Acta Informatica 1, 253—269 (1972)

Inhibitionsfelder*

Hermann Walter

Eingegangen am 17. April 1970

Summary. The neurons in the retina of mammals are linked by a system of circuit, such that they influence one another (lateral interaction). The great majority of circuits has got an inhibitory character. F. Ratliff and others have given describing equations for such a system, which by installation of thresholds essentially become non-linear. We shall discuss the characteristics resulting from the describing equations. We are especially interested in the stability characteristics. Naturally, we are mainly interested in the non-linear part of the theory. With respect to stability, we are able to show that stability conditions are the same as with linear systems.

1. Modell des Sehvorgangs. Grundlegende Notationen und Definitionen

1.1. In dieser Arbeit wird ein System vorgestellt, das dem System der reizverarbeitenden Neuronen im Auge des Menschen nachgebildet ist und als Modell dienen soll. Das betrachtete biologische System ist in der Lage, Bilder, die durch das bekannt schlechte optische System des Auges verschmiert sind, in gewissem Maß wiederherzustellen und in einigen Fällen prägnanter wiederzugeben. Die Prägnanz findet ihren Ausdruck in der kontrastverschärfenden Wirkung des Systems. Man muß aber sofort einschränkend sagen, daß die Art und Weise, wie ein Reiz im Auge verarbeitet wird, sicherlich auch Ursache ist für einige der bekannten optischen Täuschungen (Machsche Bänder [Ra]). Wir geben zunächst eine vereinfachte Beschreibung des Sehvorganges.

Der betrachtete Gegenstand wird zunächst durch ein einfaches optisches System (Pupille—Glaskörper) auf die Netzhaut abgebildet. Die dort vorhandenen Sehzellen nehmen die ankommenden Reize auf. Die in den Sehzellen aufgebauten Potentiale induzieren nun in den reizverarbeitenden Neuronen weitere Potentiale. Dabei wirken mehrere, benachbarte Sehzellen auf ein Neuron. In der Neuronenschicht kommt es nun zu einer Interaktion. Jedes Neuron gibt an die übrigen Neuronen Impulse ab, die die dort sich unter dem ankommenden Reiz einstellenden Potentiale abzuschwächen sucht. Die Interaktivität eines Neurons bezieht sich in der Regel nur auf einige, wenige andere Neuronen. Bei dem Gesamtprozeß sind natürlich überall Schwellen eingebaut, die überwunden werden müssen, bevor z.B. ein von einem Neuron an ein anderes abgegebene Impulse zur Wirkung kommen.

* Diese Arbeit enthält unter anderem Ergebnisse der gleichnamigen Dissertation, die an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität des Saarlandes 1969 angenommen wurde.

Die sich infolge dieser Interaktion in den Neuronen unter dem Reiz einstellenden Potentiale werden dann an das Gehirn zur Weiterverarbeitung abgegeben.

Man bezeichnet diesen Prozeß als laterale (Rückwärts-) Inhibition ([Rei]).

1.2. Reichardt hat die laterale Inhibition bei Limulus untersucht und beschreibende Gleichungen hergeleitet [Rei]. Man kann nun davon ausgehen, daß im menschlichen Auge ähnliche Verhältnisse herrschen [Ra], so daß man Gleichungen mit einer Struktur findet, die der bei Limulus entspricht. Wir geben nun kurz die allgemeine Form der beschreibenden Gleichungen an. Dabei geben wir eine möglichst allgemeine (d.h. mit vielen freien Parametern behaftete) Darstellung. Dies geschieht u.a. deswegen, um bei Modellversuchen mit Rechenanlagen zur Simulation des Sehvorganges größtmögliche Beweglichkeit in der Wahl der Parameter zu haben, ohne daß die im folgenden abgeleiteten Sätze ihre Gültigkeit einbüßen. Aus schreib- und rechentechnischen Gründen werden wir andererseits natürlich sobald wie möglich versuchen, normierte Darstellungen zu gewinnen.

Betrachte n Neuronen, die irgendwie im Raum angeordnet und fest numeriert sind. Wir denken uns über den ebenen betrachteten Gegenstand ein Raster gelegt, so daß jedem Rasterpunkt genau ein Neuron entspricht. Von jedem Rasterpunkt gehe ein Reiz x_i $(i=1,\ldots,n)$ aus. Die x_i sind reelle Zahlen, die z.B. gemittelten Intensitäten (oder Grautönen in einer Grauton-Skala) entsprechen. Wir stellen uns vor, daß die x_i bereits durch die Verarbeitung im optischen System des Auges und das „Zusammenschalten" mehrerer Sehzellen auf ein Neuron aus den ursprünglichen Intensitätswerten hervorgegangen sind. Seien dann z_i die an das Gehirn abgegebenen Potentiale in den Neuronen, dann kann man den Zusammenhang zwischen den x_i und den z_i nach [Rei] beschreiben durch ein Gleichungssystem der Form

$$d_{ii} z_i = \operatorname{Max}\Big(c_i, \operatorname{Max}(0, x_i - t_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \operatorname{Max}(0, z_j - s_{ij})\Big) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dabei sind die a_{ij}, s_{ij}, c_i, t_i nichtnegative und die d_{ii} positive reelle Zahlen.

Die Vorstellung ist dabei folgende. c_i ist das Nullniveau des i-ten Neurons, t_i ist eine Schwelle für den Reiz x_i, die s_{ij} sind die Schwellen, die bei der lateralen Interaktion überwunden werden müssen. Die a_{ij} sind Proportionalitätsfaktoren, die die Wirkung des j-ten Neurons auf das i-te Neuron beschreiben. Sie sind die bei der Interaktion interessantesten Größen. Die d_{ii} sind Normierungsfaktoren.

1.3. Wir wollen für die Gleichungen gleich die bequemere Matrixschreibweise einführen. Dabei sind die s_{ij} hinderlich. Da aber die meisten der im folgenden abgeleiteten Resultate für beliebige Wahl der s_{ij} gelten, wollen wir hier — der Übersichtlichkeit halber annehmen, daß gilt:

$$s_i = s_{ij} = s_{ik} \quad \text{für} \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \; j, k \neq i.$$

Wir fassen nun die c_i, t_i, x_i, z_i und s_i zu n-dimensionalen reellen Vektoren C, T,

X, Z und S zusammen, ferner ordnen wir die d_{ii} und a_{ij} in Matrizen D und A an. Dann können wir das in 1.2 angegebene Gleichungssystem in der Form schreiben

$$DZ = \mathrm{Max}\big(C, \mathrm{Max}\,(0, X-T) - A\,\mathrm{Max}\,(0, Z-S)\big).$$ [1]

Es gelten dabei folgende Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} 0 \leqq C \leqq T, S, & \text{(Schwellen!)} \\ 0 \leqq A, D, & \text{(Inhibitorische Interaktion!)} \\ \mathrm{Spur}\,A = 0, & \\ D \text{ Diagonalmatrix mit } \det(D) \neq 0. & \end{array}$$ [2]

Von einigen dieser Nebenbedingungen, insbesondere der ersten, werden wir nicht immer Gebrauch machen. Die Bedingungen über die Matrizen A und D seien jedoch stets erfüllt.

