Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik ·
EIK 13 (1977) 1/2, 39–53

Über lineare Simulierbarkeit endlicher Automaten

Von *Hermann K.-G. Walter*

0. Einleitung

Bekanntermaßen kann über den Simulationsbegriff eine natürliche Verbindung zwischen Halbgruppentheorie und Theorie endlicher Automaten hergestellt werden. Dieser Zusammenhang ist zuerst entdeckt worden von K. Krohn und J. Rhodes [11], [1]. Verwendet man diesen Begriff in der von M. Arbib angegebenen Version [1], so kann wie im folgenden dargelegt wird, eine Äquivalenztheorie entwickelt werden, die weitgehend der klassischen Äquivalenztheorie entspricht. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, Probleme der linearen Realisierung von Automaten mit halbgruppentheoretischen Methoden zu untersuchen.

Wir leiten eine Charakterisierung her, die in Verallgemeinerung von Ergebnissen aus [2], [3], [4], [8], [14], [15] eine vollständig halbgruppentheoretische Charakterisierung der linearen Realisierbarkeit von Automaten ergibt. Dies bedeutet, daß für Realisierungsfragen wesentliche Eigenschaften eines Automaten ausgedrückt werden können durch Eigenschaften der Transitionshalbgruppe.

Zur Frage der verschiedenen Realisierungsdefinitionen vergleiche man [9].

1. Bezeichnungen und Definitionen (vgl. [10])

Ein *endlicher Automat* a ist ein 5-tupel $a = \big(I(a), O(a), S(a), \delta_a, \lambda_a\big)$, wobei die $j(a)$ endliche Mengen für $j = I, O, S$ und

$$\delta_a\colon I(a) \times S(a) \to S(a) \ \&\ \lambda_a\colon I(a) \times S(a) \to O(a)$$

Abbildungen sind.

Wir wollen im folgenden stets annehmen, daß λ_a surjektiv ist, daß also keine überflüssigen Ausgabesymbole existieren.

Wir setzen δ_a und λ_a auf $I(a)^* \times S(a)$ fort gemäß den Formeln

i) $\quad \lambda_a(wv, s) = \lambda_a(w, s), \lambda_a\big(v, \delta_a(w, s)\big)$

ii) $\quad \delta_a(wv, s) = \delta_a\big(v, \delta_a(w, s)\big)$

für $w, v \in I(a)^*$ und $s \in S(a)$. Dabei ist $I(a)^*$ das freie Monoid über $I(a)$.

Seien a und a' zwei Automaten. Ein Tripel $\varphi = (\varphi_I, \varphi_O, \varphi_S)$ von Abbildungen

$$\varphi_j\colon j(a) \to j(a') \ (j = I, O, S)$$

heißt *Homomorphismus*, (in Zeichen $\varphi\colon a \to a'$), falls die Diagramme

$$\text{(H 1)} \quad \begin{array}{ccccc} I(a) & \times & S(a) & \xrightarrow{\delta_a} & S(a) \\ {\scriptstyle\varphi_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_S} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_S} \\ I(a') & \times & S(a') & \xrightarrow[\delta_{a'}]{} & S(a') \end{array}$$

und

$$\text{(H2)}\quad \begin{array}{ccc} I(a) \times S(a) & \xrightarrow{\lambda_a} & O(a) \\ {\scriptstyle\varphi_I}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle\varphi_S} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_O} \\ I(a') \times S(a') & \xrightarrow[\lambda_{a'}]{} & O(a') \end{array}$$

kommutativ sind.

Falls nur (H1) kommutativ ist, sprechen wir von δ-*Homomorphie* (in Zeichen: $\varphi\colon a \overset{\delta}{\to} a'$). *Monomorphismen* ($a \leqq a'$ oder $a \underset{\varphi}{\leqq} a'$), *Epimorphismen* und *Isomorphismen* ($a \mathrel{\hat{=}} a'$ oder $a \underset{\varphi}{\mathrel{\hat{=}}} a'$) werden wie üblich definiert. Sind φ_I und φ_O Identitäten, so sprechen wir von *S-Homomorphismen*, entsprechend von (I, S)-*Homomorphismen*, etc. S-Epimorphismen heißen *Reduktionen.*

Die Konzepte übertragen sich soweit sinnvoll auf δ-Homomorphismen. Insbesondere schreiben wir

$$„a \overset{(\delta)}{\mathrel{\hat{=}}} a'\text{“} \quad \text{und} \quad „a \overset{(\delta)}{\leqq} a'\text{“}\,.$$

Unterautomaten und δ-*Unterautomaten* sind wie üblich definiert. Wir schreiben „$a \subseteq a'$“ und „$a \overset{(\delta)}{\subseteq} a'$“.

Seien a und a' Automaten mit $I(a) = I(a')$, $O(a) = O(a')$, seien ferner $s \in S(a)$ & & $s' \in S(a')$, s und s' sind *äquivalent* (in Zeichen: $s \sim s'$), falls

$$\lambda_a(w, s) = \lambda_{a'}(w, s')$$

für alle $w \in I(a)^*$ gilt.

Die Menge

$$F(a) = \{\lambda_a^s \mid \lambda_a^s(w) = \lambda_a(w, s),\ s \in S(a),\ w \in I(a)^*\}$$

ist die zu a gehörige *Abbildungsfamilie.*

Zwei Automaten a und a' heißen *funktional äquivalent* (in Zeichen: $a \sim a'$), falls $F(a) = F(a')$ gilt.

Ein Automat a heißt *reduziert,* falls je zwei Zustände inäquivalent sind.

Bekanntermaßen definiert die Äquivalenz von Zuständen eine „S-Kongruenz“ und damit einen Automaten $\mathrm{Red}_S(a)$. Für diesen gilt:

1) Es existiert eine Reduktion $\varrho\colon a \to \mathrm{Red}_S(a)$
2) $a \sim \mathrm{Red}_S(a)$
3) $a \sim a' \Leftrightarrow \mathrm{Red}_S(a) = \mathrm{Red}_S(a')$
4) $\mathrm{Red}_S(a)$ ist reduziert.

Definition 1.1 ([1]). Seien a und a' Automaten. a *simuliert* a' (in Zeichen: a'/a), falls es Abbildungen

$$h_I\colon I(a') \to I(a)\,, \quad h_O\colon O(a) \to O(a')\,, \quad h_S\colon S(a') \to S(a)$$

gibt, so daß für alle $w \in I(a')^*$ und $s \in S(a')$

$$\lambda_{a'}(w, s) = h_O(\lambda_a(h_I(w), h_S(s)))$$

gilt. Dabei sind die homomorphen Fortsetzungen von h_I bzw. h_O wieder mit h_I bzw. h_O bezeichnet.

