Sonderdruck aus

METHODEN UND VERFAHREN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

Band 10

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT AG
MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

MATHEMATISCHE MODELLE FÜR NEURONENNETZE

HERMANN K.–G. WALTER

0. DAS HARTLINE-RATLIFF'SCHE MODELL FÜR DIE VERSCHALTUNG DER NEURONEN IN DER RETINA VON SÄUGETIEREN UND MÖGLICHE VERALLGEMEINERUNGEN

Das System der Neuronen in der Retina von Säugetieren ist durch ein Schaltungssystem in einer Weise verbunden, daß jedes Neuron auf andere Neuronen wirkt (laterale Interaktion). Diese Wirkung kann sowohl excitatorisch wie auch inhibitorisch sein. Vorwiegend handelt es sich aber um inhibitorische Schaltungen. Hierfür haben K.Hartline und F.Ratliff ein Modell entwickelt, das abgeleitet wurde aus Untersuchungen bei Limulus. Wir erläutern dieses Modell und prüfen es auf mögliche Verallgemeinerungen.

Genaueres findet der Leser im Buch von F.Ratliff, "Mach Bands" [4],

Bekanntermaßen gehört der Sehvorgang zu einem der kompliziertesten Prozesse, die in der Natur ablaufen. Wir verfolgen diesen Prozess nur bis zum retinalen Neuronensystem.

Die physikalische Vorlage wird, nachdem sie das optische System des Auges (Pupille-Glaskörper) passiert hat, in den Sehzellen des Auges aufgenommen. Die ankommenden Reize werden in diesen Sehzellen umgewandelt in Spikes. Die ankommende Information wird dann dargestellt durch Spike-Frequenzen. Nun sind mehrere Sehzellen auf ein Neuron der Retina geschaltet und zwar in der Weise, daß die Frequenzen sich addieren. Innerhalb des Neuronensystems werden dann diese Frequenzen verarbeitet zu neuen Frequenzen.

Gehen wir aus von einer festen Numerierung der Neuronen von 1 bis n, so sei x_i die beim i.Neuron ankommende, und y_i die abgegebene Frequenz.

Der Zusammenhang zwischen den x_i und y_i ist dann nach Hartline-Ratliff gegeben durch folgendes Gleichungssystem

$$y_i = \text{Max}\left(0, x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \text{Max}(0, y_j - S_{ij})\right)$$

$(i=1,\dots,n)$.

Dabei sind die a_{ij} nichtnegative-reelle Zahlen, desgleichen die S_{ij}.

Da a_{ij} regeln, in welcher Weise das j.Neuron auf das i.Neuron einwirkt. Die Bedingung "nichtnegativ" besagt, daß der Schaltungstyp inhibitorisch ist. Die S_{ij} sind Schwellen, die überwunden werden müssen, bevor das j.Neuron überhaupt auf das i.Neuron einwirkt.

Da Frequenzen stets nichtnegativ sind, ergeben sich die Maximumsbildungen in natürlicher Weise.

Bei dieser Darstellung der Verhältnisse in der Retina wurden im wesentlichen drei Vereinfachungen vorgenommen, die im folgenden auch beibehalten werden.

1) Die Vorlagen sind nicht farbig.
2) Der Einfluß möglicher excitatorischer Schaltungen (a_{ii} < O!) wurde unterdrückt.

3) Es wird nur ein derartiges Neuronensystem betrachtet, obwohl in der Realität mehrere solcher Systeme hintereinandergeschaltet sind.

Die Bedeutung dieses Modells liegt einmal in der Möglichkeit, einige optische Effekte wie Mach'sche Linien, Hermanngitter, etc. [4] erklären zu können, zum anderen in der Möglichkeit, derartige Systeme zur Mustererkennung und Kontrastverschärfung zu verwenden [5], [6], [7].

Zwei wesentliche Einwände lassen sich gegen das Hartline-Ratliff'sche Modell erheben

1) Die "lineare Abhängigkeit der Inhibitionswirkung;
2) Die Zeitunabhängigkeit des Gesamtsystems.

In dieser Arbeit gehen wir daran, einige Möglichkeiten aufzuzeigen, wie diesen beiden Mängeln abgeholfen werden kann. Bezüglich des 2.Punktes stützen wir uns auf Arbeiten von Hartline-Ratliff-Müller, sowie von Lange, vgl. [4].

Dabei ist es zweckmäßig, in üblicher Weise das oben angeschriebene Gleichungssystem in Integralgleichungen zu verwandeln. Aus schreibtechnischen Gründen verzichten wir auf die Benutzung der Schwellenelemente. Jedoch ist dies im allgemeinen keine Restriktion der Allgemeinheit.

Dann können wir sofort verallgemeinern zu den Gleichungen

<u>1. Nichtlineare Gleichung</u>

$$y(u,v) = \mathrm{Max}(0, x(u,v) - \int_G K(u,v,s,t)\,\mathrm{Max}(0, y(s,t)))\,ds\,dt$$

$$(u,v) \in G$$

2. Zeitabhängige Gleichung (Lange'scher Typ):

$$y(u,v;\mu) = \mathrm{Max}(0, x(u,v;\mu) -$$

$$-\int_G K\left(u,v,t,s,\mathrm{Max}\left(0,\frac{1}{\tau}\int_0^{\mu} e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}} y(t,s;\mu')\,d\mu'\right)\right)dt\,ds$$

$$(u,v),(t,s)G,\mu \in R$$

Dabei ist $G \subseteq R^2$ der Bereich der Neuronen.
Der Kern $K(u,v,s,t,z)$ erfülle nun folgende Bedingungen:

i) $K(u,v,s,t,z) \geq 0, \; ((u,v) \in G, \; (s,t) \; G, \; z \in R)$

ii) $z \leq z' \Longrightarrow K(u,v,s,t,z) \leq K(u,v,s,t,z')$

$$(z,z' \in R, \; (u,v) \in G, \; (s,t) \in G).$$

i) besagt wieder, daß wir einen inhibitorischen Schaltungstyp vorfinden, ii) besagt, daß die inhibitorische Wirkung um so größer ist, je größer die Anregung des betreffenden Neurons ist.