1.4. Da wir im folgenden an einigen Stellen funktional-analytische Methoden benutzen wollen, ist es notwendig, die Inhibitionssysteme mit der Notation von Operatoren zu beschreiben.

Durch die Parameter C, T, S, A, D wird eine Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \{f \mid f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ ist Abbildung}\}$$ [3]

durch die Vorschrift

$$\phi(X)(Y) = D^{-1}\mathrm{Max}\big(C, \mathrm{Max}\,(0, X-T) - A\,\mathrm{Max}\,(0, Y-S)\big)$$

für $X, Y \in \mathbb{R}^n$ definiert.

Die zu einem Eingang „X" gehörigen Ausgänge „Z" sind dann die Fixpunkte von $\phi(X)$.

Wir nennen nun eine so gegebene Abbildung ϕ ein *Inhibitionsfeld* und schreiben kurz, um die zugehörigen Parameter auszuweisen:

$$„\phi\, IF(A, D, C, T, S)“.$$

Die allgemeine Lösung von $\phi(X)(Z) = Z$ bezeichnen wir mit

$$„I(X \mid A, D, C, T, S)“.$$

1.5. Zum Abschluß dieses ersten Abschnittes wollen wir nun kurz die Zielrichtungen der nachfolgenden Untersuchungen von Inhibitionsfeldern angeben. Im einzelnen werden wir folgende Fragestellungen untersuchen:

i) Lösbarkeit der Gleichung $\phi(X)(Z) = Z$.

ii) Struktur der allgemeinen Lösung, funktionale Eigenschaften.

iii) Stabilität der allgemeinen Lösung bei Variation der Parameter.

iv) Innere Stabilität, stabile Lösungen.

---

1 Ist $X \in \mathbb{R}^n$ (vgl. [3]), so bezeichnen wir mit $(X)_i$ für $1 \leqq i \leqq n$ die i-te Komponente von X. Sind dann $X, Y \in \mathbb{R}^n$ (vgl. [3]), so ist $\mathrm{Max}(X, Y)$ definiert durch

$$(\mathrm{Max}(X, Y))_i = \mathrm{Max}\,((X)_i, (Y)_i) \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

2 Sind $X, Y \in \mathbb{R}^n$ (vgl. [3]), so schreiben wir $X \leqq Y$, falls für alle $1 \leqq i \leqq n$ $(X)_i \leqq (Y)_i$ gilt. Eine entsprechende Notation gebrauchen wir bei Matrizen.

3 $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-tupel X von reellen Zahlen.

2. Normierungen, die Hilfsfunktion pos

2.1. Wie schon angekündigt, wollen wir sofort prüfen, welche Normierungen Inhibitionsfelder zulassen. Dabei werden wir die durch

$$\operatorname{pos}(Y) = \operatorname{Max}(0, Y) \qquad (Y \in \mathbb{R}^n)$$

definierte Funktion pos benutzen. Diese Funktion spielt eine zentrale Rolle bei unseren Untersuchungen.

Mit Hilfe der Funktion pos und den Relationen, denen sie genügt, können wir sofort einige Normierungen bei Inhibitionsfeldern vornehmen. Sei also

$$\phi\, IF(A, D, C, T, S),$$

dann gibt es eine Darstellung ($X, Y \in \mathbb{R}^n$)

$$\phi(X)(Y) = \operatorname{pos}\big(D^{-1}(X-(T+C)) - D^{-1}A \operatorname{pos}(Y-S)\big) + D^{-1}C.$$

Wir ordnen ϕ ein Inhibitionsfeld ϕ_n durch die Vorschrift

$$\phi_n(X)(Y) = \operatorname{pos}\big(X - D^{-1}A \operatorname{pos}(Y-(S-D^{-1}C))\big) \quad \text{zu} \quad (X, Y \in \mathbb{R}^n).$$

Wir behaupten nun:

Hilfssatz 2.1.1. Es gilt:

$$I(X|A, D, C, T, S) = I\big(D^{-1}(X-(T+C))|D^{-1}A, E, 0, 0, S-D^{-1}C\big) + D^{-1}C.\ ^4$$

Das Ergebnis dieses Hilfssatzes besagt, daß wir uns bei unseren Untersuchungen auf normierte Inhibitionsfelder beschränken können. Wir nennen ein Inhibitionsfeld ϕ $\big(\phi\, IF(A, D, C, T, S)\big)$ normiert, wenn $C = T = 0$ und $D = E$ ist. Dann schreiben wir auch kurz:

$$„\phi\, nIF(A, S)“.$$

Bemerkung. Eine ganze Reihe der für normierte Inhibitionsfelder im folgenden bewiesenen Sätze lassen sich sofort auf nicht-normierte Inhibitionsfelder umschreiben, wenn nur die Voraussetzung $C \leqq DS$ erfüllt ist, die aufgrund der Bedeutung unserer Größen natürlich ist.

Bei normierten Inhibitionsfeldern ϕ bezeichnen wir analog die allgemeine Lösung mit „$I(X|A, S)$“.

3. Lösbarkeit der Gleichung $\phi(X)(Z) = Z$

3.1. Wir zeigen zunächst, daß für jedes Inhibitionsfeld ϕ die Gleichung $\phi(X)(Z) = Z$ stets lösbar ist. Dann geben wir ein recht einfaches Kriterium für die Eindeutigkeit der Lösung an. Bei den Untersuchungen über die innere Stabilität lernen wir dann weitere Kriterien für die Eindeutigkeit der Lösung kennen. Wegen Hilfssatz 2.1.1 können wir uns bei der Behandlung der beiden Fragen, die hier angeschnitten werden, auf normierte Inhibitionsfelder beschränken.

4 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir

$$M + X = M + \{X\} = \{m + X | m \in M\}.$$

3.2. Es gilt:

Satz 3.2.1. Sei $\phi n IF(A, S)$, dann gilt:

$$I(X|A, S) \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Da $A \geqq 0$ und $\text{pos}(Y) \geqq 0$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$0 \leqq \phi(X)(Y) \leqq \text{pos}(X) \quad \text{für alle} \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Hieraus folgt: Ist

$$N = \{Y \in \mathbb{R}^n | 0 \leqq Y \leqq \text{pos}(X)\},$$

so ist N beschränkt, abgeschlossen und invariant unter $\phi(X)$. Wegen der Stetigkeit affiner Abbildungen und der Stetigkeit von pos, ist $\phi(X)$ stetig für alle $X \in \mathbb{R}^n$.