Eine Simulation erfolgt so, daß alle Rechenarbeit von a' durch a erfolgt und h_I und h_O nur Kodierer und Dekodierer sind.

Abb. 1 veranschaulicht den Begriff der Simulation.

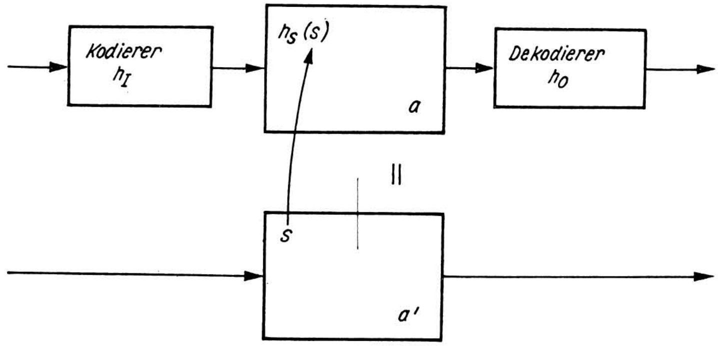

Abb. 1

Ein Tripel h, wie es in der Definition verlangt wird, heißt *Simulation* (in Zeichen: $h: a' \Rrightarrow a$).

Folgende Beobachtung, deren einfachen Beweis wir übergehen, zeigt, daß Simulationen Verallgemeinerungen der δ-Homomorphie sind.

Beobachtung. *Sei $h: a \Rrightarrow a'$ eine Simulation; dann gilt für alle $u, w \in I(a)^*$ und $s \in S(a)$*

$$\lambda_a\big(u, \delta a(w, s)\big) = h_0\big(\lambda_{a'}\big(h_I(u), \delta a'(h_I(w), h_S(s))\big)\big) .$$

Bemerkung. Es gilt stets

1) a/a

2) a/a' & $a'/a'' \Rightarrow a/a''$.

Zwei Automaten a und a' heißen *schwach äquivalent* (in Zeichen: $a \approx a'$), falls a/a' und a'/a gilt.

Bemerkung. Es gilt stets

1) $a \approx a$,

2) $a \approx a'$ & $a' \approx a'' \Rightarrow a \approx a''$,

3) $a \approx a' \Rightarrow a' \approx a$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Angabe zweier Operationen zwischen Automaten und zwei Klassen von Automaten, die wir im folgenden benötigen.

Seien a_1 und a_2 zwei Automaten mit $I(a_1) = I(a_2)$ und $S(a_1) \cap S(a_2) = \varnothing$. Dann definiere $a_1 \oplus a_2$ durch

1) $I(a_1 \oplus a_2) = I(a_1)$,

$O(a_1 \oplus a_2) = O(a_1) \cup O(a_2)$,

$S(a_1 \oplus a_2) = S(a_1) \cup S(a_2)$.

2) $$\delta_{a_1 \oplus a_2}(x, s) \doteq \begin{cases} \delta_{a_1}(x, s) & \text{für } s \in S(a_1) , \\ \delta_{a_2}(x, s) & \text{für } s \in S(a_2) ; \end{cases}$$

$$\lambda_{a_1 \oplus a_2}(x, s) = \begin{cases} \lambda_{a_1}(x, s) & \text{für } s \in S(a_1) , \\ \lambda_{a_2}(s, s) & \text{für } s \in S(a_2) \end{cases}$$

$\big(x \in I(a)\big)$.

Für die zweite Operation setzen wir nun voraus $I(a_1) = I(a_2)$. Dann definiere $a_1 \otimes a_2$ durch

1) $I(a_1 \otimes a_2) = I(a_1)$, $S(a_1 \otimes a_2) = S(a_1) \times S(a_2)$,
$O(a_1 \otimes a_2) = O(a_1) \times O(a_2)$

2) $\delta_{a_1 \otimes a_2}(x, s_1, s_2) = \big(\delta_{a_1}(x, s_1), \delta_{a_2}(x, s_2)\big)$,
$\lambda_{a_1 \otimes a_2}(x, s_1, s_2) = \big(\lambda_{a_1}(x, s_1), \lambda_{a_2}(x, s_2)\big)$
$\big(x \in I(a_1), s_1 \in S(a_1) \ \& \ s_2 \in S(a_2)\big)$.

Sei X eine Menge. Betrachte ein Symbol \$. Definiere den *Punktautomaten* 1_X durch

1) $I(1_X) = X$, $S(1_X) = \$$, $O(1_X) = \$$

2) $\delta_{1_X}(x, \$) = \lambda_{1_X}(x, \$) = \$ \ (x \in X)$.

Wir nennen einen Automaten a *zyklisch*, falls gilt: Es existiert ein $s \in S(a)$ mit $\delta_a\big(I(a)^*, s\big) = S(a)$.

2. Simulationen und schwache Äquivalenz von Automaten

Wir wollen Simulationen und schwache Äquivalenz von Automaten charakterisieren. Insbesondere wollen wir einen Zerlegungssatz herleiten. Hierzu benötigen wir das Konzept des *vollreduzierten Automaten* ([12], [13]).

Ein reduzierter Automat heißt *vollreduziert*, falls aus $\delta_a(x, s) = \delta_a(x', s) \ \& \ \lambda_a(x, s) = \lambda_a(x', s)$ für alle $s \in S(a)$ stets folgt: $x = x'$.

Zu jedem Automaten a können wir einen vollreduzierten Automaten $\mathrm{Red}(a)$ in folgender Weise konstruieren. Betrachte die Äquivalenzrelation

$$x \sim x' \Leftrightarrow \forall s \in S(a) \colon \delta_a(x, s) \sim \delta_a(x', s) \ \& \ \lambda_a(x, s) = \lambda_a(x', s) .$$

Dann wird durch

1) $I\big(\mathrm{Red}(a)\big) = I(a)/\sim$, $O\big(\mathrm{Red}(a)\big) = O(a)$, $S\big(\mathrm{Red}(a)\big) = S\big(\mathrm{Red}_S(a)\big)$

2) $\delta_{\mathrm{Red}(a)}([x]_\sim, [s]_\sim) = [\delta_a(x, s)]_\sim \ \& \ \lambda_{\mathrm{Red}(a)}([x]_\sim, [s]_\sim) = \lambda_a(x, s)$

ein vollreduzierter Automat $\mathrm{Red}(a)$ definiert.