Diese beiden Bedingungen sind neben einigen anderen, mehr mathematisch technisch bedingten, die wesentlichen Voraussetzungen für die nachfolgenden Untersuchungen.

Die sich hier anschließende Theorie ist angemessen für die Räume $L_p(G)$ $(p>1)$, sowie Orlicz-Räume. Die Bedingungen dafür, wann die Integraloperatoren auf den betreffenden Räumen operieren und wann sie (voll-) stetig sind, entnehme man der einschlägigen Literatur ([2], [3], [8]).

Der "lineare" Fall ist behandelt worden in [9], [7].

1. Die nichtlineare Gleichung

Nach dem oben Gesagten haben wir es also mit folgender Situation zu tun.

Sei E ein Banachraum mit Kegel K.

‚<' sei die durch K gegebene Ordnung.

Wir setzen voraus

i) K ist minihedral, d.h. zu $x,y \in E$ existiert ein Supremum, $\mathrm{Sup}(x,y)$. Das Infimum sei dann $\mathrm{Inf}(x,y)$.

Ist $x \in E$, so setzen wir $\mathrm{pos}(x) = \mathrm{Sup}(0,x)$, $|x| = \mathrm{Sup}(x,-x)$. Wir verzichten darauf, einen Katalog der Relationen und Ungleichungen, die zwischen x, $\mathrm{pos}(x)$ und $|x|$ gelten, anzugeben. Ein solcher Katalog findet sich in [10].

Gegeben ist nun ein Operator $A:E \longrightarrow E$ und die Operatorgleichung

$$(0) \qquad y = \mathrm{pos}(x - A\ \mathrm{pos}\ y). \qquad (x,y \in E)$$

Wir setzen voraus

ii)	$A\,K \subseteq K$	(inhibitorische Schaltung)
iii)	$0 < z < z' \Longrightarrow Az < Az'$	(Monotonie der inhibitorischen Wirkung)

Diese Voraussetzungen gelten generell für das nachfolgende. Wir werden sie daher nicht immer ausdrücklich erwähnen.

Eine Problemvereinfachung ergibt sich aus der Behandlung der "äquivalenten" Gleichung

$$(0^*) \qquad y^* = x - A\ \mathrm{pos}(y^*).$$

Genauer ist y Lösung von (0), so ist $x - A\ \mathrm{pos}\ y$ Lösung von (0^*). Ferner ist (0) dann eindeutig lösbar, falls (0^*) es ist.

Wir wenden uns zunächst Fragen zu, die die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (O) bzw. (O*) betreffen.
Sei $x \in E$ fest. Zu x assoziieren wir

$$A_x z = x - A \text{ pos } Z \qquad (z \in E)$$

Wir wollen den Schauder'schen Fixpunktsatz heranziehen. Dazu benötigen wir neben den üblichen Voraussetzungen die Stetigkeit von pos. Dies sichern wir durch folgende Bedingung.

Es existiert $k > 0$, so daß für alle $x, y \in E$ aus

$$|x| < |y| \quad \text{folgt} \quad \|x\| \leqslant k\|y\| .$$

In einem solchen Fall nennen wir den Kegel *streng normal*. Jeder streng normale Kegel ist normal. Im endlich-dimensionalen Fall folgt aus der Normalität von K die strenge Normalität.
Nun gilt

Satz 1.1. Die Operatorgleichung

$$y = x - A \text{ pos } y$$

besitzt eine Lösung, falls K streng normal und A vollstetig ist.

Beweis. Da A pos $z > 0$ für alle $z \in E$, so gilt

$$A_x z < x.$$

Da A monoton auf dem Kegel K ist, ist A_x auf E antiton. Man erhält dann für alle z mit $z < x$

$$A_x x < A_x z < x.$$

Hieraus folgt sofort, daß A_x das Segment $[A_x x, x]$ invariant läßt.
Da K streng normal ist, gilt wegen

$$|\mathrm{pos}\ y - \mathrm{pos}\ y'| < |y-y'| \quad (y, y' \in E),$$

daß pos stetig ist.
Dann ist aber A_x vollstetig.
Damit haben wir die Voraussetzung des Schauder'schen Fixpunktsatzes erreicht und erhalten die Behauptung.

Man kann wie üblich auch mit der schwachen Topologie arbeiten und den Fixpunktsatz von Tychonow-Schauder zur Anwendung bringen. Die Voraussetzungen des Satzes 1.1 erscheinen zu stark. Wir wollen daher ein genaueres Resultat herleiten, wobei wir konsoquent die Antitonie von A_x ausnutzen. Man zeigt sofort

i) $A_x x < x$

ii) $A_x x < A_x^3 x$

iii) $A_x^2 x < x$.

Da A_x antiton ist, ist für alle $s > 0$ A_x^{2s} isoton.
Wir erhalten dann

i) $A_x^{2s+1} x < A_x^{2s} x$

ii) $A_x^{2s+1} x < A_x^{2s+3} x$

iii) $A_x^{2s+2} x < A_x^{2s} x$

für alle $s > 0$.
Hieraus erhalten wir

Hilfssatz 1.1. Ist K regulär, so existieren die Limites

$$\lim_s A_x^{2s+1}x = U_A x$$

und

$$\lim_s A_x^{2s}x = O_A x.$$

Ferner gilt: $\quad U_A x = O_A x.$

Beweis. Die Existenz der Limites folgt nach dem oben Gesagten aus der Regularität von K. Da jeder reguläre Kegel normal ist, erhalten wir mit dem Zwei-Miliz-männer-Lemma die obige Ungleichung.

Hilfssatz 1.2. Ist K regulär, so gilt:

$$U_A x < A_x O_A x < A_x U_A x < O_A x.$$

Beweis. Aus

$$A_x^{2s+1}x < U_A x$$

erhalten wir

$$A_x U_A x < A_x^{2s+2}x.$$

Limesbildung s gegen ∞ liefert (K regulär!).

$$A_x U_A x < O_A x.$$

Entsprechend zeigt man die andere Ungleichung.