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz besitzt $\phi(X)$ also für alle $X \in \mathbb{R}^n$ mindestens einen Fixpunkt ([Co]).

Mitbewiesen ist ein einfacher Einschließungssatz

Corollar. Für alle $X \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$0 \leqq I(X|A, S) \leqq \text{pos}(X).$$

Bemerkung. Es ergibt sich also im Muster ein Intensitätsverlust gegenüber dem Eingangsmuster.

3.3. Eindeutigkeit der Lösung von $\phi(X)(Z) = Z$. Es gilt:

Satz 3.3.1. Sei $\phi n IF(A, S)$ und es gelte für den Spektralradius von $A: r(A) < 1$, dann folgt:

$$\# (I(X|A, S)) = 1.$$ [5,6]

Beweis. Seien $X, Y, Y' \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\phi(X)(Y) - \phi(X)(Y')| &= |\text{pos}(X - A\,\text{pos}(Y-S)) - \text{pos}(X - A\,\text{pos}(Y'-S))| \\
&\leqq |X - A\,\text{pos}(Y-S) - X + A\,\text{pos}(Y'-S)| \\
&\leqq A\,|\text{pos}(Y-S) - \text{pos}(Y'-S)| \quad (\text{da } A \geqq 0) \\
&\leqq A\,|Y - S - Y' + S| \\
&= A\,|Y - Y'|.
\end{aligned}$$

Da $r(A) < 1$ ist, folgt nach dem Schroederschen Fixpunktsatz die Behauptung ([Co]).

Bemerkung 1. Der Schroedersche Fixpunktsatz sagt natürlich mehr aus, als oben benutzt wurde. Es folgt z.B. aus der Voraussetzung $r(A) < 1$, daß jede Iterationsfolge von $\phi(X)$ konvergiert. Auf diesen Aspekt kommen wir bei der Diskussion der inneren Stabilität von Inhibitionsfeldern zurück.

5 Der Spektralradius $r(A)$ ist der Betrag des betragsgrößten Eigenwertes von A.
6 $\#(M)$ ist die Mächtigkeit der Menge M.

4. Erste Aussagen über die Struktur der allgemeinen Lösung $I(X|A, D, C, T, S)$

4.1. In diesem Abschnitt wollen wir einige wichtige Relationen herleiten, denen die allgemeine Lösung $I(X|A, D, C, T, S)$ genügt. Wegen Hs. 2.1.1 können wir uns dabei immer auf normierte Inhibitionsfelder beschränken.

4.2. Sei $\phi n IF(A, S)$. Wir ordnen ϕ das Gleichungssystem

$$(G_\phi) Z = X - A \text{ pos } (Z - S)$$

zu.

Die allgemeine Lösung von (G_ϕ) bezeichnen wir mit $I^*(X|A, S)$. Der Zusammenhang zwischen $I^*(X|A, S)$ und $I(X|A, S)$ wird durch folgenden Satz gegeben.

Satz 4.2.1. Sei ϕ $nIF(A, S)$ mit $S \geqq 0$, dann gilt:

a) $\text{pos}\left(I^*(X|A, S)\right) = I(X|A, S)$

b) $X - A \text{ pos}\left(I(X|A, S) - S\right) = I^*(X|A, S)$.

Corollar. Sei $\#\left(I^*(X|A, S)\right) = 1$, dann gilt:

$$I^*(X|A, S) \leqq I(X|A, S).$$

Mit Hilfe dieses Satzes, der eine teilweise Linearisierung unseres Problems mit sich bringt, lassen sich eine Reihe wichtiger Eigenschaften von $I(X|A, S)$ beweisen.

4.3. Wir wollen einige Relationen herleiten, denen $I(X|A, S)$ genügt.

Satz 4.3.1. Sei ϕ $nIF(A, S)$ und sei $X \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

a) $I(X|A, S) = I\left(\text{pos}(X)|A, S\right)$.

b) $I(e_i|A, S) = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$.[7]

c) $I(X|A, S) = 0 \Leftrightarrow X \leqq 0$, falls $S \geqq 0$.

d) $(X)_i \leqq 0 \Rightarrow \left(I(X|A, S)\right)_i = 0$.

e) Sei L mit pos eine vertauschbare, reguläre Matrix, dann gilt:

$$LI(X|A, S) = I(LX|LAL^{-1}, LS).$$

f) $c \geqq 0$, $c \in \mathbb{R}$: $cI(X|A, S) = I(cX|A, cS)$.

g) Sei $Y \geqq 0$: $\text{pos}\left(I(X|A, S+Y) - Y\right) = I(X - Y|A, S)$, falls $S \geqq 0$ ist.

Wir wollen nun kurz die Ergebnisse dieses Satzes diskutieren: a), b), c) sind Ergebnisse, die aufgrund der Bedeutung unserer Gleichungssysteme erwartet werden können. d) besagt, daß aus $X \geqq 0$, $X \neq 0$ stets folgt, daß kein $Z \in I(X|A, S)$ gleich 0 ist, sondern daß es i mit $(Z)_i > 0$ gibt (vgl. [McGi-Rei]). Neben der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren steckt in e) auch die „selbstverständliche" Tatsache (bei Spezialisierung auf Permutationsmatrizen), daß die Umnumerierung der Neuronen keine Einwirkung auf das Ergebnis der Interaktion hat. g) ist eine Art Superpositionsprinzip, daß einige Vorteile bei der numerischen Auswertung

---

7 $(e_i)_j = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

bringen kann. Dies gilt auch für e), da insbesondere Permutationsmatrizen mit pos vertauschbar sind und damit die Normalformen nichtnegativer Matrizen für diese Theorie zugänglich werden [Va, Hou, Ga1, Ga2].