Lemma 2.1. *Seien a und a' Automaten; dann gilt:*

(1) $a/a' \Leftrightarrow \mathrm{Red}_S(a)/\mathrm{Red}_S(a') \Leftrightarrow \mathrm{Red}(a)/\mathrm{Red}(a')$;

(2) $a \approx \mathrm{Red}_S(a) \approx \mathrm{Red}(a)$.

Beweis. (1) folgt aus (2). Aus der Existenz der Reduktion $\varrho \colon a \to \mathrm{Red}_S(a)$ und der I-Epimorphismen $\tau \colon \mathrm{Red}_S(a) \to \mathrm{Red}(a)$ folgt $a/\mathrm{Red}_S(a)$ und $\mathrm{Red}_S(a)/\mathrm{Red}(a)$.

Wir haben zu zeigen:

$\mathrm{Red}(a)/a$. Sei $\varrho_v \colon a \to \mathrm{Red}(a)$ der kanonische (I, S)-Epimorphismus. Wähle h_I und h_S rechtsinvers zu $(\varrho_v)_I$ bzw. $(\varrho_v)_S$ und $h_O = 1_{O(a)}$. Dann gilt stets für $x \in I\big(\mathrm{Red}(a)\big)$ und $s \in S\big(\mathrm{Red}(a)\big)$:

$$\delta_a\big(h_I(x)\ ,\quad h_S(s)\big) \sim h_S\big(\delta_{\mathrm{Red}(a)}(x, s)\big) .$$

Hieraus folgt aber sofort, daß $h = (h_I, h_S, h_O)$ eine Simulation ist.

Wir können nun die schwache Äquivalenz charakterisieren. Hierzu benötigen wir zwei einfache Lemmata.

Lemma 2.2. *Sei $h \colon a \Rrightarrow a'$ eine Simulation und a vollreduziert, dann sind h_I und h_S injektiv.*

Beweis. 1. „h_S ist injektiv": Sei $h_S(s_1) = h_S(s_2)$ $\big(s_1, s_2 \in S(a)\big)$, dann gilt für alle $w \in I(a)^*$

$$\lambda_a(w, s_1) = h_O\big(\lambda a'(h_I(w), h_S(s_1))\big) = h_O\big(\lambda a'(h_I(w), h_S(s_2))\big) = \lambda_a(w, s_2) .$$

Also gilt: $s_1 \sim s_2$. Da a reduziert, folgt $s_1 = s_2$.

2. „h_I ist injektiv“: Sei $h_I(x_1) = h_I(x_2)$ $(x_1, x_2 \in I(a))$. Dann gilt für alle $s \in S(a)$

$$\lambda_a(x_1, s) = h_O(\lambda a'(h_I(x_1), h_S(s))) = h_O(\lambda a'(h_I(x_2), h_S(s))) = \lambda_a(x_2 s) .$$

Ferner gilt für alle $s \in S(a)$ und $w \in I(a)^*$

$$\begin{aligned}\lambda_a(w, \delta_a(x_1, s)) &= h_O(\lambda a'(h_I(w), \delta_{a'}(h_I(x_1), h_S(s))))\\ &= h_O(\lambda a'(h_I(w), \delta_{a'}(h_I(x_2), h_S(s))))\\ &= \lambda_a(w, \delta_a(x_2, s)) ,\end{aligned}$$

also $\delta_a(x_1, s) \sim \delta_a(x_2, s)$. Hieraus folgt $x_1 = x_2$.

Lemma 2.3. *Sei $h: a \Rrightarrow a'$ eine Simulation, sei a ferner vollreduziert. Dann ist (h_I, h_S) ein δ-Homomorphismus, falls gilt:*

$$\delta a(h_I(I(a)^*) , \quad h_S(S(a))) \subseteqq h_S(S(a)) .$$

Beweis. Seien $x \in I(a)$ und $s \in S(a)$. Wähle s' so, daß gilt: $h_S(s') = \delta_{a'}(h_I(x), h_S(s))$. Dann gilt für alle $w \in I(a)^*$

$$\begin{aligned}\lambda_a(w, s') &= h_O(\lambda a(h_I(w), h_S(s'))) =\\ &= h_O(\lambda a(h_I(w), \delta_{a'}(h_I(x), h_S(s)))) =\\ &= \lambda_a(w, \delta_a(x, s)) .\end{aligned}$$

Also folgt: $s' \sim \delta_a(x, s)$. Hieraus folgt aber die Behauptung.

Theorem 2.1. *Seien a und a' Automaten; dann sind folgende Aussagen äquivalent:-*
1) $a \approx a'$
2) $\mathrm{Red}(a) \triangleq \mathrm{Red}(a')$.

Beweis. Wir haben zu zeigen: 1) $\Rightarrow$ 2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß a und a' vollreduziert sind. Sind dann $h: a \Rrightarrow a'$ und $h': a' \Rrightarrow a$ die zugehörigen Simulationen, so sind nach Lemma 2.2 h_I, h_S, h'_I, h'_S injektiv, also bijektiv. Dies bedeutet aber nach Lemma 2.3: (h_I, h_S) ist ein δ-Isomorphismus. Es verbleibt zu zeigen, daß h_O und h'_O surjektiv sind. Hieraus folgt h_O ist bijektiv und (h_I, h_S, h_O^{-1}) ist ein Isomorphismus. Sei $y = O(a)$, dann existiert $x \in I(a)$ und $s \in S(a)$ mit

$$y = \lambda_a(x, s) = h_O(\lambda a'(h_I(x), h_S(s))) .$$

Dies beweist aber die Surjektivität von h_O. Entsprechend folgt die Surjektivität von h'_O. Damit ist alles bewiesen.

Korollar. *Es gilt*

$$a \sim a' \Rightarrow a \approx a' .$$

Wir geben eine weitere Charakterisierung von Simulationen. Wir nennen einen Automaten a *ausgabefrei*, falls $\lambda_a(x, s) = (x, s)$ gilt $(x \in I(a), s \in S(a))$.

