. Dabei ist „$\subseteq$“ der durch die Inklusion induzierte X-Faktor.

Betrachte nun ein festes Semi-Thuesystem S_0. Dann wird eine Kategorie $X\ \mathrm{cat}^{S_0}$ durch folgende Angaben definiert:

(a) Die Objekte der Kategorie sind Diagramme der in Abb. 1a dargestellten Form (S Semi-Thuesystem);

a) $\begin{tikzcd} F(S_0) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] \\ F(S) \end{tikzcd}$ b) $\begin{tikzcd} & F(S_0) \arrow[dl, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\supseteq"] & \\ F(S) \arrow[rr, "\Phi"'] & & F(S') \end{tikzcd}$

Abb. 1

(b) die Morphismen der Kategorie sind X-Funktoren φ: $F(S) \to F(S)$, die das in Abb. 1b dargestellte Diagramm kommutativ machen.

Man spricht dann von Funktoren *unter* S_0.

Bemerkung. Ist $S_0 = \emptyset(\emptyset)$, so ist $X\ \mathrm{cat}^{S_0}$ die Kategorie der freien X-Kategorien und X-Funktoren.

Wir wollen nun die Existenz von Pullbacks in $X\ \mathrm{cat}^{S_0}$ beweisen. Ein *Pullbackdiagramm* in einer Kategorie C ist ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} \circ_1 & \circ \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "f_2"] \\ \circ_0 \arrow[u, "g_1"] & \circ_2 \arrow[l, "g_2"] \end{tikzcd}$$

in C, das folgende universelle Eigenschaft besitzt: Seien h_1: $\circ' \to \circ_1$ und h_2: $\circ' \to \circ_2$ beliebige Morphismen von C mit $g_1 h_1 = g_2 h_2$, dann gibt es genau einen Morphismus h: $\circ' \to \circ$ in C mit $h_i = f_i h$ ($i = 1, 2$).

Durch diese universelle Eigenschaft, werden f_1, f_2 und $\circ$ bis auf Isomorphie in C eindeutig bestimmt. Wählt man spezielle $\circ$ aus, dann nennen wir $\circ$ das Pullback von $\circ_1$ und $\circ_2$ über $\circ_0$.

Wir behaupten nun

Satz 3.1. *Seien* S_0, S_1, S_2 *reguläre Semi-Thuesysteme und* S_3 *beliebiges Semi-Thuesystem mit* $S_0 \subseteq S_1, S_2, S_3$. *Seien ferner* $\varphi_1\colon F(S_1) \to F(S_3)$ *und* $\varphi_2\colon F(S_2) \to F(S_3)$ *X-Funktoren unter* S_0, *die der Eigenschaft* $\varphi_i(A(S_i)) \subseteq A(S_3)$ *und* $\varphi_i(P(S_i)) \subseteq P(S_3)$ *für* $i = 1, 2$ *genügen. Dann gibt es ein reguläres Semi-Thuesystem* S *mit* $S_0 \subseteq S$, *sowie Funktoren* $\pi_i\colon F(S) \to F(S_i)$ $(i = 1, 2)$ *unter* S_0, *so daß das nachfolgende Diagramm ein Pullbackdiagramm in* $X\ \mathrm{cat}^{S_0}$ *ist.*

$$\begin{tikzcd}
F(S_1) \arrow[dd, "\Phi_1"'] & & F(S) \arrow[ll, "\pi_1"'] \arrow[dd, "\pi_2"] \\
& F(S_0) \arrow[ul, phantom, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dl, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\
F(S_3) & & F(S_2) \arrow[ll, "\Phi_2"]
\end{tikzcd}$$

Abb. 2

(Wir erinnern daran, daß dann S bis auf eventuelle Umbenennungen in $A(S) - A(S_0)$ und $P(S) - P(S_0)$ eindeutig bestimmt ist.)

Beweis.

1. Konstruktion von S, π_1, π_2. Setze

$$A(S) = A(S_0) \cup \{(z_1, z_2) \in A(S_1) \times A(S_2) \mid (z_1, z_2) \notin A(S_0) \times A(S_0)\,,\ \varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)\}\,.$$

Sei $w \in A(S)^*$, dann besitzt w eine eindeutig bestimmte Darstellung $w = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \ldots \alpha_k \beta_k$ mit $\alpha_i \in A(S_0)$,

$$\beta_i = \begin{cases} (\gamma_i^1, \gamma_i^2) \in \big(A(S_1) \times A(S_2) - A(S_0) \times A(S_0)\big)\,, \\ \square & (i = 1, \ldots, k)\,. \end{cases}$$

Setze dann für $i = 1, 2$

$$w_i = \alpha_1 \eta_1^i \alpha_2 \eta_2^i \ldots \alpha_k \eta_k^i\,,$$

mit

$$\eta_j^i = \begin{cases} \square, & \text{falls} \quad \beta_j = \square\,, \\ \gamma_j^i, & \text{falls} \quad \beta_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)\,. \end{cases}$$

Dann gilt aber

$$\varphi_1(w_1) = \varphi_2(w_2)\,.$$

Identifiziere:

$$w = (w_1, w_2)_{S_0}\,.$$

Seien $p_i\colon A(S)^* \to A(S_i)^*$ definiert durch

$$p_i(z) = z\ \big(z \in A(S_0)\big)\,, \qquad p_i(z_1, z_2) = z_i\,, \qquad \big((z_1, z_2) \notin A(S_0) \times A(S_0)\big) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Setze dann ferner:

$$P(S) = P(S_0) \cup \{(r_1, r_2) \in P(S_1) \times P(S_2) \mid (r_1, r_2) \notin P(S_0) \times P(S_0)\,,\ \varphi_1(r_1) = \varphi_2(r_2)\}\,.$$

Seien dann p_i: $P(S) \to P(S_i)$ definiert durch

$$p_i(r) = r \ \big(r \in P(S_0)\big)\,, \qquad p_i(r_1, r_2) = r_i\,, \qquad \big((r_1, r_2) \notin P(S_0)\times P(S_0)\big)\,, \quad (i = 1, 2)\,.$$

Setzt man nun noch

$$\begin{aligned}
&Q_S(r) = Q_{S_0}(r) \ \big(r \in P(S)\big) \quad \text{und} \\
&Q_S(r_1, r_2) = \big(Q_{S_1}(r_1), Q_{S_2}(r_2)\big)_{S_0} \quad \big((r_1, r_2) \notin P(S_0) \times P(S_0)\big)\,, \\
&Z_S(r) = Z_{S_0}(r) \ \big(r \in P(S)\big) \quad \text{und} \\
&Z_S(r_1, r_2) = \big(Z_{S_1}(r_1), Z_{S_2}(r_2)\big)_{S_0} \quad \big((r_1, r_2) \notin P(S_0) \times P(S_0)\big) \quad \text{und} \\
&\pi_i = F(p_i)\,,
\end{aligned}$$

dann erhält man S, π_1, π_2 so, daß ein kommutatives Quadrat in $X\mathrm{cat}^{S_0}$ entsteht.