<u>*Satz 1.2.*</u> *Ist K regulär, dann sind für alle $x \in E$ folgende Aussagen äquivalent*

i) $U_A x = O_A x$

ii) Jede Iterationsfolge $\left(A_x^k z\right)_0^\infty$ *mit* $z \in E$ *konvergiert.*

<u>Beweis.</u> Daß aus ii) i) folgt, ist trivial. Wir zeigen, daß aus i) ii) folgt.
Sei $z \in E$ beliebig, dann gilt:

i) $A_x z < x$

ii) $A_x x < A_x^2 z.$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, daß z aus dem Segment $[A_x x, x]$ ist. Dann liefert die Anwendung von A_x^{2s} auf die Ungleichungen

$$A_x x < z < x$$

und

$$A_x x < A_x z < x.$$

i) $A_x^{2s+1} x < A_x^{2s} z < A_x^{2s} x$

ii) $A_x^{2s+1} x < A_x^{2s+1} z < A_x^{2s} x \qquad (s > 0)$

Der Übergang s gegen ∞ liefert wegen der Normalität von K nach dem Zwei-Milizmänner-Lemma die Existenz der Limites

$$\lim_s A_x^{2s} z$$

und

$$\lim_s A_x^{2s+1} z$$

und deren Gleichheit.
Hieraus folgt ersichtlich die Behauptung.
Zusammen mit Hilfssatz 1.2 erhalten wir

Korollar. *Ist K regulär und gilt $U_A x = O_A x := I_A x$, dann gelten folgende Aussagen:*

i) $A_x I_A x = I_A x$

ii) $A_x z = z \Longrightarrow z = I_A x$

iii) *Jede Iterationsfolge* $\left(A_x^k z\right)_0^\infty$ *konvergiert gegen* $I_A x$.

Im Falle der Stetigkeit von A können wir jetzt ein recht allgemeines Kriterium für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichung

$$y = x - A \text{ pos } y$$

herleiten.
Ist A stetig, so gilt: $A_x U_A x = O_A x$ und $A_x O_A x = U_A x$.
Hieraus erhalten wir

$$|O_A x - U_A x| = |A \text{ pos } O_A x - A \text{ pos } U_A x|.$$

Dann gilt aber

$$|\text{pos } O_A x - \text{pos } U_A x| < |O_A x - U_A x| = |A \text{ pos } O_A x - A \text{ pos } U_A x|$$

Dies führt dazu, folgende Größe zu betrachten

$$R(A) = \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \operatorname{Sup}\{\lambda>0 \mid \lambda|x-y|<|Ax-Ay|\}.$$

Beachtet man nun

i) $O_A x = U_A x \Longleftrightarrow \text{pos } O_A x = \text{pos } U_A x$

und

ii) $O_A x \neq U_A x \Longrightarrow \operatorname{Sup}\Big\{\lambda>0 \mid \lambda|\text{pos } O_A x - \text{pos } U_A x|$

$$|A \text{ pos } O_A x - A \text{ pos } U_A x|\Big\} \geqslant 1,$$

so erhalten wir

<u>Satz 2.2.</u> *Ist K regulär, A stetig und $R(A)<1$, so gilt für alle $x \in E$: $O_A x = U_A x$.*

Satz 2.2 läßt sich in gewissem Sinne umkehren.

<u>Satz 2.3.</u> *Ist K regulär und gilt für alle $x \in E$ $O_A x = U_A x$, so ist $R(A)<1$.*

<u>Beweis.</u> (indirekt) Im Gegensatz zur Behauptung nehmen wir an, daß $R(A)>1$ ist. Dann gibt es $y,z \in K$ mit

$$\lambda|y-z| < |Ay-Az| \qquad \text{und} \qquad \lambda > 1.$$

Nun gilt:

$$\lambda(\operatorname{Sup}(y,z)-\operatorname{Inf}(y,z)) < |Ay-Az| = \operatorname{Sup}(Ay,Az)-\operatorname{Inf}(Ay,Az).$$

Aus $y<\operatorname{Sup}(y,z)$ und $z<\operatorname{Sup}(y,z)$ erhalten wir wegen der Monotonie von A

$$Ay < A \operatorname{Sup}(y,z) \qquad \text{und} \qquad Az < A \operatorname{Sup}(y,z)$$

also

$$\mathrm{Sup}(Ay, Az) < A\ \mathrm{Sup}(y, z).$$

Entsprechend

$$\mathrm{Inf}(Ay, Az) > A\ \mathrm{Inf}(y, z).$$

Beachtet man nun noch

$$y \neq z \iff \mathrm{Sup}(y, z) \neq \mathrm{Inf}(y, z),$$

so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen:

$$y > z.$$

Da für $\lambda>1$ stets gilt: $|y-z|<\lambda|y-z|$, gilt ferner o.B.d.A. $\lambda=1$.
Betrachte nun $x=y+Az$.
Dann gilt:

$$A_x y = y+Az-Ay < z$$

und

$$A_x z = y.$$

Hieraus folgt für

$$y' > y: \quad A_x y' < z$$

und

$$z' < z: \quad A_x z' > y.$$

Man zeigt nun sofort für alle $s>0$:

i) $A_x^{2s+1} y < z$

ii) $A_x^{2s} y > y$.

Limesbildung s gegen ∞ liefert dann

$$O_A x > y > z > U_A x.$$

Also folgt: $y = z$ (Widerspruch!).

Wir vergleichen $R(A)$ mit den positiven Eigenwerten von A. Sei λ positiver Eigenwert von A, dann existiert $y \in K$, $y>0$ mit

$$Ay = \lambda y.$$

Gilt dann $A0 = 0$, so folgt: $\lambda \leqslant R(A)$.

<u>Beispiel.</u> Sei E endlichdimensional, K der Kegel der nichtnegativen Vektoren und A linear.
Sei dann $r(A)$ der Spektralradius von A. Nach dem bekannten Satz von Perron ist dann $r(A)$ positiver Eigenwert. Also $r(A) \leqslant R(A)$.

Sei nun N eine monotone Vektornorm, lub_N die zugehörige Matrixnorm (K ist normal!), so gilt:

Aus $0<\lambda|x-y|<|A(x-y)|$ $\quad (x,y\in K,\ x\neq y)$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda N(x-y) = \lambda N(|x-y|) &\leqslant N(|A(x-y)|) \\ &= N(A(x-y)) \\ &\leqslant \mathrm{lub}_N(A)\cdot N(x-y). \end{aligned}$$

Also $\lambda \leqslant \mathrm{lub}_N(A)$.