Lemma 2.4. *Sei a ein vollreduzierter und a' ein ausgabefreier Automat, dann simuliert a' genau dann a, wenn es ein Paar (h_I, h_S) von injektiven Abbildungen h_j: $j(a) \to j(a')$ $(j = I, S)$ gibt, so daß für alle $w, w' \in I(a)^*$ und $s, s' \in S(a)$ stets gilt:*

$$\delta_{a'}(h_I(w), h_S(s)) = \delta_{a'}(h_I(w'), h_S(s')) \Rightarrow \delta_a(w, s) = \delta_a(w', s') .$$

Beweis. ($\Rightarrow$). Sei $h: a \Rrightarrow a'$ eine zugehörige Simulation. Dann gilt für alle $u \in I(a)^*$

$$\begin{aligned}\lambda_a(u, \delta_a(w, s)) &= h_O(\lambda_{a'}(h_I(u), \delta a'(h_I(w), h_S(s))))\\ &= h_O(\lambda_{a'}(h_I(u), \delta_{a'}(h_I(w), h_S(s))))\\ &= \lambda_a(u, \delta_a(w's')) .\end{aligned}$$

Also folgt mit der Vollreduziertheit von a

$$\delta_a(w, s) = \delta_a(w', s') .$$

($\Leftarrow$). Definiere $h_O \colon O(a') \to O(a)$ durch

$$h_O(x, s) = \begin{cases} \lambda_a(x', \delta_a(w, s')) , & \text{falls } x = h_I(x') \text{ und} \\ & s = \delta_{a'}(h_I(w), h_S(s')) , \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

$(x \in I(a'), s \in S(a'))$. Nach Voraussetzung ist h_O wohldefiniert. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt nun, daß (h_I, h_O, h_S) eine Simulation ist.

Wir ziehen einige Folgerungen.

Korollar 1. $a \overset{(\delta)}{\leqq} a' \Rightarrow a/a'$.

Bezeichnung. $\delta_a^w(s) = \delta_a(w, s)$ $(w \in I(a)^*, s \in S(a))$.

Korollar 2. *Ist $h \colon a \Rrightarrow a'$ eine Simulation und a vollreduziert, so gilt:*

$$\delta_a^{h_I(w)} = \delta_a^{h_I(w')} \Rightarrow \delta_a^w = \delta_a^{w'} .$$

Durch dieses Korollar gewinnen wir Anschluß an die Teilbarkeitstheorie von Halbgruppen [1]. Wir verallgemeinern geringfügig.

Ein Paar $[M, I]$ ist eine *Halbgruppe mit Generatornamen*, falls M eine Halbgruppe und I eine Menge ist, wobei es eine Namensfunktion $\beta \colon I \to M$ gibt, so daß $\beta(I)$ die Halbgruppe M erzeugt.

Wir schreiben: $[M_1, I_1]/[M_2, I_2]$ falls es ein Paar $[M_3, I_3]$ gibt mit

1) $[M_3, I_3]$ ist eine Halbgruppe mit Generatornamen
2) M_3 ist Unterhalbgruppe von M_2
3) Es gibt einen Halbgruppenepimorphisuus

$$h_1 \colon M_3 \to M_1$$

4) $I_3 \subseteqq I_2$
5) Es gibt eine Bijektion $h_2 \colon I_3 \to I_1$ mit

$$\beta_1 h_2(x) = h_1 \beta_2(x) \qquad (x \in I_3),$$

wobei β_1, β_2 zugehörige Namensfunktionen sind.

Zu einem Automaten a können wir in natürlicher Weise eine Halbgruppe mit Generatornamen in folgender Weise definieren.

Sei

$$M(a) = \{\delta_a^w \mid w \in I(a)^*\}$$

die Transitionshalbgruppe von a, dann ist $[M(a), I(a)]$ mit der Namensfunktion $\beta(x) = \delta_a^x$ ein derartiges Paar.

Korollar 3. *Ist $h \colon a \Rrightarrow a'$ eine Simulation und a vollreduziert, so gilt*

$$[M(a), I(a)]/[M(a'), I(a')] .$$

Wir vertiefen den Zusammenhang durch folgende Beobachtung.

Sei $[H, I]$ eine Halbgruppe mit Generatornamen und Namensfunktion β. Definiere $a[H, I]$ ausgabefrei durch

1) $I(a[H, I]) = I,\ S(a[H, I]) = H$
2) $\delta_{a[H,I]}(i, h) = h\beta(i) \qquad (i \in I, h \in H)$.

Beobachtung.

1) $[H_1, I_1]/[H_2, I_2] \Rightarrow a[H_1, I_1]/a[H_2, I_2]$.

2) a/a' & a vollreduziert $\Rightarrow a[M(a), I(a)]/a[M(a'), I(a')]$.

3) a zyklisch $\Rightarrow a/a[M(a), I(a)]$.

Wir geben eine weitere Charakterisierung der Simulierbarkeit mit Hilfe der δ-Homomorphie.

Lemma 2.5. *Seien a und a' Automaten; dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt ein Paar (h_I, h_S) von injektiven Abbildungen $h_j\colon j(a) \to j(a')$ $(j = I, S)$ mit* $\delta_{a'}(h_I(w), h_S(s)) = \delta_{a'}(h_I(w'), h_S(s')) \Rightarrow \delta_a(w, s) = \delta_a(w', s')$ $(w, w' \in I(a)^*,\ s, s' \in S(a))$

(2) *Es gibt einen Automaten a'', einen δ-Monomorphismus $\varkappa\colon a'' \overset{(\delta)}{\to} a'$ und einen (I, S)-Epimorphismus $\varphi\colon a'' \to a$ mit φ_I bijektiv.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1). Definiere h_I und h_S durch $h_I = \varkappa_I\varphi_I^{-1}$ und $h_S = \varkappa_S\varrho$, wobei ϱ rechtsinvers zu φ_S ist; dann ergibt sich sofort die in (1) geforderte Eigenschaft.

(1) $\Rightarrow$ (2). Definiere a'' durch

1) $I(a'') = h_I(I(a))$,

$S(a'') = \{\delta_{a'}(h_I(w), h_S(s)) \mid s \in S(a),\ w \in I(a)^*\}$, $O(a'') = O(a)$;

2) $\delta_{a''}(h_I(x), s') = \delta_{a'}(h_I(x), s')$,

$\lambda_{a''}(h_I(x), s') = \lambda a(x, \delta_a(w, s'))$ mit $s' = \delta_{a'}(h_I(w), h_S(s))$

$(x \in I(a),\ s' \in S(a''))$.

Nach Voraussetzung ist a'' wohldefiniert, und es gilt $a'' \overset{(\delta)}{\leqq} a'$. Dann definiere $\varphi\colon a'' \to a$ durch

$$\varphi_I(x') = h_I^{-1}(x') \quad (x' \in I(a''))$$

und

$$\varphi_S(s') = \delta_a(w, s), \quad \text{falls } s' = \delta_{a'}(h_I(w), h_S(s)) \quad (s' \in S(a'')) .$$

Man erkennt sofort, daß φ wohldefiniert ist. — Nun folgt die Behauptung, indem man die Homomorphieeigenschaft nachrechnet.