2. Universalität des gewonnenen Quadrates. Sei S' ein Semi-Thuesystem mit $S_0 \subseteq S'$, seien ferner ψ_i: $F(S') \to F(S_i')$ $(i = 1, 2)$ zwei X-Funktoren unter S_0 mit $\varphi_1 \psi_1 = \varphi_2 \psi_2$.

Wir wollen nun ψ: $F(S') \to F(S)$ so definieren, daß ψ ein X-Funktor unter S_0 ist und daß gilt: $\pi_i \psi = \psi_i$ $(i = 1, 2)$. Wir definieren auf Objekten:

Sei $z \in A(S_0)$; dann setze $\psi(z) = z$.

Sei $z \in A(S') - A(S_0)$ $\big($dann gilt $\varphi_1[\psi_1(z)] = \varphi_2[\psi_2(z)]\big)$; setze dann:

$$\psi(z) = \begin{cases} \big(\psi_1(z), \ \psi_2(z)\big), & \text{falls} \quad \big(\psi_1(z), \ \psi_2(z)\big) \notin A(S_0) \times A(S_0)\,, \\ \psi_1(z), & \text{falls} \quad \big(\psi_1(z), \ \psi_2(z)\big) \in A(S_0) \times A(S_0)\,. \end{cases}$$

Dann ist ψ auf Objekten wohldefiniert.

Wir definieren ψ auf Morphismen. Es gibt nach Voraussetzung kanonische sequentielle Darstellungen

$$\psi_i(r) = \big(1_{v_1^{(i)}} \times r_1^{(i)} \times 1_{w_1^{(i)}}\big) \circ \cdots \circ \big(1_{v_{s_i}^{(i)}} \times r_{s_i}^{(i)} \times 1_{w_{s_i}^{(i)}}\big)\,,$$

$(i = 1, 2)$ für $r \in P(S')$. Anwendung von φ_i und Beachtung von $\varphi_1 \psi_1 = \varphi_2 \psi_2$ liefert dann die Gleichung

$$\begin{aligned}
&1_{\varphi_1(v_1^{(1)})} \times \varphi_1(r_1^{(1)}) \times 1_{\varphi_1(w_1^{(1)})} \circ \cdots \circ \Big(1_{\varphi_1\left(v_{s_1}^{(1)}\right)} \times \varphi_1\big(r_{s_1}^{(1)}\big) \times 1_{\varphi_1\left(w_{s_1}^{(1)}\right)}\Big) \\
&= 1_{\varphi_2\left(v_1^{(2)}\right)} \times \varphi_2(r_1^{(2)}) \times 1_{\varphi_2\left(w_1^{(2)}\right)} \circ \cdots \circ \Big(1_{\varphi_2\left(v_{s_2}^{(2)}\right)} \times \varphi_2(r_{s_2}^{(2)}) \times 1_{\varphi_2\left(w_{s_2}^{(2)}\right)}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber nach Voraussetzung, daß φ_i kanonische sequentielle Darstellungen erhalten für $i = 1, 2$.

Aus der Eindeutigkeit kanonischer sequentieller Darstellungen folgt dann aber $s_1 = s_2 = s$,

$$\varphi_1(v_j^{(1)}) = \varphi_2(v_j^{(2)})\,, \qquad \varphi_1(w_j^{(1)}) = \varphi_2(w_j^{(2)})\,, \qquad \varphi_1(r_j^{(1)}) = \varphi_2(r_j^{(2)})\,.$$

Dann ist aber $\psi(r)$ durch

$$\begin{aligned}
\psi(r) = &\Big(1_{\left(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}\right)_{S_0}} \times r_1 \times 1_{\left(w_1^{(1)}, w_1^{(2)}\right)_{S_0}}\Big) \circ \cdots \\
&\cdots \circ \Big(1_{\left(w_s^{(1)}, v_s^{(2)}\right)_{S_0}} \times r_s \times 1_{\left(w_s^{(1)}, w_s^{(2)}\right)_{S_0}}\Big)
\end{aligned}$$

mit

$$r_j = \begin{cases} (r_j^{(1)}, r_j^{(2)})\,, & \text{falls} \quad (r_j^{(1)}, r_j^{(2)}) \notin P(S_0) \times P(S_0)\,, \\ r_j^{(1)}, & \text{falls} \quad (r_j^{(1)}, r_j^{(2)}) \in P(S_0) \times P(S_0) \ \ (\text{denn: } r_j^{(1)} = r_j^{(2)})\,, \end{cases}$$

wohldefiniert.

Wir zeigen, daß ψ eindeutig bestimmt ist. Sei $\psi'\colon F(S') \to F(S)$ X-Funktor unter S_0 mit $\pi_i \psi' = \psi_i$ $(i = 1, 2)$. Man rechnet leicht nach: $\psi(w) = \psi'(w)$ für $w \in A(S')^*$. Es bleibt zu zeigen: $\psi(r) = \psi'(r)$ für $r \in P(S')$. Sei

$$\psi'(r) = \left(1_{(x_1^{(1)}, x_1^{(2)})_{S_0}} \times t_1 \times 1_{(y_1^{(1)}, y_1^{(2)})_{S_0}}\right) \circ \cdots$$
$$\cdots \circ \left(1_{(x_t^{(1)}, x_t^{(2)})_{S_0}} \times t_t \times 1_{(y_t^{(1)}, y_t^{(2)})_{S_0}}\right)$$

die eindeutig bestimmte kanonische sequentielle Darstellung von $\psi'(r)$. Anwendung von π_i liefert wegen $\pi_i \psi' = \psi_i = \pi_i \psi$

$$\left(1_{x_1^{(i)}} \times \pi_i(t_1) \times 1_{y_1^{(i)}}\right) \circ \cdots \circ \left(1_{x_t^{(i)}} \times \pi_i(t_t) \times 1_{y_t^{(i)}}\right)$$
$$= \left(1_{v_1^{(i)}} \times \pi_i(r)_1 \times 1_{w_1^{(i)}}\right) \circ \cdots \circ \left(1_{v_s^{(i)}} \times \pi_i(r_s) \times 1_{w_s^{(i)}}\right)$$
$$(i = 1, 2)\,.$$