Hieraus erhalten wir

$$R(A) \leqslant \mathrm{lub}_N(A).$$

Dann gilt aber

$$R(A) \leqslant \inf\{\mathrm{lub}_N(A) \mid N \text{ monotone Vektornorm}\}$$
$$= r(A).$$

Insgesamt gilt also:

$$R(A) = r(A).$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen $R(A)$ und den positiven Eigenwerten von A verschärfen.

Nach [2] ist ein Operator A nach oben u_0-beschränkt ($u_0 \in K$, $u_0 \neq 0$), wenn es zu jedem $x \in K$ ($x \neq 0$) eine natürliche Zahl m und ein $\beta > 0$ mit

$$A^m x < \beta u_0$$

gibt.
Nun gilt

<u>*Satz 2.4.*</u> *Sei A ein positiv homogener Operator mit*

$$|Az - Az'| < A|z - z'| \quad (z, z' \in K).$$

Ist dann A nach oben u_0-beschränkt und gilt $Au_0 = \lambda_0 u_0$, so erhalten wir: $\lambda_0 = R(A)$.

Wir haben zu zeigen: $R(A) \leqslant \lambda_0$.
Aus $\lambda|z-z'| < |Az-Az'| < A|z-z'|$ für $z, z' \in K$ und $A0=0$ (positive Homogenität von A) erhalten wir:

$$R(A) = \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq 0}} \operatorname{Sup}\{\lambda > 0 | \lambda y < Ay\}.$$

O.E.d.A. können wir annehmen: $R(A) > 0$.
Sei $y \in K$, $y \neq 0$ und es gelte $Ay > \lambda y$ mit $\lambda > 0$.
Dann existieren $m > 1$ und $\beta > 0$ mit

$$A^m y < \beta h_0.$$

Aus der Monotonie von A folgt durch Induktion für alle $k > 0$

$$A^k y > \lambda^k y.$$

Hieraus erhalten wir

$$\lambda^m y < A^m y < \beta h_0.$$

Da nun $\beta\lambda^{-m} > 0$ ist, kann man $t_0 > 0$ finden mit

$$h_0 - t_0 y \in K \quad \text{und} \quad h_0 - ty \notin K \quad \text{für} \quad t > t_0.$$

Dann folgt aber

$$\begin{aligned} 0 &< Ah_0 - At_0 y && (A \text{ monoton}) \\ &= \lambda_0 h_0 - t_0 Ay \\ &< \lambda_0 h_0 - \lambda t_0 y \end{aligned}$$

Ist nun $\lambda_0 = 0$, so folgt: $0 < -\lambda t_0 y < 0$, d.h. $y = 0$.
Also ist $\lambda_0 > 0$.
Dann erhalten wir aber

$$0 < \lambda_0 (h_0 - \lambda \lambda_0^{-1} t_0 y).$$

Hieraus folgt: $\lambda\lambda_0^{-1} t_0 \leq t_0$. Also: $\lambda \leq \lambda_0$.
Damit folgt aber: $R(A) \leq \lambda_0$.

Wir wenden uns nun einer kurzen Diskussion der Eigenschaften von $I_A x$ zu.

Hilfssatz 1.3. *Ist A vollstetig, K regulär und streng normal und gilt $R(A)<1$, so ist I_A stetig.*

Beweis. Es konvergiere x_n gegen x. Dann gilt

$$0 \leq \text{pos } I_A x_n \leq |x_n|.$$

Da K regulär ist, folgt: $(\text{pos } I_A x_n)_1^\infty$ ist beschränkt.

Sei z Häufungspunkt von $(A \text{ pos } I_A x_n)_1^\infty$. Dann sei $\left(x_{n_k}\right)$ Teilfolge von (x_n) mit $\lim_k A \text{ pos } I_A x_{n_k} = z$.

Dann folgt:

Es existiert $\lim_k I_A x_{n_k} = y^*$. Für y^* gilt aber

$$y^* = x - A \text{ pos } y^*.$$

Also

$$y^* = I_A x. \qquad (R(A) < 1!)$$

Hieraus folgt $(A \text{ pos } I_A x_n)_1^\infty$ konvergiert gegen $A \text{ pos } I_A x$ (A vollstetig, pos stetig). Also konvergiert $(I_A x_n)$ gegen $I_A x$.

Will man auf die Vollstetigkeit von A verzichten, so kann man anders vorgehen.

Hilfssatz 1.4. *Sei A stetig, $R(A)<1$ und es gelte für alle $z,z' \in K$*

$$|Az-Az'| \leq A|z-z'|.$$

Ferner sei K regulär und streng normal.
Existiert dann $(E-A)^{1}$ und ist monoton auf K, so ist $I_A x$ stetig, falls

$$\operatorname{Sup}\{\lambda \geq 0 \mid \quad \|(E-A)^{-1} z\| \leq \lambda \|z\|, z \in K\} < \infty$$

ist.

<u>Beweis.</u> Man zeigt

$$|I_A x - I_A x'| \leq |x-x'| + A|I_A x - I_A x'|.$$

Hieraus folgt

$$|I_A x - I_A x'| \leq (E-A)^{-1}|x-x'|.$$

Nun folgt die Behauptung direkt aus den weiteren Voraussetzungen.
Bezüglich der Variation des "Parameters" A gilt

<u>*Hilfssatz 1.5.*</u> *Seien A, A' stetig, $R(A)<1, R(A')<1$.*
Es gelte

$$|Az - Az'| \leq A|z-z'| \qquad (z, z' \in K).$$

Sei ferner K regulär.
Existiert dann $(E-A)^{-1}$ und ist monoton auf K, so gilt

$$|I_A x - I_{A'} x| \leq (E-A)^{-1}|A-A'| \operatorname{Sup}(A|x|, A'|x|)$$

für alle $x \in K$.