Wir zeigen nun ein Zerlegungstheorem:

Theorem 2.2. *Zu jedem Automaten a existieren zyklische ausgabefreie Automaten $a_1, \dots, a_k$ mit*

1) $a/(a_1 \oplus 1_{I(a)}) \otimes \cdots \otimes (a_k \oplus 1_{I(a)})$

2) $[M(a_i), I(a)]/[M(a), I(a)]$ *für alle* $1 \leqq i \leqq k$.

Beweis. Eine Teilmenge S' von $S(a)$ heißt Erzeugendensystem von a, falls es zu jedem $s \in S(a)$ ein $s' \in S'$ und $w \in I(a)^*$ mit $\delta_a(w, s') = s$ gibt.

Betrachte ein Erzeugendensystem $S' = \{s_1, \dots, s_k\}$ von a. Definiere nun a_i $(1 \leqq i \leqq k)$ ausgabefrei durch

1) $I(a_i) = I(a)$, $S(a_i) = \{\delta_a(w, s_i) \mid w \in I(a)^*\}$,

2) $\delta_{a_i}(x, s) = \delta_a(x, s)$ $(s \in S(a_i),\ x \in I(a))$.

Da $a_i \overset{(\delta)}{\leqq} a$ für $1 \leqq i \leqq k$ gilt, folgt sofort

$$[M(a_i), I(a)]/[M(a), I(a)] .$$

Ferner sind nach Definition alle a_i zyklisch. Betrachte nun

$$b = (a_1 \oplus 1_{I(a)}) \otimes \cdots \otimes (a_k \oplus 1_{I(a)}) .$$

Sei

$$S'' = \{(\$, \dots, \$, \underset{i}{s}, \$, \dots, \$) \mid s \in S(a_i), 1 \leqq i \leqq k\},$$

dann gilt $\delta_b(I(b), S') \subseteqq S'$. Also definiert S'' einen Unterautomaten b' von b. Definiere nun h_1 durch:

$$h_1(\$, \dots, \$, \underset{i}{s}, \$, \dots, \$) = s \quad (s \in S(a_i), 1 \leqq i \leqq k).$$

Mit $h_2 = 1_{I(a)}$, folgt dann a/b nach Lemma 2.5.

3. Lineare Simulierbarkeit

Wir wenden die im Abschnitt 2 erzielten Resultate auf Realisierungsprobleme für Automaten an.

Definition 3.1 [6]. Sei R ein endlicher Ring mit Einselement. Ein Automat a ist *R-(links-)linear,* falls $j(a)$ unitärer *R-(links)-modul* für $j = I, O, S$ und δ_a und λ_a R-Modulhomomorphismen sind.

Wir studieren verschiedene Realisierungsbegriffe. Hierzu benötigen wir·

Lemma 3.1. *Ist l R-linear, so ist* Red(l) *R-linear.*

Beweis. Bekanntermaßen ist Red$_S(l)$ R-linear [6], also können wir o.B.d.A. annehmen, daß l reduziert ist. Betrachte nun

$$M = \{x \in I(l) \mid x \sim 0\}.$$

Sei nun $\delta_l(x, s) = h_l x + g_l s$ und $\lambda_l(x, s) = f_l x + j_l s$ $(x \in I(l), s \in S(l))$ die übliche Zerlegung von δ_l und λ_l in lineare Abbildungen. Offenbar gilt dann

$$x \sim x' \Leftrightarrow (x - x') \in \text{Kern } h_l \cap \text{Kern } f_l.$$

Nun gilt aber $M = \text{Kern } h_l \cap \text{Kern } f_l$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Lemma 3.2. *Ist l vollreduziert und R-linear, so ist jeder Unterautomat von l vollreduziert.*

Beweis. Sei $a \subseteq l$, dann ist a reduziert [5]. Sei nun $\delta_a(x, s) = \delta_a(x', s)$ und $\lambda_a(x,s) = \lambda_a(x', s)$ für $x, x' \in I(a)$ und alle $s \in S(a)$. Dann gilt (siehe Beweis von Lemma 3.1) $h_l(x) = h_l(x')$ und $f_l(x) = f_l(x')$. Hieraus folgt

$$\delta_l(x, s) = \delta_l(x', s) \quad \text{und} \quad \lambda_l(x, s) = \lambda_l(x', s)$$

für alle $s \in S(l)$. Also $x = x'$, da l vollreduziert.

Theorem 3.1. *Sei a ein Automat; dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *Es existiert a' und l R-linear mit $a \approx a'$ & $a' \leqq l$.*

2) *Es existiert l R-linear mit* Red$(a) \leq l$.

Beweis. Wir haben (1) $\Rightarrow$ (2) zu zeigen. Sei also $a \approx a' \leq l$, l R-linear, gegeben. Betrachte die kanonische Reduktion $\varrho_v \colon l \to \text{Red}(l)$. Dann gilt für $a'' = \varrho_v(a')$: $a' \approx a''$. Nach Lemma 3.2 ist a'' vollreduziert. Also gilt:

$$\text{Red}(a) \triangleq \text{Red}(a') \triangleq \text{Red}(a'') \triangleq a''.$$

Dann folgt mit Lemma 3.1 die Behauptung.

Wir nennen a' eine *I-Erweiterung* von a, falls es einen I-Epimorphismus $\varphi \colon a' \to a$ gibt.

Lemma 3.3. *Sei a' eine I-Erweiterung von a, es möge ferner ein R-linearer Automat l existieren mit $a \leqq l$, dann existiert ein R-linearer Automat l' mit $a' \leq l'$.*

Den einfachen Beweis übergehen wir.

Beachtet man nun, daß $\mathrm{Red}_S(a)$ stets eine I-Erweiterung von $\mathrm{Red}(a)$ ist, so erhalten wir das

Korollar. *Sei a ein Automat; dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Es existiert a' und l R-linear mit*

$$a \sim a' \;\&\; a' \leq l .$$

(2) *Es existiert a' und l R-linear mit*

$$a \approx a' \;\&\; a' \leq l .$$

Beweis. Nach dem Satz von Gill [5], ist (1) äquivalent zu:

„Es existiert l R-linear mit $\mathrm{Red}_S(a) \leq l$."

Hieraus folgt mit Theorem 3.1 die Behauptung.