Nun sind aber wieder beide Seiten der obigen Gleichung kanonisch sequentiell. Hieraus folgt nun sofort $t = s$,

$$x_j^{(i)} = v_j^{(i)}\,, \quad y_j^{(i)} = w_j^{(i)}\,, \quad \pi_i(t_j) = \pi_i(r_j)\,, \quad (i = 1, 2\,,\ j = 1, \ldots, s)\,.$$

Aus $\pi_i(t_j) = \pi_i(r_j)$ folgt aber $t_j = r_j$. — Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung. Setzt man speziell $S_0 = \hat{S}(\emptyset)$, so ist $X\,\mathrm{cat}^{S_0}$ die Kategorie aller freien X-Kategorien und Funktoren. Hieraus ergibt sich dann als Folgerung aus dem Satz 3.1 der entsprechende Satz in [1].

Wir ziehen eine einfache Folgerung. Sei T ein Alphabet. Betrachte ein Semi-Thuesystem S mit $T \subseteq A(S)$. Dann wird durch die beiden Angaben

(a) $\lambda_T^S(z) = 1$, falls $z \in A(S) - T$,

(b) $\lambda_T^S(t) = t$, falls $t \in T$,

(c) $\lambda_T^S(r) = \left(\lambda_T^S[Q_S(r)],\ \lambda_T^S[Z_S(r)]\right)$,

eindeutig ein X-Funktor $\lambda_T^S\colon F(S) \to \mathfrak{N}(T)$ unter $\emptyset(T)$ bestimmt. Die Familie dieser Funktoren hat die folgende Eigenschaft:

Ist $\varphi\colon F(S) \to F(S')$ ein Funktor unter $\emptyset(T)$ mit $\varphi(A(S)) \subseteq A(S')$ und $\varphi(P(S)) \subseteq P(S')$, dann gilt:

$$\lambda_T^{S'} = \lambda_T^{S'} \varphi\,.$$

Wir gewinnen also folgenden Satz aus Satz 3.1:

Satz 3.2. *Seien S_1 und S_2 mit $T \subseteq A(S_1) \cap A(S_2)$ reguläre Semi-Thuesysteme, dann gibt es ein (bis auf „Isomorphie" eindeutig bestimmtes) Semi-Thue-*

$$\begin{tikzcd}
F(S_1) \arrow[d, "\lambda_T^{S_1}"'] & F(S) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dl, phantom, "\Phi(T)"] \\
\mathfrak{N}(T) & F(S_2) \arrow[l, "\lambda_T^{S_2}"]
\end{tikzcd}$$

Abb. 3

system S und Funktoren π_i: $F(S) \to F(S_i)$ $(i = 1, 2)$, so daß das Diagramm ein Pullbackdiagramm in der Kategorie aller freien X-Kategorien und X-Funktoren unter $\varnothing(T)$ ist.

Wir beachten hierbei: Ist S gemäß Satz 3.2 bestimmt, dann gilt

$$A(S) = T \cup \big(A(S_1) - T\big) \times \big(A(S_2) - T\big)\,,$$
$$P(S) = \{(r_1, r_2) \mid \lambda_T^{S_1}(r_1) = \lambda_T^{S_2}(r_2)\}\,,$$
$$Q_S(r_1, r_2) = \big(Q_{S_1}(r_1), Q_{S_2}(r_2)\big)_{\varnothing(T)}\,,$$
$$Z_S(r_1, r_2) = \big(Z_{S_1}(r_1), Z_{S_2}(r_2)\big)_{\varnothing(T)}\,.$$

Für die Funktoren π_1 und π_2 gilt

$$\pi_i\big(A(S)\big) \subseteq A(S_i) \quad \text{und} \quad \pi_i\big(P(S)\big) \subseteq P(S_i)\,, \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Bezeichnung. Wählt man für je zwei reguläre Semi-Thuesysteme S_1 und S_2 ein S aus, so setzen wir: $S = S_1 \underset{T}{\times} S_2$.

4. Zerlegungen von Semi-Thuesystemen

Wir wollen uns mit der Fragestellung beschäftigen, wann ein gegebenes Semi-Thuesystem S sich in der Form $S = S_1 \underset{T}{\times} S_2$ darstellen läßt. Wir werden zeigen, daß man ein konstruktives Verfahren angeben kann, das dem Verfahren von Hartmanis bei endlichen Automaten entspricht, mit dem man alle möglichen Zerlegungen eines Semi-Thuesystems nach $\underset{T}{\times}$ gewinnt.

Wir wollen nun zunächst das vorliegende Problem vereinfachen.

Hilfssatz 4.1. *Sei S_0 ein Semi-Thuesystem, seien zwei kommutative Quadrate*

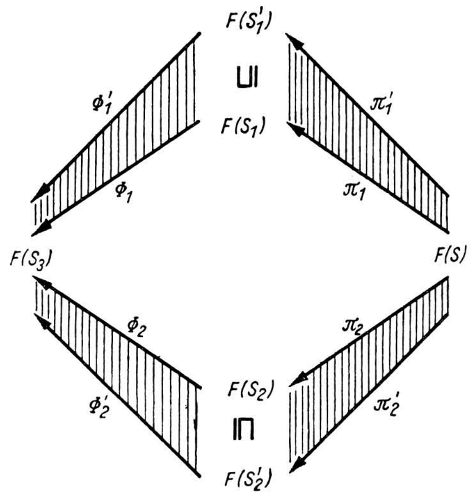

Abb. 4

und die schraffierten Dreiecke kommutativ in X cat^{S_0}. Ist dann das äußere Quadrat ein Pullbackdiagramm in X cat^{S_0}, so ist auch das innere Quadrat ein Pullbackdiagramm in X cat^{S_0}.