Beweis.

$$|I_A x - I_{A'} x| = |A \text{ pos } I_A x - A' \text{pos } I_{A'} x|$$
$$\leq A|I_A x - I_{A'} x| + |A\text{pos } I_{A'} x - A'\text{pos } I_{A'} x|$$
$$\leq A|I_A x - I_{A'} x| + |A - A'|(\text{pos } I_{A'} x).$$

Da $|B| = |Bz|$, gilt

$$\text{pos } I_{A'} x \leq |x|$$
$$A \text{ pos } I_{A'} x \leq A|x|$$
$$A' \text{ pos } I_{A'} x \geq 0$$

Hieraus:

$$A \text{ pos } I_{A'} x - A'\text{pos } I_{A'} x \leq A|x| \leq \text{Sup}(A|x|, A'|x|).$$

Analog erhalten wir

$$A'\text{pos } I_{A'} x - A \text{ pos } I_A x \leq A'|x| \leq \text{Sup}(A|x|, A'|x|).$$

Insgesamt folgt dann die Behauptung.

Bemerkung. In einschlägigen Fällen (K streng normal), erhalten wir also Stetigkeit bei Variation des Parameters A. Jedoch ist diese Stetigkeit im Allgemeinen nicht unabhängig von x.

Wir summieren einige weitere Eigenschaften auf, die zwar für die Mustererkennung wichtig sind, deren einfachen Beweis wir aber unterdrücken.

Wir setzen gegnerell voraus: $R(A)<1$, K regulär, A stetig.

Sei $\quad \text{in }(A) = \{z \in K | I_A z \geq 0\}$.

Hilfssatz 1.6.

i) $z, z' \in \text{in }(A)$, $z \neq z' \Longrightarrow I_A z \neq I_A z'$.

ii) Zu jedem $y \in K$ *existiert* $z \in \text{in }(A)$ *mit* $I_A z = y$.

iii) Zu jedem $z \in K$ existiert $z' \varepsilon$ in (A) mit
pos $I_A z = I_A z'$.

iv) $z \leq z' \Longrightarrow I_A z' \nleq I_A z$

v) $z, z' \varepsilon$ in (A): $I_A z \leq I_A z' \Longrightarrow z \leq z'$.

vi) $I_A z \leq |z|$

vii) $I_A z \leq 0 \Longleftrightarrow z \leq 0$

viii) Ist L mit A und pos vertauschbarer Operator auf E, dann ist L mit I_A vertauschbar.

ix) Sei $B \geq 0$, $A = B - E$

$$I_B - E^{(Bx)} = x.$$

Bemerkung.

1. Offenbar unterscheidet ein Inhibitionssystem nur solche Muster, die in (A) liegen. (i), iii)). Andererseits treten alle Muster als Bild auf (ii)).

2. Die Aussage viii) enthält die Tatsache, daß die Verarbeitung gegen bestimmte "Bewegungen" des Gesichtsfeldes invariant ist.

3. Sind optisches System ("Verschmierung" durch Operator B) und Inhibitionssystem so aufeinander abgestimmt, daß $A=B-E$ ist, so gelingt eine völlige Wiederherstellung des ursprünglichen Musters (physikalische Vorlage).

2. Die zeitabhängige Gleichung

Wir wollen eine kurze Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bei der zeitabhängigen Gleichung durchführen.
Dazu gehen wir auf die konkrete Situation zurück. Vorgelegt ist die Gleichung

$$y(t;\mu)=x(t;\mu)-\int_G K\left(t,s,\frac{1}{\tau}\int_0^{\mu}\operatorname{pos}\left(y(s,\mu')e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}}\right)d\mu';\mu\right)ds$$

$$(t\in G,\ \mu\in[0,T])$$

Wir betrachten

$$L_p^{[0,T]}(G)=\{f:[0,T]\longrightarrow L_p(G)\mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

$K_p^{[0,T]}$ sei dann wieder der Kegel der nichtnegativen Funktionen $f\in L_p^{[0,T]}(G)$.

Dieser Kegel ist minihedral und streng normal. Wir untersuchen zunächst den Relaxationsoperator

$$Dy(t;\mu)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\mu}e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}}y(t;\mu')d\mu'.$$

<u>*Hilfssatz 2.1.*</u> *Sei* $p>1$.

i) *D operiert von* $L_p^{[0,T]}(G)$ *in* $L_p^{[0,T]}(G)$.

ii) *D ist linear und stetig.*

iii) $DK_p^{[0,T]}\subseteq K_p^{[0,T]}$

iv) *D ist monoton auf* $K_p^{[0,T]}$.

<u>Beweis.</u> Bis auf Aussage i) ist alles trivial. Sei $\mu\in|0,T|$ fest.

$$\left(\int_G\left|\frac{1}{\tau}\int_0^{\mu}e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}}y(s,\mu')\ \mu'\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq\frac{1}{\tau}\left(\int_G\left(\int_0^T\left(e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}}\right)^{\frac{p}{p-1}}d\mu'\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\int_0^T|y(s,\mu')|^p d\mu'\right)^{1/p}\right)^p ds\right.$$

$$\leq T^{1/p}\,\frac{1}{\tau}\left(\frac{(p-1)\tau}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\|y\| \quad .$$

Nun folgt aber sofort die Stetigkeit von

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\mu} e^{\frac{\mu'-\mu}{\tau}}\, y(s,\mu')\,d\mu'$$

bezüglich μ. Damit ist alles bewiesen.

Wir betrachten

$$\int_G K(t,s,y(s;\mu);ds$$

und setzen voraus

i) $K(t,s,u;\mu)$ ist stetig bezüglich u für alle $\mu\in[0,T], t,s\in G$.

ii) Es gibt $R(t,s;\mu)$ und $\alpha>0$, so daß

1) $K(t,s,\mu;\mu) < R(t,s;\mu)\,|u|^{\alpha+1}$

$$(t,s\in G,\quad \mu\in[0,T],\ u\in R)$$

2) $$\sup_{\mu\in[0,T]} \int_G\int_G R(t,s;\mu)^{\alpha+1}\,ds\,dt < L_0^{\alpha+1} < \infty$$

mit einer geeigneten Konstanten L_0. Für jedes μ gilt dann

$$\int_G K(t,s,y,(s,\mu);\mu)\,ds \in L_{\alpha+1}(G)$$

falls $y(s,\mu)\in L_{\alpha+1}(G)$. [3].