4.4. Im Falle, daß $\phi(X)(Z)=Z$ eindeutig lösbar ist, fassen wir $I(X|A, D, C, T, S)$ als Transformation des $\mathbb{R}^n$ in sich auf. Die interessierende Menge der Eingangsvektoren ist dann $\mathbb{R}^n_+ = \{X \in \mathbb{R}^n | X \geqq 0\}$, dann erhebt sich sofort die Frage, ob $I(X|A, D, C, T, S)$ injektiv und surjektiv $\mathbb{R}^n_+$ in $\mathbb{R}^n_+$ abbildet. Beide Fragen sind zunächst wegen der Existenz von Nullniveaus in trivialer Weise im allgemeinen zu verneinen. Betrachtet man aber statt $\mathbb{R}^n_+$ die Menge der Eingänge, die größer oder gleich dem Nullniveau sind, so wird die entsprechende Frage sinnvoll. Im Falle normierter Inhibitionsfelder haben wir allerdings wieder das Nullniveau 0. Wir werden uns daher wieder auf normierte Inhibitionsfelder beschränken. Die Umformulierung unserer Sätze auf beliebige Inhibitionsfelder führt dann gerade auf die Beantwortung der obigen Fragestellung mit der Modifikation durch das Nullniveau.

Sei ϕ $nIF(A, S)$. Wir ordnen ϕ die Transformation

$$I': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

mit

$$I'(Y) = Y + A \text{ pos }(Y - S) \qquad (Y \in \mathbb{R}^n)$$

zu.

Wir wollen für diesen und den folgenden Abschnitt annehmen, daß $\phi(X)(Z)=Z$ bei gegebenem ϕ $nIF(A, S)$ für alle $X \in \mathbb{R}_n$ eindeutig lösbar ist.

Betrachte dann

$$\text{injekt}(\phi) = \{X \in \mathbb{R}^n | I^*(X|A, S) \geqq 0\}.$$

Wir behaupten nun

Satz 4.4.1. Sei ϕ $nIF(A, S)$, dann gilt:

a) $I(X|A, S) = I(X'|A, S)$, $X, X' \in \text{injekt}(\phi) \Rightarrow X = X'$.

b) Zu jedem $X \in \mathbb{R}^n$ existiert $X' \in \text{injekt}(\phi)$ mit

$$I(X|A, S) = I(X'|A, S).$$

c) Zu jedem $Y \in \mathbb{R}^n_+$ existiert $X \in \text{injekt}(\phi)$ mit

$$I(X|A, S) = Y.$$

d) $X' \in \text{injekt}(\phi)$, $I(X|A, S) \leqq I(X'|A, S) \Rightarrow X \leqq X'$.

e) Ist $X \leqq X'$, so gilt entweder $I(X|A, S) \leqq I(X'|A, S)$ oder $I(X|A, S)$ und $I(X'|A, S)$ sind unvergleichbar.

Bemerkung. $I(X|A, S)$ ist auf $\mathbb{R}^n_+$ eingeschränkt surjektiv und ein Operator monotoner Art auf injekt(ϕ) [Co]. Ferner konnten wir einen maximalen Bereich angeben, auf dem $I(X|A, S)$ injektiv ist. Man beachte, daß im Gegensatz zu $I(X|A, S)$ $I^*(X|A, S)$ ein bijektiver Operator ist, so daß die Injektivität allein durch die Funktion pos zerstört wird.

4.5. Wir wollen nun injekt(ϕ) noch näher charakterisieren.

Satz 4.5.1. Sei ϕ $nIF(A, S)$ mit $S \geqq 0$ und -1 nicht Eigenwert von A, seien ferner

$$\text{injekt}^* (\phi) = \{X \mid (E+A)^{-1}(X-S) \geqq 0\}$$

und

$$\text{injekt}^o (\phi) = \{X \mid 0 \leqq X \leqq S\}$$

und

$$\text{injekt}^e (\phi) = \{c e_i \mid 1 \leqq i \leqq n,\ c \geqq 0,\ c \in \mathbb{R}\},$$

dann gelten folgende Aussagen:

a) $\text{injekt}^*(\phi) \cup \text{injekt}^o(\phi) \cup \text{injekt}^e(\phi) \subsetneqq \text{injekt}(\phi)$.

b) Ist $S = 0$, so gilt: $\text{injekt}^*(\phi) = \text{injekt}(\phi)$.

c) $X \in \text{injekt}^o(\phi) \cup \text{injekt}^e(\phi) \Rightarrow I(X \mid A, S) = X$.

d) Ist $X \in \text{injekt}^*(\phi)$, so gilt: $I(X \mid A, S) = (E+A)^{-1}(X + AS)$.

e) Zu jedem $Y \geqq S$ existiert $X \in \text{injekt}^*(\phi)$ mit $Y = I(X \mid A, S)$.

f) Ist $X \geqq (E+A)^{-1} S$, so gilt: $I\big((E+A) X \mid A, S\big) = X + (E+A)^{-1} A S$.

Bemerkungen. Wir haben also gezeigt, daß im Fall $S = 0$ die Struktur von $I(X \mid A, 0)$ bestimmt werden kann durch ein bestimmtes lineares Gleichungssystem und zwar für alle X. Aufgrund unserer Überlegungen ist es aber zweckmäßig, nur mit solchen X zu arbeiten, die Elemente von $\text{injekt}^*(\phi)$ sind. Mit den Methoden der Matrizentheorie kann man nun noch feinere Aussagen über die Struktur von $I(X \mid A, 0)$ gewinnen (hierzu [v. Se]). In dieser Arbeit wollen wir jedoch nicht darauf eingehen, da wir hier stärker am nichtlinearen Teil der Theorie der Inhibitionsfelder interessiert sind. Die Aussage f) unseres Satzes hat aber noch eine spezielle Anwendung. Kann die Erstverarbeitung durch Streuung und „Zusammenschalten" der Sehzellen auf die reizverarbeitenden Neuronen beschrieben werden durch

$$X' = C X_{\text{original}}$$

mit einer nichtnegativen Matrix C, so kann man (im Falle $S = 0$) durch spezielle Wahl von A den Vektor X_{original} wieder völlig herstellen, wenn man ein normiertes Inhibitionsfeld mit Inhibitionsmatrix A und Schwellvektor $S = 0$ verwendet, wobei $C = E + A$ ist. Im allgemeinen treten aber Schwellen $S \neq 0$ auf, dann unterscheidet sich aber X_{original} von $I(X \mid A, S)$ aber auch nur um den konstanten Summanden

$$(E+A)^{-1} A S.$$

Normierungen von C auf die Gestalt $C = E + A$ mit Spur $A = 0$ können durch D ausgeglichen werden (vgl. [Rei]).

5. Variationen der Parameter

5.1. In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten von $I(X|A, D, C, T, S)$ bei Variation von X (Stetigkeit der Transformation $I(X|A, D, C, T, S)$) und A, D, C, T, S (Parameter) untersuchen. Es ist klar, daß es sich hierbei um Abschätzungen der Auswirkungen von Variationen der Parameter auf $I(X|A, D, C, T, S)$ handelt.