Beweis. Seien ψ_i: $F(S') \to F(S_i)$ $(i = 1, 2)$ X-Funktoren unter S_0 mit $\varphi_1 \psi_1 = \varphi_2 \psi_2$. Setze $\psi_i' = in\,(F(S_i), F(S_i')) \circ \psi_i$ $(i = 1, 2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_1' \circ \psi_1' &= \varphi_1' \circ in\,(F(S_1), F(S_1')) \circ \psi_1 = \varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2 = \\ &= \varphi_2' \circ in\,(F(S_2), F(S_2')) \circ \psi_2 = \varphi_2 \circ \psi_2' \,.\end{aligned}$$

Da das äußere Quadrat ein Pullbackdiagramm in X cat^{S_0} ist, gibt es einen X-Funktor ψ: $F(S') \to F(S)$ unter S_0 mit $\pi_i' \circ \psi = \psi_i'$ $(i = 1, 2)$. Hieraus folgt aber

$$in\,(F(S_i), F(S_i')) \circ \pi_i \circ \psi = \pi_i' \circ \psi = \psi_i' = in\,(F(S_i), F(S_i')) \circ \psi_i \,, \qquad (i = 1, 2) \,.$$

Da $in\,(F(S_i), F(S_i'))$ injektiv ist, folgt

$$\pi_i \circ \psi = \psi_i \,, \qquad (i = 1, 2) \,.$$

Damit ist ein X-Funktor ψ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden; wir zeigen, daß ψ durch

$$\pi_i \circ \psi = \psi_i \,, \qquad (i = 1, 2) \,,$$

eindeutig bestimmt ist.

Sei ψ' ein weiterer X-Funktor unter S_0 mit $\pi_i \circ \psi' = \psi_i$ $(i = 1, 2)$. Wenden wir auf beide Seiten der Gleichung $in\,(F(S_i), F(S_i'))$ an, so erhalten wir

$$\pi_i' \circ \psi' = in\,(F(S_i), F(S_i')) \circ \pi_i \circ \psi' = in\,(F(S_i), F(S_i')) \circ \psi_i = \psi_i' \,, \qquad (i = 1, 2) \,.$$

Da das äußere Quadrat aber ein Pullbackdiagramm in X cat^{S_0} war, folgt hieraus

$$\psi = \psi' \,.$$

Aus dem Konstruktionsbeweis zu Satz 3.1 entnimmt man folgende „Umkehrung" des Hilfssatzes 4.1.

Hilfssatz 4.2. *Sei S_0 ein Semi-Thuesystem, seien zwei kommutative Quadrate*

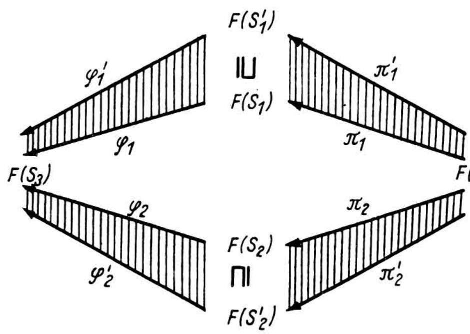

Abb. 5

und die schraffierten Dreiecke kommutativ in X cat^{S_0}, *mit Ausnahme von S_3 seien alle auftretenden Semi-Thuesysteme regulär. Gilt dann*

$$\varphi_i'(r_i) \cap \varphi_j'\,(P(S_j')) = \emptyset \,, \qquad \varphi_j'(z_i) \cap \varphi_j'\,(A(S_j')) = \emptyset$$

für $i \neq j$, $r_i \in P(S_i') - P(S_i)$, $z_i \in A(S_i') - A(S_i)$ $(i = 1, 2, j = 1, 2)$, dann ist das äußere Quadrat ein Pullbackdiagramm in X cat^{S_0}, *sofern das innere Quadrat ein Pullbackdiagramm in X* cat^{S_0} *ist.*

Aufgrund dieser beiden Hilfssätze genügt es nun, im Rahmen unserer Problemstellung (bei gegebenem Alphabet T und regulärem Semi-Thuesystem S)

$$\begin{tikzcd}
 & F(S_1) \arrow[dl, "\lambda_T^{S_1}"'] & \\
\pi(T) & & F(S) \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & F(S_2) \arrow[ul, "\lambda_T^{S_2}"] &
\end{tikzcd}$$

Abb. 6

nur solche Pullbackdiagramme in X cat$^{\varnothing(T)}$ zu betrachten, für die gilt:

1) S_1, S_2 regulär;

2) $\pi_i(A(S)) = A(S_i)$, $\quad \pi_i(P(S)) = P(S_i)$, $\quad (i = 1, 2)$;

3) $\pi_i(A(S) - T) = A(S_i) - T$, $\quad (i = 1, 2)$.

Wir wollen nun zunächst zu regulärem S und beliebigem Alphabet $T \subseteq A(S)$ alle Semi-Thuesysteme S' (bis auf Isomorphie natürlich) bestimmen, zu denen es einen X-Funktor π: $F(S) \to F(S')$ unter $\varnothing(T)$ mit $\pi'(A(S)) = A(S')$ und $\pi'(P(S)) = P(S')$ gibt. Läßt sich nämlich S in der Form $S = S_1 \underset{T}{\times} S_2$ schreiben, so können wir nach dem oben Gesagten annehmen, daß S_1 und S_2 unter diesen Semi-Thuesystemen zu suchen sind.

Wir bemerken sofort, daß solche Semi-Thuesysteme S' wieder regulär sind.

Sei also π': $F(S) \to F(S')$ ein X-Funktor unter $\varnothing(T)$ mit $\pi'(A(S)) = A(S')$, $\pi'(P(S)) = P(S')$, $\pi'(A(S) - T) = A(S') - T$. Seien dann $\alpha_{\pi'}^A$ und $\alpha_{\pi'}^P$ die zu π' gehörigen Äquivalenzrelationen auf $A(S)$ bzw. $P(S)$. Aus der Tatsache, daß π' ein Funktor unter $\varnothing(T)$ ist, folgen nun sofort folgende Aussagen:

a) $t\,\alpha_{\pi'}^A\, t'$ $(t, t' \in T) \Rightarrow t = t'$.

b) Hebt man $\alpha_{\pi'}^A$ in folgender Weise zu einer Äquivalenzrelation $(\alpha_{\pi'}^A)^*$ hoch,

$$\begin{aligned} w(\alpha_{\pi'}^A)^*\, w'\big(w, w' \in A(S)^*\big) \Leftrightarrow \big(&\text{Sei } w = x_1 \cdot \ldots \cdot x_r \text{ und} \\ &\text{sei } w' = y_1 \cdot \ldots \cdot y_s \text{ mit} \\ &x_i, y_j \in A(S)\text{, dann gelte} \\ &r = s, x_i \alpha_\pi^A\, y_i \quad (i = 1, \ldots, r)\big)\,, \end{aligned}$$

dann gilt: $r\,\alpha_{\pi'}^P\, r'$ $\big(r, r' \in P(S)\big)$ impliziert $Q(r)\,(\alpha_\pi^A)^*\,Q(r')$ und $Z(r)\,(\alpha_{\pi'}^A)^*\,Z(r')$. (Man beachte hierbei: $w\,(\alpha_{\pi'}^A)^*\,w' \Leftrightarrow \pi'(w) = \pi'(w')$.)

c) $t\,\alpha_{\pi'}^A\, z$ $\big(t \in T$, $\quad z \in A(S)\big) \Rightarrow z \in T$.