Nun gilt wieder mit der Hölder'schen Ungleichung

$$\|Ay\| < \sup_{\mu\in[0,T]} \left(\iint_{GG} R(t,s;\mu)^{\alpha+1}\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \|y\|^{\alpha} .$$

Wir setzen nun voraus

iii) $K(t,s,u;\mu)$ ist für alle $t,s \in G$ und $u \in \mathbb{R}$ bezüglich μ stetig

und

iv) für alle $t,s \in G$ und $\mu \in [0,T], u,u' \in \mathbb{R}$ gilt $|K(t,s,u;\mu) - K(t,s,u';\mu) \leq K(t,s,|u-u'|;\mu)$.

Hilfssatz 2.2. *Unter den Voraussetzungen i) bis iv) operiert A auf* $L_{\alpha+1}^{[0,T]}(G)$ *und ist stetig.*

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $\alpha=1$.

Satz 2.1. *Sei A gegeben durch*

$$Ay(t,\mu) = \int_G K(t,s,y(s;\mu);\mu)\,ds$$

$$(t \in G, \quad \mu \in [0,T])$$

und erfülle K die Voraussetzungen i) bis iv) mit $\alpha=1$.

Gilt dann

$$\sqrt{\frac{T}{2}} \sup_{\mu\in[0,T]} \left(\iint_{GG} R(t,s;\mu)^{2}\,ds\,dt\right)^{1/2} < 1,$$

so besitzt die Operatorgleichung

$$y = x - A \operatorname{pos} Dy$$

in $L_2^{[0,T]}(G)$ *genau eine Lösung.*

Beweis. Es gilt

$$\|AD \text{ pos } z\| \leq \sup_{\mu \in [0,T]} \left(\iint_{GG} R(t,s;\mu)^2 ds dt \right)^{1/2} \cdot \|\text{pos } Dz\|$$

$$\|D \text{ pos } z\| \leq \| \, |Dz| \, \| = \|Dz\|$$

$$\leq T^{1/2} \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{1/2} \|z\|$$

$$= \sqrt{\frac{T}{2\tau}} \|z\| .$$

Ferner gilt

$$|AD \text{ pos } z - AD \text{ pos } z'|$$

$$\leq A|D \text{ pos } z - D \text{ pos } z'|$$

$$\leq A|D \text{ pos } z - \text{pos } z'|$$

$$\leq AD|z-z'| .$$

Nun folgt mit dem Banach'schen Fixpunktsatz sofort die Behauptung.

Bemerkung. Will man das Alphabet $[0,\infty[$ benutzen, so benötigt man die Bedingung

$$\sup_{T \in [0,\infty[} \sup_{\mu \in [0,\infty[} \left(\iint_{GG} R(t,s;\mu)^2 ds dt \right)^{1/2} \sqrt{\frac{T}{2\tau}} < 1.$$

Man kann für jedes Intervall $[0,T]$ eine Lösung y_T finden. Aus der Eindeutigkeit folgt dann: $T < T'$ impliziert, $y_{T'}$ ist Fortsetzung von y_T.

Hieraus folgt dann die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für das Intervall $[0,\infty[$.

3. Beispiele zur Kontrastverschärfung

Anhand einiger ausgewählter Beispiele, soll die kontrastverschärfende Wirkung von Inhibitionssystemen nachgewiesen werden.

Beispiel I:

Sei $E = \mathbb{R}^n$, K der Kegel der nichtnegativen Vektoren. Betrachte die (n,n)-Matrix

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zu jedem $a > 0$ betrachten wir das durch die Gleichung

$$y = x - (aH) \operatorname{pos} y$$

beschriebene Inhibitionssystem.

Wir nehmen also eine lineare Anordnung der Neuronen an, wobei sich nur direkte Nachbarn beeinflussen.

Unser Eingangsmuster ist ein 0-1 Sprung an der Stelle i. Also

$$x_j = \begin{cases} 1 & j > i \\ & \qquad (1 \leq j \leq n) \\ 0 & j \leq i \end{cases}$$

Wir wollen untersuchen, wann die Sprunghöhe nach der Verarbeitung am größten ist.

Die in Frage kommenden a's müssen die Bedingung

$$f(aH) < 1$$

erfüllen. Nun ist

$$r(H) = 2 \cos \frac{\pi}{n+1} \qquad [1].$$

Gilt dann

$$a < \frac{1}{2} < \left(2 \cos \frac{\pi}{n+1}\right)^{-1},$$

so ist die Bedingung

$$r(aH) < 1$$

erfüllt.
Die "Ziel"-Funktion ist

$$f(z) = z_{i+1} - z_i \qquad (z \in K).$$

Aus der Ungleichung

$$I_{aH}x \leq x$$

entnehmen wir

$$(I_{aH}x)_j \leq 0 \qquad \text{für} \quad j \leq i.$$

Für $j < i$ gilt dann

$$(I_{aH}x)_j = 0.$$

Für $j = i$ gilt dann

$$(I_{aH}x)_i = -a \text{ pos } (I_{aH}x)_{i+1}.$$

Betrachte $(aH)_x x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((aH)_x x)_{i+1} &= 1 - a & (i+1<j<n) \\ ((aH)_x x)_j &= 1 - 2a & \\ ((aH)_x x)_n &= 1 - a . & \end{aligned}$$

Da $a < \frac{1}{2}$ ist, erhalten wir

$$((aH)_x x)_j > 0 \qquad (i+1 \le j \le n).$$

Hieraus folgt

$$(I_{aH}x)_j > 0 \qquad (i+1 \le j \le n).$$

Sei nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n-i} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n - i$$

und

$$y = \begin{pmatrix} (I_{aH}x)_{i+1} \\ \vdots \\ (I_{aH}x)_n \end{pmatrix}$$

so gilt

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} - aH'y.$$

Also

$$y = (E + aH')^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Nun gilt

$$I_{aH}x = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ -ay_1 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-i} \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt

$$f(I_{aH}x) = (1 + a)y_1 .$$

Mit üblichen Methoden (Cramer'sche Regel) errechnet man

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n-i} a^{k-1} 2k \left(\sum_{v=0}^{n-i-k} \binom{n-i-k+1}{2v+1} (4a^2+1)^v \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{v=0}^{n-i} \binom{n-i+1}{2v+1} (4a^2+1)^v \right)^{-1} .$$

Man zeigt

$$y_1'(a) \geq 0 \cdot \text{ in } [0,\tfrac{1}{2}[.$$

Also folgt:

f ist bezüglich a in $[0,\frac{1}{2}[$ monoton wachsend.