Satz 5.1.1 (Variation der Parameter). Seien ϕ $IF(A, D, C, T, S)$ und ϕ' $IF(A', D', C', T', S')$ mit

$$r\left(\tfrac{1}{2}(D^{-1}A + D'^{-1}A')\right) < 1,$$

so gilt für alle $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&|I(X|A, D, C, T, S) - I(X'|A', D', C', T', S')\\
&\quad \leqq \tfrac{1}{2}\left(E - \tfrac{1}{2}(D^{-1}A + D'^{-1}A')\right)^{-1}\{(D^{-1} + D'^{-1})(|T - T'| + 4|C - C'|)\\
&\quad + (D^{-1}A + D'^{-1}A')|S - S'|\\
&\quad + \left(D^{-1}|A - A'|(D'^{-1}(|X| + |T'| + |C'|) + |S'|)\right)\\
&\quad + \left(D'^{-1}|A - A'|(D^{-1}(|X| + |T| + |C|) + |S|)\right)\\
&\quad + |D^{-1} - D'^{-1}|\left((2E + A'D'^{-1})|C'| + (2E + AD^{-1})|C|\right.\\
&\quad + (2E + AD^{-1} + A'D'^{-1})|X| + (E + A'D'^{-1})|T'|\\
&\quad \left. + (E + AD^{-1})|T| + A|S| + A'|S'|\right)\}.
\end{aligned}$$

Zunächst erkennt man, daß die Transformation $I(X|A, D, C, T, S)$ stetig ist. Das Verhalten bei Variation von T, C und S ist stetig und hängt nicht von der Eingabe X ab. Wesentlich anders ist das Verhalten bei Variation von A und D. In diesem Fall hängt die Größe der Änderung von der Eingabe X ab.

5.2. Neben Abschätzungen „nach oben", wie sie Satz 5.6.1 a) bringt, kann man mit Hilfe von I^* auch Abschätzungen „nach unten" gewinnen. Bei diesen Untersuchungen wollen wir uns auf normierte Inhibitionsfelder beschränken.

Sei also ϕ $nIF(A, S)$, dann gilt für alle $X, X' \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&I^*(X|A, S) - I^*(X'|A, S)\\
&\qquad = X - X' - A\left(\operatorname{pos}(I^*(XA, S) - S) - \operatorname{pos}(I^*(X'|A, S) - S)\right).
\end{aligned}$$

Nimmt man nun an, daß $S \geqq 0$ ist, so gilt der Reihe nach:

$$\operatorname{pos}\left(I^*(X|A, S) - S\right) - \operatorname{pos}\left(I^*(X'|A, S) - S\right) \leqq |I^*(XA, S) - I^*(X'|A, S)|.$$

Hiermit folgt:

$$\left|I^*(X|A, S) - I^*(X'|A, S)\right| \geqq \left|X - X' - A|I^*(X|A, S) - I^*(X'|A, S)|\right|,$$

also:

$$(E + A)|I^*(X|A, S) - I^*(X'|A, S)| \geqq X' - X.$$

Vertauschung von X und X' liefert:

$$(E+A)[I^*(X|A,S)-I^*(X'|A,S)|\geqq X'-X.$$

Eine einfache Überlegung zeigt dann:

$$(E+A)|I^*(X|A,S)-I^*(X'|A,S)|\geqq|X'-X|.$$

Wir haben also bewiesen:

Satz 5.2.1. Sei ϕ $nIF(A,S)$, dann gilt für alle $X, X'\in\operatorname{injekt}(\phi)$:

$$(E+A)|I(X|A,S)-I(X'|A,S)|\geqq|X-X'|$$
$$\geqq(E-A)|I(X|A,S)-I(X'|A,S)|$$

6. Stabilität

6.1. Dieser Abschnitt ist den Untersuchungen über die Stabilität der Lösungen von $\phi(X)(Z)=Z$ vorbehalten. Wir gehen dabei von folgender Vorstellung aus. Eingegeben wird ein zeitlich konstanter Reiz X. Die Parameter bleiben fest. Dann stellt sich zunächst ein Ausgang Z ein. Wird dieser Ausgang verändert, ohne daß sich Eingang und Parameter ändern, dann verlangen wir, daß unser System sich auf Z zurückiteriert, sofern die Störung nur genügend klein ist, d.h. die Störung soll abklingen.

Man beachte, daß hier zum ersten Mal Voraussetzungen über die Zeitunabhängigkeit der Parameter und der Eingänge in die Untersuchungen hereinkommen. Alles, was bis jetzt diskutiert wurde, bleibt auch richtig, wenn die Parameter und Eingänge zeitabhängig sind.

6.2. Genauer wollen wir die Stabilität definieren durch:

Definition. Sei f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $Z\in\mathbb{R}^n$ ein Fixpunkt von f, dann heißt Z *stabil*, wenn

$$\operatorname{iter}(Z|f)=\{X\in\mathbb{R}^n|\lim_k f^k(X)=Z\}$$

eine offene Menge ist.

Wir nennen f *stabil*, wenn

$$\bigcup_{f(Z)=Z,\,Z\in\mathbb{R}^n}\operatorname{iter}(Z|f)=\mathbb{R}^n$$

ist, d.h. wenn jede mit f gebildete Iterationsfolge gegen einen Fixpunkt konvergiert. Wir nennen f *streng stabil*, wenn es einen Fixpunkt Z mit $\operatorname{iter}(Z|f)=\mathbb{R}^n$ gibt.

Im folgenden wollen wir zunächst einmal die Stabilität von $\phi(X)$ untersuchen (bei gegebenem Inhibitionsfeld ϕ und $X\in\mathbb{R}^n$).

6.3. Wir wollen zeigen, daß $\phi(X)$ genau dann streng stabil ist, wenn $\phi(X)$ stabil ist. Dazu benötigen wir einen vorbereitenden Satz.

Satz 6.3.1. Sei ϕ $nIF(A,S)$ und $X\in\mathbb{R}^n$, dann gilt:

a) Es existieren die Limites

$$\lim_k \phi(X)^{2k+1}(\operatorname{pos}(X))=U_\phi(X)$$

und

$$\lim_k \phi(X)^{2k}(\operatorname{pos}(X))=O_\phi(X).$$

b) $\phi(X)\,(U_\phi(X)) = O_\phi(X)$, $\phi(X)\,(O_\phi(X)) = U_\phi(X)$.

c) $O \leqq U_\phi(X) \leqq I(X|A, S) \leqq O_\phi(X) \leqq \mathrm{pos}(X)$.