Theorem 3.2. *Sei a ein Automat; dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Es existieren a' und l R-linear mit $a \sim a' \;\&\; a' \stackrel{(\delta)}{\leq} l$.*

(2) *Es existieren a' und l R-linear mit $a \sim a' \;\&\; a' \stackrel{(\delta)}{\leq} l$.*

(3) *Es existiert l R-linear mit a/l.*

Beweis. Es genügt, (3) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß l ausgabefrei und a vollreduziert ist. Dann existieren nach Lemma 2.4 injektive Abbildungen h_I und h_S mit

$$\delta_l(h_I(w), h_S(s)) = \delta_l(h_I(w'), h_S(s')) \Rightarrow \delta_a(w, s) = \delta_a(w', s')$$

für alle $w, w' \in I(a)^*$ und $s, s' \in S(a)$.

Unter Benutzung der Tatsache, daß $\mathrm{Red}_S(a)$ I-Erweiterung von $\mathrm{Red}(a)$ ist, folgt mit Lemma 2.5 die Behauptung.

Wir studieren ein Beispiel, das zeigt, daß die Realisierungsbegriffe aus Theorem 3.2 allgemeiner als die aus Theorem 3.1 sind. Dazu betrachten wir die Zustandsgraphen aus Abb. 2.

a_0 ist vollreduziert, aber es gibt keinen endlichen Ring R und R-linearen Automaten l mit $a_0 \stackrel{(\delta)}{\leq} l$ (vgl. [7] und [13]). Nun gilt aber $a_0 \sim a_1$.

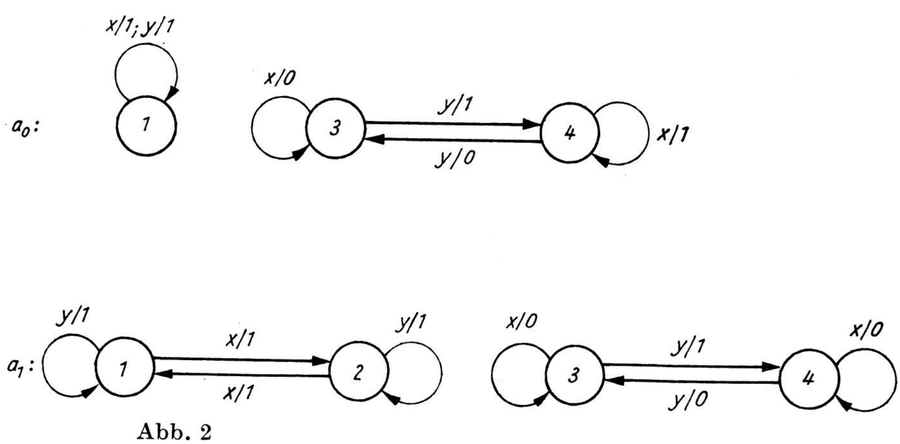

Abb. 2

Bestimmt man andererseits l ausgabefrei durch $I(l) = \mathsf{Z}_2$, $S(l) = \mathsf{Z}_2^2$ und

$$\delta_l\left(x, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z_2 \\ x + z_1 \end{pmatrix} \quad (x, z_1, z_2 \in \mathsf{Z}_2)$$

so gilt: $a_1 \overset{(\delta)}{\triangleq} l$.

Wir untersuchen nun die Frage, wie sich die Automaten a charakterisieren lassen, zu denen es ein l R-linear mit a/l gibt. Hierzu verwenden wir die in Lemma 2.4 und 2.5 gegebene Charakterisierung.

Wir stellen zunächst einige einfache Beobachtungen zusammen.

Beobachtung 1. *Seien a_1 und a_2 Automaten, zu denen es l_1 und l_2 R-linear gibt mit a_1/l_1 und a_2/l_2, dann existieren l und l' R-linear mit*

$$a_1 \oplus a_2/l \quad \text{und} \quad a_1 \otimes a_2/l' ,$$

sofern die Operationen definiert sind.

Den einfachen Beweis übergehen wir und vermerken

Beobachtung 2. *Zu jedem Punktautomaten 1_X existiert ein l R-linear mit $1_X/l$.*

Ferner gilt

Beobachtung 3. *Ist a ein Automat, zu dem es l R-linear mit a/l gibt, so gibt es zu jeder I-Erweiterung a' von a ein l' R-linear mit a'/l'.*

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist eine Charakterisierung der Transitionshalbgruppen linearer Automaten. Wir referieren kurz die Ergebnisse (vgl. [3], [4]). Dazu betrachten wir die allgemeine Transitionsformel [6]. Sei also l ein R-linearer Automat. Sei ferner $\delta_l(x, s) = h_l x + g_l s$ die kanonische Zerlegung, dann gilt für alle $w = x_0 \dots x_{i-1}$ mit $x_\lambda \in I(l)$ für $0 \leqq \lambda \leqq i - 1$ und $s \in S(a)$

$$\begin{aligned} \delta_l(w, s) &= \sum_{\lambda=0}^{i-1} g_l^{i-\lambda-1} h_l x_\lambda + g_l^i s = \\ &= \delta_l(0, w) + g_l^i s . \end{aligned}$$

Sei nun H die zyklische Halbgruppe

$$H = \{g_l, g_l^2, \dots\}$$

und

$$S = S(l)$$

die abelsche Gruppe der Zustände.

Wir wollen zeigen, daß $M(l)$ im wesentlichen ein semidirektes Produkt von H und S ist. Hierzu definieren wir: Seien H_1 und H_2 zwei Halbgruppen, $\mu\colon H_2 \to \operatorname{Endo}(H_1)$ ein Halbgruppenhomomorphismus in die Endomorphismenhalbgruppe von H_1. Dann ist $H_1 \underset{\mu}{\times} H_2$ definiert durch

$$(h_1, h_2) \cdot (h_1', h_2') = (h_1 \mu(h_2)(h_1'), h_2 h_2') \; (h_1, h_1' \in H_1, h_2, h_2' \in H_2) .$$

$H_1 \underset{\mu}{\times} H_2$ ist wieder eine Halbgruppe, das *semidirekte Produkt* von H_1 und H_2 mit dem *Verbindungshomomorphismus* μ.

Bezeichnung. Ist H eine Halbgruppe, so ist H^{rev} definiert durch

$h_1 * h_2 = h_2 \cdot h_1 \quad (h_1, h_2 \in H)$.