Es ergibt sich also folgender Effekt. Je größer a ist, desto besser ist die Kontrastverschärfung (vgl. [7]).

Beispiel II.

Wir diskutieren wieder das Beispiel der Nachbarkopplung. Dieses Mal aber für einen ebenen meßbaren Bereich $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei A gegeben durch

$$Az = \int_G K(t,s,z)\,ds$$

wobei für $K(t,s,z)$ gilt:

Es existieren zu jedem t (meßbare) Mengen U_t, V_t mit $U_t \subseteq V_t$, so daß gilt:

$$K(t,s,z) = \begin{cases} az & , s \in V_t - U_t \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Nun gilt

i) $K(t,s,z)$ ist bei festem (t,s) bezüglich stetig.

ii) $K(t,s,z) < a\ |z|^{2-1}$,

Da $m(G) < \infty$ ist operiert A in diesem Fall auf $L_2(G)$ und ist dort vollstetig, falls G kompakt ist ([2]).

Ferner gilt

iii) $K(t,s,c\cdot z) = c\cdot K(t,s,z)$.

Also ist A positiv homogen.

iv)
$$\left|\int_G K(t,s,z(s))ds - \int_G K(t,s,z'(s))ds\right| =$$

$$= \left|\int_{V_t-U_t} a(z(s)-z'(s))ds\right.$$

$$\leq \left|\int_{V_t-U_t} a|z(s)-z'(s)|ds\right|$$

$$= \int_G K(t,s,|z(s)-z'(s)|)ds.$$

Also: $|Az-Az'| \leq A|z-z'|$.

Wir untersuchen, wann $R(A) < 1$ ist. Aus

$$\lambda z(t) \leq \int_{V_t-U_t} az(s)ds \quad \text{für } z(s) \geq 0$$

und

$$\int_G z(s)ds \neq 0$$

erhalten wir

$$\lambda z(t) \le a \int_G z(s)\,ds.$$

Hieraus folgt

$$\lambda \le a\cdot m(G) \int_G z(s)\,ds \left(\int_G z(t)\,dt\right)^{-1}.$$

Also: $\lambda \le a \cdot m(G)$.
Unsere Bedingung lautet also:

$$a \cdot m(G) < 1.$$

In diesem Fall besitzt also die Gleichung

$$y = x - A \text{ pos } y$$

in $L_2(G)$ stets genau eine Lösung.

Wir sondern nun wieder spezielle Muster aus. Dazu betrachten wir meßbare Mengen $U \subseteq V \subseteq G$ mit

i) $U \subseteq U_t$ für alle $t \in U$

ii) $t \in V_{t'} - U_{t'}$ für alle $t \in U$ und $t' \in V-U$

iii) $V_t - U_t \subseteq V$ $(t \in U)$.

Wir sagen $z \in L_p(G)$ erfüllt die Bedingung $\mathfrak{B}(U,V)$, falls folgendes gilt:

i) $\int_U \text{pos } z(s)\,ds \ge \int_{V-U} \text{pos } z(s)\,ds$

ii) $z(t) \ge z(t')$ für alle $t \in U$ und $t' \in V-U$.

Zu $z \in \mathcal{L}(U,V)$ assoziieren wir

$$\mathcal{m}(z) = m\{t \in V-U \mid A_x z\ t \gtrless 0\}\ .$$

$\mathcal{m}(z)$ gibt also an, in welchem Maße die Neuronen $t \in V-U$ von den anderen Neuronen gehindert werden.
Wir nehmen für die Eingabe $x \in K$ nun an:

$$x \in \mathcal{L}(U,V)\ ,\ \mathcal{m}(x) \geq m(U) > 0.$$

Wir wollen nun zeigen:
Sei $z \leq x, z \in \mathcal{L}(U,V)$, so gilt

i) $A_x z \in \mathcal{L}(U,V)$

ii) $\mathcal{m}(z) \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{m}(z) \geq m(U) > 0.$

Beweis. Es gilt: $t' \in V-U;\ t \in U$

$$\begin{aligned} A_x z(t\ ) &\leq x(t') - a \int \mathrm{pos}\ z(s)ds \\ &\leq x(t) - a \int_{V-U} \mathrm{pos}\ z(s)ds \\ &\leq x(t) - a \int_{V_t - U_t \cap V-U} \mathrm{pos}\ z(s)ds \\ &= A_x z(t). \end{aligned}$$

Wir prüfen die zweite Bedingung nach

$$\int_{V-U} \mathrm{pos}(A_x z(t'))dt' = \int_{V}, A_x z(t')dt'$$

$$= \int_{V'} x(t')dt' - \int_{V'}\int_{G} K(t',s,\mathrm{pos}z(s))dsdt'$$

$$\leq \int_{V-U} x(t')dt' - \int_{V'}\int_{U} K(t',s,\text{pos}\, z(s))ds\,dt'$$

$$- a \iint_{V'(G-U)\cap(V_{t'}-U_{t'})} \text{pos}\ z(s)ds\,dt'$$

$$(V' = \{t' \in V-U \mid A_x z(t') \geq 0\}!)$$

$$\leq \int_U x(t)dt - a\,\mathfrak{m}(z)\int_U \text{pos}\ z(s)ds$$

$$\leq \int_V x(t)dt - a\,\mathfrak{m}(z)\int_{V-U} \text{pos}\ z(s)ds$$

$$\leq \int_U x(t)dt - \mathfrak{m}(z)m(U)^{-1}\int_U \int_{V-U\cap v_t - u_t} K(t,s,\text{pos}\ z(s))ds\,dt$$

$$= \int_U x(t) \ - \mathfrak{m}(z)m(U)^{-1}\int_G K(t,s,\text{pos}\ z(s))ds)dt$$

$$= \int_U x(t) \ + \mathfrak{m}(z)m(U)^{-1}(A_x z(t) - x(t))dt$$

$$= (1 - \mathfrak{m}(z)m(U)^{-1})\int_U x(t) - A_x z(t)dt + \int_U A_x z(t)dt.$$

<u>1. Fall:</u> $\mathfrak{m}(z) = 0$:

Dann gilt

$z(s) \leq 0$ für fast alle $s \in V-U$, d.h.

$$\int_{V-U} \text{pos}\ z(s)ds = 0$$

In diesem Fall ist also nichts zu beweisen.