Ein Paar $\alpha = (\alpha^A, \alpha^P)$ von Äquivalenzrelationen α^A auf $A(S)$ und α^P auf $P(S)$, das a), b), c) genügt, wollen wir eine *T-Kongruenz* auf S nennen. Jeder X-Funktor π': $F(S) \to F(S')$ unter $\varnothing(T) = T$ mit $\pi'(A(S)) = A(S') - T$ und $\pi'(P(S)) = P(S')$ induziert also in kanonischer Weise eine T-Kongruenz $\alpha_{\pi'}$ auf S.

Sei nun umgekehrt $\alpha = (\alpha^A, \alpha^P)$ eine T-Kongruenz auf S, dann kann man ein Semi-Thuesystem S_α durch folgende Angaben bestimmen:

a) $A(S_\alpha)$ ist die Menge der Kongruenzklassen von α^A (Bezeichnung: $[z]_{\alpha^A} =$ Kongruenzklassen von z bei α^A). Nach Umbenennung kann man wegen 1) identifizieren: $t = [t]_{\alpha^A}$ für $t \in T$, so daß gilt: $T \subseteq A(S_\alpha)$.

b) $P(S_\alpha)$ besteht aus den Kongruenzklassen von α^P (Bezeichnung: $[r_{\alpha^P}] =$ Kongruenzklasse von r unter α^P).

c) $Q_S([r]_{\alpha^P}) = [Q_S(r)]_{(\alpha^A)^*}$, $Z_{S_\alpha}([r]_{\alpha^P}) = [Z_S(r)]_{(\alpha^A)^*}$ $\big(r \in P(S)\big)$.

Ferner wird durch die Zuordnung

$$\pi_\alpha(z) = [z]_{\alpha^A}, \qquad z \in A(S),$$

und

$$\pi_\alpha(r) = [r]_{\alpha^P}, \qquad r \in P(S),$$

ein X-Funktor π_α: $F(S) \to F(S)$ unter $\emptyset(T)$ mit $\pi_\alpha\big(A(S)\big) - T = A(S) - T$ und $\pi_\alpha\big(P(S)\big) = P(S_\alpha)$ bestimmt.

Nun kann man leicht folgenden Satz beweisen.

Satz 4.1 (Homomorphiesatz). *Sei π': $F(S) \to F(S')$ ein X-Funktor unter $\emptyset(T)$ mit $\pi'\big(A(S)\big) - T = A(S') - T$ und $\pi'\big(P(S)\big) = P(S')$, dann induziert π' eine T-Kongruenz auf S, so daß es einen Isomorphismus j: $F(S_{\alpha_{\pi'}}) \to F(S')$ unter $\emptyset(T)$ gibt, der das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd}
F(S) \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi_{\alpha_{\pi'}}"'] & & F(S') \\
& F(S_{\alpha_{\pi'}}) \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Abb. 7

Beweis. Setze $j\big([z]_{\alpha^A_{\pi'}}\big) = \pi'(z)$ $\big(z \in A(S)\big)$ und

$$j\big([r]_{\alpha^P_{\pi'}}\big) = \pi'(r), \qquad \big(r \in P(S)\big).$$

Nach dem Satz 4.1 genügt es nun also, die T-Kongruenzen auf S zu betrachten, denn wenn $S = S_1 \underset{T}{\times} S_2$ ist, so kann man annehmen, daß es T-Kongruenzen α_1 und α_2 mit $S_{\alpha_i} = S_i$ $(i = 1, 2)$ gibt. Sei $V(S)$ die Menge der S_α (α T-Kongruenz). Wie üblich versucht man, auf $V(S)$ eine Verbandsstruktur zu erklären.

Wir behaupten:

Hilfssatz 4.3. *Sei S Semi-Thuesystem, $T \subseteq A(S)$ Alphabet, seien α_i $(i = 1, 2)$ T-Kongruenzen auf S, dann gilt:*

1) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (\alpha_1^A \cdot \alpha_2^A, \alpha_1^P \cdot \alpha_2^P)$ *T-Kongruenz auf S;*

2) $\alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha_1^A + \alpha_2^A, \alpha_1^P + \alpha_2^P)$ *T-Kongruenz auf S.*

Beweis: 1) a), b) $t \in T$, $z \in A(S)$ mit $t(\alpha_1\alpha_2)^A z \Rightarrow t\alpha_1 z \Rightarrow z \in T \Rightarrow z = t$.

c) Wir behaupten:

$$\big((\alpha_1 \cdot \alpha_2)^A\big)^* = (\alpha_1^A)^* \cdot (\alpha_2^A)^*.$$

Beweis. Seien $w = x_1 \cdot \ldots \cdot x_r$ und $w' = y_1 \cdot \ldots \cdot y_s$ aus $A(S)^*$ mit $x_i, y_j \in A(S)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$$w\big((\alpha_1 \cdot \alpha_2)^A\big)^* w' \Leftrightarrow \big(r = s,\ x_i\,(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^A\, y_i \text{ für } i = 1, \ldots, r\big)$$
$$\Leftrightarrow (r = s,\ x_i\,\alpha_1^A\, y_i \text{ und } x_i\,\alpha_2^A\, y_i \text{ für } i = 1, \ldots, r)$$
$$\Leftrightarrow \big(w(\alpha_1^A)^* w' \text{ und } w(\alpha_2^A)^* w'\big) \Leftrightarrow w\big((\alpha_1^A)^* \cdot (\alpha_2^A)^*\big)\, w' .$$