Beweis. Wir erinnern uns daran, daß $\phi(X)$ stetig und antiton ist, ferner gilt für alle $Y \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leqq \phi(X)(Y) \leqq \mathrm{pos}(X).$$

Hieraus erhalten wir:

i) $\phi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqq \mathrm{pos}(X)$.

ii) $\phi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqq \phi(X)^3(\mathrm{pos}(X))$.

iii) $\phi(X)^2(\mathrm{pos}(X)) \leqq \mathrm{pos}(X)$.

Da ϕ antiton ist, ist $\phi(X)^{2s}$ für alle $s \geqq 0$ isoton.

Wir erhalten dann bei Anwendung von $\phi(X)^{2s}$ auf die Ungleichungen:

i) $\phi(X)^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqq \phi(X)^{2s}(\mathrm{pos}(X))$

ii) $\phi(X)^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqq \phi(X)^{2s+3}(\mathrm{pos}(X))$

und

iii) $\phi(X)^{2s+2}(\mathrm{pos}(X)) \leqq \phi(X)^{2s}(\mathrm{pos}(X))$

für alle $s \geqq 0$.

Aus ii) erhalten wir: $\phi(X)^{2s+1}(\mathrm{pos}(X))$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt durch $\mathrm{pos}(X)$.

Aus iii) erhalten wir: $\phi(X)^{2s}(\mathrm{pos}(X))$ ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt.

Hieraus folgt sofort a).

b) ist dann eine Folge der Stetigkeit von $\phi(X)$.

c) Sei $Z \in I(X|A, S)$, dann gilt:

$$0 \leqq Z \leqq \mathrm{pos}(X)$$

und

$$0 \leqq \phi(X)\,(\mathrm{pos}(X)) \leqq Z.$$

Wiederum liefert für jedes $s \geqq 0$ die Anwendung von $\phi(X)^{2s}$

$$0 \leqq Z \leqq \phi(X)^{2s}(\mathrm{pos}(X))$$

und

$$\phi(X)^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqq Z \leqq \mathrm{pos}(X).$$

Nach Grenzübergang erhalten wir dann die Behauptung.

Bemerkungen. Neben dem für sich interessanten Einschließungssatz c) erhalten wir im Beweis eine für numerische Zwecke sehr wichtige Eigenschaft der Iterationsfolgen von $\phi(X)$. Führt man mit $\phi(X)$ zur Fixpunktbestimmung ein Gesamtschrittverfahren durch und startet mit $\mathrm{pos}(X)$ (oder 0, denn $\phi(X)(0) = \mathrm{pos}(X)$), so ist die Iterationsfolge

$$\phi(X)^k(\mathrm{pos}(X))$$

alternierend monoton.

Aus dem Einschließungssatz c) erhalten wir als Folgerungen:

Corollar. a) Ist $U_\phi(X) = O_\phi(X)$, so gilt: $\#(I|A, S) = 1$.

b) Besitzt $\phi(X)^2$ höchstens 3 Fixpunkte, dann gilt: $\#\big(I(X|A, S)\big) = 1$.

6.4. Wir kommen nun zur angekündigten Äquivalenz.

Satz 6.4.1. Sei ϕ $n IF(A, S)$ und $X \in \mathbb{R}^n$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\phi(X)$ ist stabil.

b) $\phi(X)$ ist streng stabil.

c) $O_\phi(X) = U_\phi(X)$

d) $\phi(X)^2$ besitzt höchstens 2 Fixpunkte.

e) $\phi(X)^2$ ist streng stabil.

Beweis. a)$\Rightarrow$c). trivial.

c)$\Rightarrow$b). Sei $Y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$0 \leqq \phi(X)(Y) \leqq \operatorname{pos}(X),$$

$$\phi(X)\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^2(Y),$$

$$\phi(X)^2(Y) \leqq \operatorname{pos}(X)$$

und

$$\phi(X)\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^3(Y).$$

Da wiederum $\phi(X)^{2s}$ für alle $s \geqq 0$ isoton ist, erhalten wir durch Anwendung von $\phi(X)^{2s}$ auf die obigen vier Ungleichungen:

$$\phi(X)^{2s+1}(Y) \leqq \phi(X)^{2s}\big(\operatorname{pos}(X)\big),$$

$$\phi(X)^{2s+1}\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^{2s+2}(Y),$$

$$\phi(X)^{2s+2}(Y) \leqq \phi(X)^{2s}\big(\operatorname{pos}(X)\big)$$

und

$$\phi(X)^{2s+1}\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^{2s+3}(Y).$$

Hieraus gewinnen wir für alle $s \geqq 0$:

$$\phi(X)^{2s+1}\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^{2s+3}(Y) \leqq \phi(X)^{2s+2}\big(\operatorname{pos}(X)\big)$$

und

$$\phi(X)^{2s+3}\big(\operatorname{pos}(X)\big) \leqq \phi(X)^{2s+2}(Y) \leqq \phi(X)^{2s}\big(\operatorname{pos}(X)\big).$$

Also existieren die Limites

$$\lim_s \phi(X)^{2s}(Y)$$

und

$$\lim_s \phi(X)^{2s+1}(Y)$$

und sind gleich, d.h. es existiert

$$\lim_k \phi(X)^k(Y).$$

Dann folgt sofort b).

b) $\Rightarrow$ d). Es folgt: $O_\phi(X) = U_\phi(X)$, da $\phi(X)$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.

d) $\Rightarrow$ e). Es gilt:

$$O_\phi(X) = U_\phi(X).$$

Dann gilt für alle $Y \in \mathbb{R}^n$ und $s \geqq 1$:

$$(\phi(X)^2)^s\,(\phi(X)(\mathrm{pos}(X))) \leqq (\phi(X)^2)^s(Y) \leqq (\phi(X)^2)^{s-2}\,(\mathrm{pos}(X)).$$

Also existiert für alle $Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_s\,(\phi(X)^2)^s(Y) = U_\phi(X) = O_\phi(X)$$

und d) ist bewiesen.

d) $\Rightarrow$ a). Ist $Y \in \mathbb{R}^n$, dann existieren die Limites

$$\lim_s\,\phi(X)^{2s}(Y),$$
$$\lim_s\,\phi(X)^{2s}\,(\phi(X)(Y))$$

und sind gleich.

Also existiert:

$$\lim_k\,\phi(X)^k(Y) \quad \text{für alle} \quad Y \in \mathbb{R}^n.$$

Insgesamt folgt nun die Behauptung des Satzes.

Wir wollen ein einfaches Corollar angeben.