<u>2. Fall:</u> $\mathfrak{m}(z) > 0$

Für $t \in G$ gilt

$$A_x x(t) \leq A_x z(t).$$

Also

$$\mathfrak{m}(z) \geq \mathfrak{m}(x) \geq m(U)$$

d.h. aber, da $x(t) \geq A_x z(t)$ $(t \in G)$, daß auch in diesem Fall die Bedingung ii) erfüllt ist.

Durch übliche Schlüsse erhalten wir

$$I_A x \in \mathfrak{L}(U,V).$$

Sei nun $z \in \mathfrak{L}(U,V)$. Dann gilt:

$$A_x z(t') - A_x z(t) = x(t') - x(t) -$$

$$- a\int_U \text{pos } z(s)ds - a \int_{G-U \cap V_{t'} - U_{t'}} \text{pos } z(s)ds +$$

$$+ a \int_{V_t - U_t} \text{pos } z(s)ds$$

$$\leq x(t') - x(t) + a\left(\int_{V-U} \text{pos } z(s)ds - \int_U \text{pos } z(s)ds\right)$$

$$\leq x(t') - x(t).$$

Also erhalten wir für $t \in U$, $t' \in V-U$

$$I_A x(t) - I_A x(t') \geq x(t) - x(t')$$

womit wieder die kontrastverschärfende Wirkung des Systems nachgewiesen ist.

Beispiel III:

Wir betrachten den Operator

$$Ay(t) = \int_G K(t,s,y(s))ds.$$

Die Bedingungen dafür, daß A auf $L_p(G)$ operiert und stetig ist, entnehme man [2], [3].

Seien $U \subseteq V \subseteq G$ meßbare Mengen. Wir betrachten Muster x mit 1) $x(t) \geq 0 \quad (t \in V)$

2) $x(t) \leq 0 \quad (t \notin V)$

3) $x(t') \leq x(t) \qquad t \in U,\ t' \in V-U$

Sei z ein Muster, das die Bedingungen 2) und 3) erfüllt. Wir setzen voraus, daß für alle z, die zusätzlich die Bedingung 1) erfüllen, gilt:

$$(*) \qquad Az(t') \geq Az(t) \quad (t' \in V-U,\ z \in U).$$

Wenn z 2) und 3) erfüllt, erfüllt pos z 1), 2) und 3).

Hieraus entnehmen wir

i) $A_x z(t) - A_x z(t') = x(t) - x(t') + A \text{ pos } z(t') - A \text{ pos } z(t)$

$\geq x(t) - x(t') \qquad (t \in U,\quad t' \in V-U)$

ii) $A_x z(t) \leq 0 \quad (t \in V)$.

Also erfüllt $A_x z(t)$ die Bedingungen 2) und 3). Nun schließt man sofort. $I_A x(t)$ erfüllt die Bedingungen 2) und 3). Ferner gilt

$$I_A x(t) - I_A x(t') \geq x(t) - x(t') \quad (t \in U,\ t' \in V-U).$$

Die Voraussetzung (*) bedeutet, daß die Hemmung auf die Neuronen $t' \in V-U$ größer ist, als die auf die Neuronen $t \in U$. Wir erhalten also auch hier eine Kontrastverschärfung. Ein einfaches Beispiel für einen Kern, der (*) erfüllt, ist:

$$K(t,s,u) = \begin{cases} c_1(s,u) & t \in V-U,\ s \in V-U \\ c_2(s,u) & t \in V-U,\ s \in U \\ c_3(s,u) & t \in U\ ,\ s \in V-U \\ c_4(s,u) & t \in U\ ,\ s \in U \end{cases}$$

wobei $0 \leq c_3(s,u) \leq c_1(s,u)$ für $s \in V-U$
und $0 \leq c_4(s,u) \leq c_2(s,u)$ für $s \in U$
$(u \geq 0)$ gilt.

LITERATUR

GANTMACHER, F.R.; M.G.KREIN

[1] Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme.
Akademieverlag Berlin, 1960.

KRASNOSELSKII, M.A.

[2] Positive Solutions of Operator Equations.
P.Noordhoff Ltd., Groningen, 1964.

[3] Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations.
Pergamon Press Ltd., 1964.

RATLIFF, F.

[4] Mach Bands, Quantitative Studies on Neuronal Networks in the Retina.
Holden-Day, San Francisco, 1963.

REICHARDTm W.

[5] Über das optische Auflösungsvermögen der Facettenaugen von Limulus, Kybernetik Bd. I, Heft 2, S. 57-69, 1961.

REICHARDT, W.; G.MCGINITIE

[6] Zur Theorie der lateralen Inhibition. Kybernetik Bd. I, Heft 4, 1962.

V.SEELEN, W.

[7] Informationsverarbeitung in homogenen Netzen von Neuronenmodellen.
Dissertation an der Fakultät für Maschinenwesen der TH Hannover, 1967.

WALTER, W.

[8] Differential- und Integralgleichungen.
Springer-Verlag, Berlin 1964.

WALTER, H.

[9] Inhibitionsfelder.
Acta Informatica, Bd.·1, S.253-269, 1972.

[10] Mathematische Modelle für Neuronennetze.
Berichte des Mathematischen Institut und Instituts für Angewandte Mathematik, Universität des Saarlandes, zweiteilig, 1972, Saarbrücken.

Anschrift:

Prof.Dr.H.K.-G.Walter

Forschungsgruppe Automatentheorie und formale Sprachen
Technische Hochschule Darmstadt
61 Darmstadt, Magdalenenstr. 11

(Eingegangen am 29. Juli 1972).