Hieraus folgt aber: Gilt $r\,(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^P\, r'$ für $r, r' \in P(S)$, dann folgt: $r\,\alpha_1^P\, r'$ und $r\,\alpha_2^P\, r'$. Hieraus folgt

$$Q_S, Z_S(r)\ (\alpha_1^A)^*\ Q_S, Z_S(r')$$

und

$$Q_S, Z_S(r)\ (\alpha_2^A)^*\ Q_S, Z_S(r') .$$

Hieraus folgt wiederum

$$Q_S, Z_S(r)\ (\alpha_1^A)^* \cdot (\alpha_2^A)^*\ Q_S, Z_S(r') .$$

Dann folgt aber

$$Q_S, Z_S(r)\ \big((\alpha_1 \cdot \alpha_2)^A\big)^*\ Q_S, Z_S(r') .$$

2) a), b) Seien $t \in T$ und $z \in A(S)$ mit $t(\alpha_1 + \alpha_2)^A z$. Dann gibt es eine Folge

$$t = z_0, \ldots, z_k = z \quad \text{mit} \quad z_i\,\beta\, z_{i+1} \quad (i = 0, \ldots, k-1) \text{ und } \beta \in \{\alpha_1^A, \alpha_2^A\} .$$

Nun gilt aber der Reihe nach:

$$z_1\,\beta\, z_0 \Rightarrow z_1 = t ,$$
$$z_2\,\beta\, z_1 \Rightarrow z_2 = t ,$$
$$\ldots$$
$$z_i\,\beta\, z_{i+1} \Rightarrow z_{i+1} = t ,$$
$$\ldots$$
$$z_{k-1}\,\beta\, z_k \Rightarrow z_k = z = t .$$

c) Wir behaupten:

$$w\big((\alpha_1^A)^* + (\alpha_2^A)^*\big)\, w' \Rightarrow w\big((\alpha_1 + \alpha_2)^A\big)^* w' \quad \big(w, w' \in A(S)^*\big) .$$

Beweis. Aus $w\big((\alpha_1^A)^* + (\alpha_2^A)^*\big)\, w'$ folgt, daß es eine Folge

$$w = w_0, w_1, \ldots, w_k = w'$$

mit $w_i\,\beta^*\, w_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, k-1$ und $\beta \in \{\alpha_1^A, \alpha_2^A\}$ gibt. Seien

$$w_i = x_1^{(i)} \cdot \ldots \cdot x_{r_i}^{(i)} \quad (i = 0, \ldots, k),\ x_\lambda^{(i)} \in A(S) .$$

Man erkennt sofort (Definition von $(\alpha^A)^*$), daß gilt:

$$r = r_i = r_j \text{ für } i, j = 0, \ldots, k, \quad x_\lambda^{(i)}\,\beta\, x_\lambda^{(i+1)} \quad (i = 0, \ldots, k-1) ,$$

$\beta \in \{\alpha_1^A, \alpha_2^A\}$. Also folgt: $x_\lambda^{(0)}\,(\alpha_1 + \alpha_2^A)^A\, x_\lambda^{(k)}$ für $\lambda = 1, \ldots, r$. Hieraus folgt aber schließlich:

$$w\big((\alpha_1 + \alpha_2)^A\big)^* w' .$$

Seien nun $r, r' \in P(S)$ mit $r\,(\alpha_1 + \alpha_2)^P\, r'$. Dann gibt es eine Folge

$$r = r_0, \ldots, r_k = r'$$

mit $r_i \beta^P r_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, k-1$ und $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$Q_S, Z_S(r_i) \, (\beta^A)^* \, Q_S, Z_S(r_{i+1}) \qquad (i = 0, \ldots, k-1) \text{ und } \beta \in \{\alpha_1, \alpha_2\} .$$

Also:

$$Q_S, Z_S(r) \left((\alpha_1^A)^* + (\alpha_2^A)^*\right) Q_S, Z_S(r') .$$

Und schließlich:

$$Q_S, Z_S(r) \left((\alpha_1 + \alpha_2)^A\right)^* Q_S, Z_S(r') .$$

Damit gewinnen wir folgenden Satz:

Satz 4.2. *Sei S ein Semi-Thuesystem. Erklärt man in $V(S)$ folgende beiden Operationen „$+$" und „$\cdot$" durch*

$$S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} = S_{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

und

$$S_{\alpha_1} \cdot S_{\alpha_2} = S_{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad \left(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2} \in V(S)\right) ,$$

so ist $\left(V(S), +, \cdot\right)$ ein Verband. Das neutrale Element bezüglich „$+$" ist S, bezüglich „$\cdot$" $\mathfrak{N}_S(T) = S_{\alpha_{\lambda_T^S}}$.

Aus der Konstruktion des Pullbacks erkennt man nun sofort: Ist $S = S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}$, so gilt:

1) $S_{\alpha_1} \cdot S_{\alpha_2} = \mathfrak{N}_S(T)$, $S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2}$

und

2) α_1 und α_2 sind permutierbar (d. h. α_1^A und α_2^A bzw. α_1^P und α_2^P sind permutierbar).

Wir behaupten nun

Satz 4.3. *Sei S ein reguläres Semi-Thuesystem, $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2} \in V(S)$, dann ist S isomorph $S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}$ dann und nur dann, wenn gilt:*

1) $S_{\alpha_1} \cdot S_{\alpha_2} = \mathfrak{N}_S(T)$, $S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} = S$

und

2) *α_1 und α_2 sind permutierbar.*

Beweis. Wir geben den Isomorphismus $j \colon F(S) \to F(S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2})$ an.

$$j(z) = \left([z]_{\alpha_1^A}, [z]_{\alpha_2^A}\right), \; z \in A(S) - T;$$

$$j(r) = \left([r]_{\alpha_1^P}, [r]_{\alpha_2^P}\right) .$$

Wegen der Eigenschaft c) von T-Kongruenzen auf S gilt

$$[z]_{\alpha_i^A} \notin T, \text{ falls } z \notin T \text{ für } i = 1, 2 .$$

Also ist j auf Objekten wohldefiniert. Ferner gilt:

$$\lambda_T^{S_{\alpha_1}}\left([r]_{\alpha_1^P}\right) = \lambda_T^S(r) = \lambda_T^{S_{\alpha_2}}\left([r]_{\alpha_2^P}\right) \quad \text{für } r \in P(S) .$$

Also ist j auf Morphismen wohldefiniert. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} j\big(Q_S, Z_S(r)\big) &= \Big([Q_S, Z_S(r)]_{(\alpha_1^A)^*}, \ [Q_S, Z_S(r)]_{(\alpha_2^A)}\Big)_{\varnothing(T)} \\ &= \big(Q_{S_{\alpha_1}}, Z_{S_{\alpha_1}}([r]_{\alpha_1^P}), \ Q_{S_{\alpha_2}}, Z_{S_{\alpha_2}}([r]_{\alpha_2^P})\big)_{\varnothing(T)} \\ &= Q_{S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}}, \ \ Z_{S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}}\big([r]_{\alpha_1^P}, \ \ [r]_{\alpha_2^P}\big) \\ &= Q_{S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}}, \ \ Z_{S_{\alpha_1} \underset{T}{\times} S_{\alpha_2}}\big(j(r)\big) \quad \text{für } r \in P(S)\,. \end{aligned}$$

Also ist j als X-Funktor wohlbestimmt. Wie üblich zeigt man nun leicht, daß j bijektiv ist.