Betrachte

$$\mathrm{stab}\,(\phi) = \{X \mid \phi(X) \text{ stabil}\}$$

und

$$\mathrm{eind}\,(\phi) = \{X \mid \#\,(I(XA, S)) = 1\},$$

dann gelten folgende Aussagen:

Corollar. Unter den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt:

a) $\mathrm{stab}\,(\phi) \subseteq \mathrm{eind}\,(\phi)$,

b) $X \in \mathrm{stab}\,(\phi) \Rightarrow \mathrm{pos}\,(X) \in \mathrm{stab}\,(\phi)$,

c) $\mathrm{injekt}^o(\phi) \cup \mathrm{injekt}^e(\phi) \subseteq \mathrm{stab}\,(\phi)$.

6.5. Globale Stabilität. Wir wollen ein Inhibitionsfeld ϕ *stabil* nennen, wenn $\phi(X)$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$ stabil ist. Bei der Untersuchung der Stabilität von Inhibitionsfeldern können wir uns offenbar wieder auf normierte Inhibitionsfelder beschränken. Es gilt:

Satz 6.5.1. Sei ϕ $nIF(A, S)$ mit $r(A) < 1$, dann ist ϕ stabil.

Beweis. Vergleiche Satz 3.3.1.

Die Umkehrung dieses Satzes hängt eng mit einer anderen Fragestellung zusammen. Es wäre wünschenswert, daß kleine Variationen von X die Stabilität nicht zerstören, d.h. wir wünschen Systeme zu benutzen, für die $\mathrm{stab}\,(\phi)$ offen ist.

Nun gilt:

Satz 6.5.2. Sei ϕ $nIF(A,S)$ mit $S \geqq 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\operatorname{stab}(\phi)$ ist offen,

b) $\operatorname{stab}(\phi) = \mathbb{R}^n$,

c) $r(A) < 1$.

Beweis. Trivial sind die Richtungen c) $\Rightarrow$ b) und b) $\Rightarrow$ a). Wir haben also a) $\Rightarrow$ c) zu zeigen:

Im Gegensatz zur Behauptung wollen wir annehmen, daß $r(A) \geqq 1$ ist. Da $A \geqq 0$ ist, existiert nach [Ga2] $X \geqq 0$, $X \neq 0$ mit

$$A X = r(A) X.$$

Bestimme nun X (etwa durch Multiplikation mit Skalaren) so, daß stets gilt:

$$(S)_i > 0 \Rightarrow (S)_i - \big(1 - r(A)\big)(X)_i > 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Setze dann

$$(X')_i = \begin{cases} 0, \text{ falls } (S)_i = 0 \\ (X)_i, \text{ sonst} \end{cases} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Dann gilt:

$$\operatorname{pos}\big(S + (1 - r(A))X\big) = S + \big(1 - r(A)\big)X'.$$

Nun gilt:

$$\phi(S+X)(S+X) = \operatorname{pos}\big(S + (1-r(A))X\big) = S\,\big(1 - r(A)\big)X'.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}\phi(S+X)\,\big(S + (1-r(A))X'\big) &= \operatorname{pos}\big(S + X - A\operatorname{pos}((1-r(A))X')\big) \\ &= \operatorname{pos}(S+X) = S + X.\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen:

$$U_\phi(S+X) = \big(1 - r(A)\big)X' + S, \qquad O_\phi(S+X) = S + X.$$

Nun existiert i mit $(X)_i \neq 0$, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $(S)_i = 0$.

Es folgt: $(X')_i = 0$, also:

$$\big(U_\phi(S+X)\big)_i = 0 \neq (X)_i = \big(O_\phi(S+X)\big)_i,$$

2. Fall: $(S_i) > 0$.

Es folgt: $(X')_i = (X)_i$, also

$$\big(U_\phi(S+X)\big)_i = (S)_i + \big(1 - r(A)\big)(X)_i = \big(O_\phi(S+X)\big)_i - r(A)(X)_i.$$

Damit ergibt sich stets:

$$U_\phi(S+X) \neq O_\phi(S+X), \text{ d.h. } \phi(S+X) \text{ ist nicht stabil.}$$

Da man offenbar für jede Umgebung von S nun X so finden kann, daß $S + X$ noch in der gegebenen Umgebung liegt und da $\phi(S)$ stabil ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aus beiden Sätzen zusammen erhalten wir nun den zentralen Satz über die Stabilität von Inhibitionsfeldern.

Satz 6.5.3 (Stabilität von Inhibitionsfeldern). Sei ϕ $nIF(A, S)$ mit $S \geqq 0$, dann ist ϕ genau dann stabil, wenn $r(A) < 1$ ist.

Bemerkungen. Hiermit werden nun alle bekannten Abschätzungen über den Spektralradius einer nichtnegativen Matrix für die Theorie der Stabilität von Inhibitionsfelder zugänglich. Beispiele für die Berechnung und Abschätzung des Spektralradius finden sich in [Va, Hou, Ga1, Ga2].

7. Stückweise affin-lineare Abbildungen

7.1. Zum Abschluß dieser Arbeit wollen wir eine weitere Aussage über $I(X|A, D, C, T, S)$ kennenlernen. Wir werden zeigen, daß im Falle $\#\big(I(X|A, D, C, T, S)\big) = 1$ die zugehörige Transformation stückweise affin-linear ist.

7.2. Zunächst wollen wir konvexe Partitionen und stückweise affin-lineare Abbildungen definieren. Sei

$$P = (p_\lambda | 1 \leqq \lambda \leqq k)$$

eine Partition des $\mathbb{R}^n$, dann nennen wir P *konvex*, wenn für alle $1 \leqq \lambda \leqq k$ p_λ konvex ist.[8]

Bemerkungen. 1. Sind $P = (p_\lambda | 1 \leqq \lambda \leqq k)$ und $Q = (q_\mu | 1 \leqq \mu \leqq m)$ konvexe Partitionen, so ist auch

$$P \cap Q = (p_\lambda \cap q_\mu | p_\lambda \cap q_\mu \neq \emptyset,\ 1 \leqq \lambda \leqq k,\ 1 \leqq \mu \leqq m)$$

eine konvexe Partition.

2. Ist $P = (p_\lambda | 1 \leqq \lambda \leqq k)$ eine konvexe Partition, dann ist für alle $1 \leqq \lambda \leqq k$ die Menge p_λ^0 der relativ inneren Punkte von p_λ Durchschnitt von Halbräumen.[9]

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, dann heißt f *stückweise affin-linear,* wenn es eine konvexe Partition $P = (p_\lambda | 1 \leqq \lambda \leqq k)$ und eine Familie affin-linearer Abbildung $(f_\lambda | 1 \leqq \lambda \leqq k)$ gibt, so daß für $X \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\big(X \in p_\lambda \Rightarrow f(X) = f_\lambda(X)\big).^{10}$$

7.3. Wie affin-lineare Abbildungen konvexe Mengen als Invarianten besitzen, gehören zu stückweise affin-linearen Abbildungen stückweise konvexe Mengen; das sind Mengen, die sich als endliche Vereinigung konvexer Mengen darstellen lassen.