Betrachten wir nun wieder l, sowie die Halbgruppen H und S. Definiert man nun

$$\mu\colon H \to \operatorname{Endo}(S)$$

durch

$$\mu(s, g_l^j) = g_l^j(s)$$

und

$$\varphi\colon M(l) \to S \underset{\mu}{\times} H$$

durch

$$\varphi(\delta_l^w) = (\delta_l(0, w), g_l^{L(w)})$$
$$(w \in I(l))^* ,$$

so ist φ ein Antihomomorphismus mit

$$\varphi(\delta_l^x) \in S \underset{\mu}{\times} \{g_l\} \text{ für } x \in I(l) .$$

Beachtet man nun noch die Eigenschaft

„Ist $s \neq 0$, $s \in S$, so gilt: Ordnung$(s)/$char(R)“ ,

so erhalten wir das

Theorem 3.3 (vgl. [4]). *Sei a ein vollreduzierter Automat, zu dem es l R-linear mit a/l gibt, dann gibt es eine zyklische Halbgruppe H, eine abelsche Gruppe S, in der die Ordnung jedes von 0 verschiedenen Elements* char(R) *teilt, einen Verbindungshomomorphismus μ und einen Erzeuger $g \in H$ mit*

$$[M(a), I(a)]/[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}] .$$

Hiervon wollen wir die Umkehrung zeigen. Sei also ein Automat a gegeben, sei ferner S eine abelsche Gruppe mit

(1) Für alle $s \in S$ mit $s \neq 0$ gilt: Ordnung$(s)/$char(R),

H eine zyklische Halbgruppe mit Generator g und μ ein Verbindungshomomorphismus, so daß

(2) $[M(a), I(a)]/[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}]$

gilt.

Wir wollen zunächst die Aufgabenstellung reduzieren. Dazu betrachten wir den Zerlegungssatz Theorem 2.3, d. h., es existieren zyklische, ausgabefreie Automaten $a_1, \dots, a_k$ mit

(3) $a/(a_1 \oplus 1_{I(a)}) \otimes \cdots \otimes (a_k \oplus 1_{I(a)})$

und

(4) $[M(a_i), I(a)]/[M(a), I(a)]$ $(1 \leqq i \leqq k)$.

Nach den vorher angegebenen Beobachtungen, können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß a zyklisch ist. Nun gilt für zyklische Automaten a

(5) $a/a\,[M(a), I(a)]$.

Ferner gilt:

(6) $a[M(a), I(a)]/a[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}]$.

Also genügt es zu zeigen, daß ein l R-linear existiert mit

$$a[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}]/l .$$

Nach einem Satz von Stucky [13] gilt nun:

Seien R und R' zwei endliche Ringe mit $\mathrm{char}(R)/\mathrm{char}(R')$, dann existiert zu jedem l R-linear ein l' R'-linear mit l/l'.

Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen:

(7) $R = \mathbf{Z}_t$ mit $t = \mathrm{kgV}\{\mathrm{Ordnung}(s) \mid s \neq 0,\ s \in S\}$.

Nun gilt:

Lemma 3.4. *Unter den obigen Voraussetzungen existiert ein $\mathbf{Z}_t$-linearer Automat l mit*

$$a[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}]/l .$$

Beweis. Aufgrund der Wahl von t können wir S als $\mathbf{Z}_t$-Modul auffassen. Sei nun $H = \{g, g^2, \dots, g^m\}$ und $1 \leqq j(H) \leqq m$ mit $g^{m+1} = g^{j(H)}$.

Sei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbf{Z}_t^m$ $(1 \leqq i \leqq m)$.

Definiere nun l ausgabefrei durch

1) $I(l) = S, \quad S(l) = S \times \mathbf{Z}_t^m$

2) $$\delta_l\left(s', \begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} s'\mu(g)\ (s) \\ e_{i+1} \end{pmatrix} & \text{für } i < m\,, \\ \begin{pmatrix} s'\mu(g)\ (s) \\ e_{j(H)} \end{pmatrix} & \text{für } i = m \end{cases}$$

$(s, s' \in S,\ 1 \leqq i \leqq m)$. Definiere ferner $h_2\colon S \to S \times \{g\}$ bijektiv durch $h_2(s) = (s, g)$ und

$$h_1\colon \left\{\begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix} \middle|\ s \in S\,, \quad 1 \leqq i \leqq m\right\} \to S \underset{\mu}{\times} H$$

durch

$$h_1\left(\begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}\right) = (s, g^i) \qquad (1 \leqq i \leqq m,\ s \in S)\,.$$

Wir zeigen

$$h_1\left(\delta_l\left(s', \begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}\right)\right) = \delta_{a[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}},\, S \times \{g\}]}\left(h_2(s'), h_1\begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}\right)$$

für alle $s \in S$ und $1 \leqq i \leqq m$. Hieraus folgt dann die Behauptung.

1. Fall. $i < m$:

$$h_1\left(\delta_l\left(s', \begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}\right)\right) = h_1\begin{pmatrix} s'\mu(g)\ (s) \\ e_{i+1} \end{pmatrix} = \left(s'\mu(g)\ (s), g^{i+1}\right) = (s, g^i) * (s', g) =$$
$$= \delta_{a[(s \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}},\, S \times \{g\}]}\left((s', g), (s, g^i)\right) .$$

Da $(s, g^i) = h_1\begin{pmatrix} s \\ e_i \end{pmatrix}$ und $(s', g) = h_2(s')$ gilt, folgt in diesem Fall die Behauptung.

2. Fall. $i = m$:

$$h_1\left(\delta_l\left(s', \begin{pmatrix} s \\ e_m \end{pmatrix}\right)\right) = h_1\begin{pmatrix} s'\mu(g)\ (s) \\ e_{j(H)} \end{pmatrix} = \left(s'\mu(g)\ (s), g^{j(H)}\right) = \left(s'\mu(g)\ (s), g^{m+1}\right) =$$
$$= (s, g^m) * (s', g) .$$

Nun folgt wie im Fall 1 die Behauptung.

Wir fassen zusammen zum

Theorem 3.4. *Sei a ein Automat, R ein endlicher Ring mit Einselement.*

Es mögen eine abelsche Gruppe S und eine zyklische Halbgruppe H existieren, wobei gilt

(1) *Für alle* $s \neq 0$, $s \in S$ *gilt*: $\mathrm{Ordnung}(s)/\mathrm{char}(R)$

(2) *Es existiert ein Verbindungshomomorphismus* μ *und ein Generator g von H mit*

$$[M(a), I(a)]/[(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}, S \times \{g\}] ,$$

dann gibt es einen R-linearen Automaten l mit a/l.

Wir studieren Beispiele.

Beispiel 1. Betrachte autonome, streng zusammenhängende Permutationsautomaten a. In diesem Fall gilt

$$M(a) \triangleq \mathsf{Z}_k \quad \text{mit } k = \#\,(S(a)) .$$

Betrachte nun Primzahl p mit $p \mid k$, $p^2 \nmid k$. Dann gilt

$$M(a) \triangleq \mathsf{Z}_p \times \mathsf{Z}_{k\,\cdot\,p^{-1}} .$$

In diesem Fall brauchen wir uns um den Erzeuger nicht weiter zu kümmern.