Mit Hilfe des Satzes 4.3 ist aber unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Wir erhalten also eine bis auf geringfügige Abweichungen gleiche Theorie wie die im Falle des endlichen Automaten von HARTMANIS entwickelte Theorie.

5. Drei Operationen bei Grammatiken

Mit Hilfe der Pullbackkonstruktionen, die wir in den vorhergehenden Abschnitten diskutiert hatten, können wir nun drei Operationen zwischen Grammatiken definieren:

a) Seien $G_1 = \big(F(S), s_1, T\big)$ und $G_2 = \big(F(S), s_2, T\big)$, dann setze

$$G_1 * G_2 = \Big(F(S_1 \underset{T}{\times} S_2), \quad s_1 \times s_2, \ \ T\Big)\,.$$

b) Seien $G_1 = \big(F(S_1), T_1, s\big)$ und $G_2 = \big(F(S_2), T_2, s\big)$ Grammatiken, dann setze

$$G_1 \times G_2 = \Big(F(S_1 \underset{s}{\times} S_2), \ s, \ T_1 \times T_2\Big)\,.$$

c) Seien $G_i = \big(F(S_i), s, T\big)$ $(i = 1, 2)$ Grammatiken, dann setze

$$G_1 \wedge G_2 = \Big(F\big(S_{1_T} \underset{s}{\times} S_2\big), s, T\Big)\,.$$

Für die Satzmengen gelten folgende Aussagen.

Hilfssatz 5.1. *Seien G_1, G_2 Grammatiken, dann gilt:*

a) $L\,(G_1 * G_2) \subseteq L(G_1) \sqcap L(G_2)$

b) $L\,(G_1 \times G_2) \subseteq L(G_1) \times L(G_2)$

c) $L\,(G_1 \wedge G_2) \subseteq L\,(G_1 * G_2)$.

Die Beweise sind trivial.

Bemerkung 1. Im allgemeinen sind die Inklusionen echt, da sonst das Durchschnittsproblem bei kontextfreien Sprachen entscheidbar wäre.

Bemerkung 2. Mit Hilfe der Operation $*$ gewinnt man einen hinreichenden Algorithmus für das Durchschnittsproblem bei kontextfreien Sprachen, da man dort entscheiden kann, ob eine kontextfreie Grammatik eine leere Sprache erzeugt oder nicht.

Beispiel 1. Setze $G_1 = \big(F(S_1),\ \{\nu\},\ \{a, b\}\big)$,

$$A(S_1) = \{\nu, \xi, a, b\}\ ,$$
$$P(S_1) = \{(\nu \to \nu\,\nu),\ (\nu \to a\,\xi),\ (\xi \to b\,\xi),\ (\xi \to a)\}$$

und $G_2 = \big(F(S_2),\ \{\nu\},\ a, b\big)$,

$$P(S_2) = \{(\nu \to \xi_1\,\nu,\ \xi_2),\ (\xi_1 \to a\,\xi_1),\ (\xi_2 \to a\,\xi_2),\ (\xi_2 \to b\,\xi_2),\ (\xi_1 \to a),\ (\xi_2 \to b)\}\ ,$$
$$A(S_2) = \{\nu, \xi_1, \xi_2, a, b\}\ .$$

Setze $G_3 = \big(F(S_3),\ \{\nu\},\ \{a, b\}\big)$,

$$A(S_3) = \{\nu, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, a, b\}\ ,$$
$$P(S_3) = \{(\nu \to \eta_1\,\eta_2),\ (\eta_1 \to a\,\eta_4),\ (\eta_2 \to a\,\eta_5),\ (\eta_5 \to b\,\eta_5),\ (\eta_4 \to a),\ (\eta_5 \to a)\}\ .$$

Dann ist $F(S_3)$ unter $T \cup \{\nu\}$ isomorph $F(S_1 \underset{T}{\times} S_2)$, also:

G_3 ist isomorph $G_1 \ast G_2$.

Man verifiziert:

$$L(G_1) = \{a\,b^{i_1}\,a^2\,b^{i_2}\,a^2 \ldots a^2\,b^{i_n}\,a | n \geqq 1,\ i_\lambda \geqq 0,\ \lambda = 1, \ldots, n\}$$
$$= \big((a\,b^*)^* - \square\big)\,a\ .$$

Ferner gilt:

$$L(G_2) = a\,a^*\,\{a, b\}^*\,a,$$
$$L(G_3) = a^3\,b^*\,a\ .$$

(Beachte: $L(G_1) \sqcap L(G_2) = L(G_1)$.)

Beispiel 2. Setze $G_1 = \big(F(S_1),\ \{\nu\},\ \{a, b\}\big)$ und $G_2 = \big(F(S_2),\ \{\nu\},\ \{a, b\}\big)$ mit $A(S_1) = \{\nu, \xi, a, b\}$ und $A(S_2) = \{\nu, \xi_1, \xi_2, a, b\}$.

$$P(S_1) = \{(\nu \to a\,\xi),\ (\xi \to a\,\xi),\ (\xi \to b\,\xi),\ (\xi \to \square)\},$$
$$P(S_2) = \{(\nu \to a\,\xi_1),\ (\xi_1 \to a\,\xi_2),\ (\xi_1 \to b\,\xi_2),\ (\xi_2 \to \square)\}\ .$$

Bestimmt man dann $G_3 = \big(F(S_3),\ \{\nu\},\ T \times T\big)$ $\big(T = \{a, b\}\big)$ durch

$$A(S_3) = \{\nu, \eta_1, \eta_2\} \cup T \times T$$

und

$$P(S_3) = \{\big(\nu \to (a, a)\,\eta_1\big),\ \big(\eta_1 \to (a, b)\,\eta_2\big),\ \big(\eta_1 \to (a, a)\,\eta_2\big),\ \big(\eta_1 \to (b, a)\,\eta_2\big),\ \big(\eta_1 \to (b, b)\,\eta_2\big),\ (\eta_2 \to \square)\}\ ,$$

dann ist $G_1 \times G_2$ isomorph zu G_3. Es gilt offenbar:

$$L(G_1) = a\,T^*, \quad L(G_2) = a\,T \quad \text{und} \quad L(G_3) = (a\,T) \times (a\,T)\ .$$