Es gilt:

Hilfssatz 7.3.1. Unter stückweise affin-linearen Abbildungen sind Bilder und Urbilder stückweise konvexer Mengen wieder stückweise konvex.

---

8 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, wenn mit $X, Y \in M$ auch $(1-\alpha)X + \alpha Y \in M$ für alle $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist.

9 Ist M eine konvexe Menge, so liegt M ganz in einer linearen Mannigfaltigkeit. Die Menge der relativ inneren Punkte von M ist dann die Menge der inneren Punkte bezüglich derjenigen Mannigfaltigkeit kleinster Dimension, in der M enthalten ist.

10 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt affin-linear, wenn $f(X) - f(0)$ lineare Abbildung ist.

Unser wesentliches Hilfsmittel ist der folgende Satz.

Satz 7.3.1. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und stückweise affin-linear, so ist auch f^{-1} stückweise affin-linear.

Satz 7.3.2. Sei ϕ $IF(A, D, C, T, S)$ mit $\#\big(I(X|A, D, C, T, S)\big) = 1$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Transformation $I(X|A, D, C, T, S)$ stückweise affin-linear.

Beweis. Wir können uns wieder auf normierte Inhibitionsfelder beschränken. Sei also ϕ $IF(A, S)$.

Betrachte dann wieder

$$I^*(X|A, S) \qquad (X \in \mathbb{R}^n)$$

und $I'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$I'(Y) = Y + A \operatorname{pos}(Y - S) \qquad (Y \in \mathbb{R}^n).$$

Dann gilt:

$$I^*(X|A, S) = I'^{-1}(X)$$

und

$$I(X|A, S) = \operatorname{pos}\big(I^*(X|A, S)\big) \qquad (X \in \mathbb{R}^n).$$

pos ist stückweise affin-linear. Dann ist auch I' affin-linear. Hieraus ergibt sich aber die Behauptung.

8. Beispiel

Wir diskutieren ein Beispiel. Dazu nehmen wir an, daß die Neuronen linear angeordnet sind. Die Inhibitionsmatrix sei dann gegeben durch

$$A = aH \qquad \text{mit} \qquad a \geqq 0,\ a \in R$$

und

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist der Spektralradius von A

$$r(A) = 2a \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Also ist das zugehörige Inhibitionsfeld mit Schwelle 0, dann und nur dann stabil, wenn

$$a < \left(2 \cos \frac{\pi}{n+1}\right)^{-1}$$

ist. Aus diesem Beispiel wollen wir die kontrastverschärfende Wirkung von Inhibitionsfeldern nachweisen.

Betrachte einen Reiz $X > 0$ mit

$$(X)_i > (X)_{i-1} + (X)_{i+1}.$$

Betrachte ferner $Y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$(\operatorname{pos} Y)_i > \operatorname{pos}(Y)_{i-1} + \operatorname{pos}(Y)_{i+1}.$$

Wir behaupten, daß $\phi'(X)(Y)$ wiederum diese Eigenschaft hat.

$$\begin{aligned}\operatorname{pos}\big(\phi'(X)(Y)\big)_i - \operatorname{pos}\big(\phi'(X)(Y)\big)_{i-1} - \operatorname{pos}\big(\phi'(X)(Y)\big)_{i+1} \\ = \operatorname{pos}\big((X)_i - a((Y)_{i-1} + (Y)_{i+1})\big) \\ - \operatorname{pos}\big(X_{i-1} - a((Y)_i + (Y)_{i-2})\big) \\ - \operatorname{pos}\big((X)_{i+1} - a((Y)_i + (Y)_{i+2})\big).\end{aligned}$$

1. Fall. Sei $(X)_i < a\big((Y)_{i-1} + (Y)_{i+1}\big)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(X)_j < (X)_i < a\big((Y)_{i-1} + (Y)_{i+1}\big) \\ < a(Y)_i < a\big((Y)_i + (Y)_{kj}\big)\end{aligned}$$

$$(j = i-1, i+1, k_{i-1} = i-2, k_{i+1} = i+2).$$

In diesem Fall ist also die Behauptung erwiesen.

2. Fall.

$$(X)_i > a\big((Y)_{i-1} + (Y)_{i+1}\big).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}&(X)_i - a\big((Y)_{i-1} + (Y)_{i+1}\big) \\ &\quad - \operatorname{pos}\big((X)_{i-1} - a((Y)_i + (Y)_{i-2})\big) \\ &\quad - \operatorname{pos}\big((X)_{i-2} - a((Y)_i + (Y)_{i+2})\big) \\ &\qquad (X)_i - (X)_{i-1} - (X)_{i-2} + a\big((Y)_i - (Y)_{i-1} + (Y)_{i+1}\big) > 0.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis.

Entweder gilt:

a) $I(X|A, 0)_i = I(X)A, 0)_{i-1} = I(X|A, 0)_{i+1} = 0$

oder

b) $I(X|A, 0)_i - I(X|A, 0)_{i-1} - I(X|A, 0)_{i+1} > (X)_i - (X)_{i-1} - (X)_{i+1}$.

Wir erhalten also in diesem Fall eine kontrastverschärfende Wirkung unseres Inhibitionsfeldes.

Literatur

[Co] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.

[Ga1] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung I. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.

[Ga2] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.

[Hou] Householder, W.: The theory of matrices in numerical analysis. New York: Blaisdell Publishing Company 1964.

[Ko] Kowalski, H. J.: Lineare algebra. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1963.

[Ra] Rattliff, F.: Mach bands. Qualitative studies on neural networks in the retina. San Francisco: Holden Day Inc. 1965.

[Rei] Reichardt, W.: Über das optische Auflösungsvermögen der Facettenaugen von Limulus. Kybernetik **1**, 57—69 (1961).

[Rei-McGi] Reichardt, W.-McGinnitie, G.: Zur Theorie der lateralen Inhibition. Kybernetik **1**, 155—165 (1962).

[Schu] Schubert, H.: Topologie. Stuttgart: B. G. Teubner 1964.

[Va] Varga, R. S.: Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Inc. 1962.

[v. Se] Seelen, W. von: Informationsverarbeitung in homogenen Netzen von Neuronenmodellen. Dissertation an der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover, 1967.

[Wa] Walter, H.: Inhibitionsfelder. Dissertation an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät des Saarlandes, Saarbrücken, 1968.

Dr. Hermann Walter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität des Saarlandes
D-6600 Saarbrücken
Deutschland

Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg

Printed in Germany