Die Anwendung der Konstruktion aus Theorem 3.4 liefert nun einen linearen Automaten l mit $\dim_{\mathsf{Z}_p} \cdot S(l) = 1 + p^{-1} \cdot k$.

Die einfachste Methode, autonome Automaten linear zu realisieren [13] liefert einen linearen Automaten l' mit $\dim_{\mathsf{Z}_p} \big(S(l')\big) = k$, d. h., das hier besprochene Verfahren ist in einigen Fällen wesentlich günstiger.

Beispiel 2. Betrachte Halbgruppe $H_0 = \{h_1, \dots, h_n\}$ mit $h_i h_j = h_i$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ und $a_{H_0} = a\,[H_0, H_0]$. Sei R Ring mit Einzelelement. Setze nun $S = R^n$ und $H = (g, g^0\}$ mit $g^2 = g$. Dann sei $\mu(g) \equiv 0$.

In $(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}$ betrachte die Unterhalbgruppe

$$G_0 = \{(e_i, g) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{0, g^0)\}) .$$

Dann rechnet man nach:

$$M(a_{H_0}) \triangleq G_0 .$$

Also sind diese Automaten über jedem Ring linear simulierbar.

Beispiel 3. Nach Theorem 3.4 muß notwendig gelten $M(a)/(S \underset{\mu}{\times} H)^{\mathrm{rev}}$ mit S abelsch und H zyklische Halbgruppe. Betrachten wir a_n mit $I(a_n) = \{x, y\}$, $S(a_n) = \{s_1, \dots, s_n\}$,

$$\delta_{a_n}(x, s_i) = s_{i+1} \qquad (1 \leqq i < n-1) ,$$

$$\delta_{a_n}(x, s_{n-1}) = s_1 , \quad \delta_{a_n}(x, s_n) = s_n ,$$

$$\delta_{a_n}(y, s_i) = s_i \qquad (1 \leqq i < n-1) ,$$

$$\delta_{a_n}(y, s_{i-1}) = s_n ,$$

$$\delta_{a_n}(y, s_n) = s_{n-1} ,$$

so gilt $M(a_n) \triangleq \mathfrak{S}_n$ (symmetrische Gruppe der Ordnung n). Für $n \geqq 3$ ist aber die oben erwähnte Relation nicht möglich. Also gilt: a_n ist über keinem Ring linear simulierbar.

Literatur

[1] *Arbib, M. A.*, Algebraic Theory of Machines, Languages and Semi-Groups. Academic Press, New York 1968.

[2] *Arbib, M. A., H. P. Zeiger*, On the Relevance of Abstract Algebra to Control Theory. Automatica **5** (1969), 589–605.

[3] *Ecker, K.*, On the Semi-Group of a Linear Nonsingular Automaton. Math. Systems Theory **6** (1973), 353–358.

[4] *Ecker, K.*, Algebraische Eigenschaften linearer Automaten. Habilitationsschrift, Universität Bonn, 1973.

[5] *Gill, A.*, Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis and Applications. McGraw-Hill, New York 1966.

[6] *Harrison, M. A.*, Lectures on Linear Sequential Machines. Academic Press, New York 1969.

[7] *Hartmanis, J., W. A. Davis*, Homomorphic Images of Linear Sequential Machines, J. Comp. Syst. Sci. **1** (1967).

[8] *Hartmanis, J., H. K.-G. Walter*, Group-theoretic Characterization of Linear Permutation Automata. J. Comp. Syst. Sci. **7** (1973), 168–188.

[9] *Herman, G.*, When is a Sequential Machine the Realization of another. Math. Systems Theory **5** (1971) 2, 115–127.

[10] *Hotz, G., H. K.-G. Walter*, Automatentheorie und formale Sprachen II. Endliche Automaten; BI, Hochschultaschenbücherverlag, Mannheim 1969.

[11] *Krohn, K., J. Rhodes*, Algebraic Theory of Machines. In: Proc. of the Symposion on Mathematical Theory of Automata, New York 1962; Polytechnic Press, Brooklyn 1963.

[12] *Reusch, B.*, Linear and Partial-linear Realizations of Automata. In: Proc. IFIP Congress, Edinburgh 1968, vol. 1; North-Holland, Amsterdam 1969; pp. 308–311.

[13] *Stucky, W.*, Linear realisierbare Automaten. Diss., Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1969.

[14] *Walter, H. K.-G.*, Synchronous Simulations of Sequential Machines. Berichte des mathematischen Instituts und Instituts für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1971, A 71/09.

[15] *Walter, H. K.-G.*, On Semi-Group Theoretical Techniques for the Linear-Realization Problem of Finite Automata. Berichte der Informatikforschungsgruppen des Fachbereichs Informatik der TH Darmstadt, Darmstadt, 1973, Ber. Nr. AFS 5.

[16] *Eichner, L.*, Homomorphe Darstellungen endlicher Automaten in linearen Automaten. EIK **9** (1973) 10, 587–613.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Äquivalenztheorie für endliche Automaten entwickelt, die Simulationen als Vergleichsmethode verwendet. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, halbgruppentheoretische Untersuchungen zur Lösung von Realisierungsproblemen heranzuziehen. In bezug auf lineare Realisierungen endlicher Automaten wird eine vollständige Charakterisierung linear realisierbarer Automaten hergeleitet. Dabei spielen im wesentlichen nur Struktureigenschaften der Transitionshalbgruppe eine Rolle.

Abstract

In this paper we give using simulations an equivalence theory of finite automata. This gives us the possibility to treat realization-problems with semigroup-theoretical methods. With respect to linear realizability of finite automata we derive a complete characterization of those automata which are linearly realizable. We show, that only structural properties of the transition monoid of an automaton determine wether or not the automaton is linearly realizable.

Резюме

В настоящей работе автор развивает теорию эквивалентности для конечных авроматов, которая в качестве метода сравнения использует моделирования. Таким образом получается возможность привлечения исследований в области теории полугрупп для решения проблем реализации. Относительно линейных реализаций конечных автоматов приводится полная характеристика реализуемых линейным образом автоматов. При этом в основном играют роль только свойства группы переходов состояний.

(Eingang: Erste Fassung am 20. 8. 1975,
ergänzte Fassung am 21. 6. 1976)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. H. K.-G. Walter
Fachbereich Informatik der
Technischen Hochschule Darmstadt
Forschungsgruppe Automatentheorie
und formale Sprachen
Magdalenenstr. 11
6100 Darmstadt
BRD