Beispiel 3. Seien $G_i = \big(F(S_i),\ \{\nu\},\ \{a, b\}\big)$ $(i = 1, 2)$ bestimmt durch

$$A(S_1) = A(S_2) = \{\nu, \xi_1, \xi_2, a, b\}$$

und

$$P(S_1) = \{(\nu \to a\,\xi_1),\ (\xi_1 \to b\,\xi_2),\ (\xi_2 \to b\,\xi_1),\ (\xi_1 \to \square),\ (\xi_2 \to \square),\ (\nu \to a\,\nu),\ (\nu \to a),\ (\nu \to \square)\}\ ,$$
$$P(S_2) = \{(\nu \to a\,\nu),\ (\nu \to a\,\xi_1),\ (\xi_1 \to b\,\xi_2),\ (\xi_1 \to b\,\xi_1),\ (\xi_2 \to b\,\xi_1),\ (\xi_2 \to b\,\xi_2),\ (\xi_1 \to \square),\ (\xi_2 \to \square),\ (\nu \to a),\ (\nu \to \square)\}\ .$$

Bestimmt man dann $G_3 = \big(F(S_3), \{\nu\}, \{a, b\}\big)$ durch

$$A(S_3) = \{\nu, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, a, b\}$$

und

$$P(S_3) = \{(\nu \to a\,\nu), (\nu \to a\,\eta_1), (\eta_1 \to b\,\eta_4), (\eta_1 \to b\,\eta_3), (\eta_2 \to b\,\eta_3), (\eta_2 \to b\,\eta_4), (\eta_3 \to b\,\eta_2), (\eta_3 \to b\,\eta_1), (\eta_4 \to b\,\eta_1), (\eta_4 \to b\,\eta_2), (\eta_{1,2,3,4} \to \square), (\nu \to a), (\nu \to \square)\}\,,$$

dann ist $G_1 \wedge G_2$ isomorph zu G_3.

Es gilt:

$$L(G_1) = (a^*)\, b^* = L(G_2) = L(G_3)\,.$$

Um $G_1 \ast G_2$ zu bestimmen, füge man noch Buchstaben $\eta_{5,6,7,8}$ zu $A(S_3)$ und Regeln $(\nu \to a\,\eta_5)$, $(\nu \to a\,\eta_7)$, $(\eta_{5,6,7,8} \to a + \square)$ zu $P(S_3)$ hinzu. Man erhält dann G_4 isomorph zu $G_1 \ast G_2$. Nach Hilfssatz 5.1 gilt dann $L(G_4) = L(G_3)$.

Wir vergleichen die Anzahl der Regeln bei jeder Grammatik:

$$card\,\big(P(S_1)\big) = 8, \quad card\,\big(P(S_2)\big) = 10, \quad card\,\big(P(S_3)\big) = 16, \quad card\,\big(P(S_4)\big) = 22\,.$$

Man erkennt, daß sich Zerlegungen nach $\ast$ lohnen. Da mit Zerlegungen nach $\wedge$ und $\ast$ nicht nur der Vorteil der Regelverminderung (der nicht immer eintritt) verbunden ist, sondern auch der Vorteil, daß der Aufwand bei der Analyse nach der Zerlegung niedriger wird, da Zwangsbedingungen auftreten, ist die Untersuchung von Zerlegungen hinreichend berechtigt.

Literatur

[1] Schnorr, C.-P., Walter, H., Pullbackkonstruktionen bei Semi-Thuesystemen. EIK **5** (1969) 1, 27–36.

[2] Hotz, G., Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen. EIK **1** (1965) 3, 185–205; 4, 209–231.

[3] Hotz, G., Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit formaler Sprachen. EIK **2** (1966) 4, 235–246.

[4] Hartmanis, J., Symbolic analysis of decomposition of information processing machines. Inform. and Control **3** (1960) 2.

[5] Ginsburg, S., The Mathematical Theory of Context-Free Languages. McGraw Hill, New York 1966.

[6] Chomsky, N., On certain formal properties of grammars. Inform. and Control **2** (1959) 137–167.

[7] MacLane, S., Homology. Springer Verlag, New York 1965.

[8] Mitchell, B., Theory of Categories. Academic Press, New York 1965.

Kurzfassung

Das von G. Hotz entwickelte Konzept, Sätze aus der Theorie der endlichen Automaten auf Semi-Thuesysteme und Chomskygrammatiken zu übertragen, indem man von Semi-Thuesystemen zu freien X-Kategorien übergeht, führt zum Aufbau einer Dekompositionstheorie für Semi-Thuesysteme. In dieser Arbeit werden Produkte recht allgemeiner Art bei Semi-Thuesystemen diskutiert, die in natürlicher Weise zu Operationen zwischen Grammatiken führen, die mit dem Durchschnitt von Sprachen zusammenhängen. Untersucht man Zerlegungen nach solchen Produkten, so erhält man eine bis auf kleine Modifizierungen völlig analoge Theorie zu der von J. Hartmanis entwickelten Theorie der Zerlegungen endlicher Automaten nach Parallelschaltungen.

Abstract

The concept of free X-categories introduced by G. Hotz leads to a decomposition-theory for Semi-Thue-systems and Chomsky-grammars. This decomposition-theory is a strict generalization of the decomposition-theory for finite automata introduced by J. Hartmanis. In this paper we will discuss products between Semi-Thue-systems. This kind of products leads in a natural way to operations between grammars which are closely connected to the intersection of languages.

Резюме

Концепция свободных X-категорий, введенная Г. Хотцом, ведет к теории декомпозиции для полусистем Туэ и грамматик Хомского. Эта теория декомпозиции является прямым обобщением теории декомпозиции конечных автоматов, введенных Дж. Хартмэнисом. В настоящей статьи исследуются произведения между полусистемами Туэ. Этот вид произведений ведет естественным путем к операциям между грамматиками, которые замкнуты по отношению к пересечению языков.

(Eingegangen am 8. 7. 1969)

Anschrift des Verfassers:

Dr. H. Walter
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes
66 Saarbrücken 15