Abschätzungen für Kontinuanten

von

Ulrike Brandt

TI-2/89 Dezember 1989
Institut für Theoretische Informatik

Zusammenfassung:

Aufbauend auf den Ergebnissen von A. Mrose über extremale Kontinuanten werden im folgenden zwei Majorantentheoreme für Kontinuanten bewiesen. Es wird gezeigt, daß eine Kontinuante aus einer Folge natürlicher Zahlen, die alle größer oder gleich drei sind, durch die Kontinuante majorisiert wird, die durch Ersetzung jedes Folgenelements durch ihren Mittelwert entsteht. Für rationale Zahlen gilt diese Aussage im allgemeinen nicht.

In der Hälfte aller Fälle folgt das Ergebnis aus einer weiteren Abschätzung, die man durch einfache Diskussion bestimmter linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten erhält.

0. Im Zusammenhang mit der Bestimmung optimaler regulärer Mengen [1], die sich aus dem von Hofmeister [2] formulierten und von Mrose [3] vollständig gelösten regulären Reichweitenproblem ergeben, ist es notwendig, über Abschätzungen für Kontinuanten zu verfügen. Diese sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Kontinuanten sind spezielle Determinanten – sogenannte Kettenbruchdeterminanten – folgenden Typs

$$C(x_1,\ldots,x_k) = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & \ldots & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x_k \end{vmatrix}$$

wobei $x_1,\ldots,x_k \in \mathbf{R}$.

Sie können für $k \geq 1$ rekursiv definiert werden durch die Funktionalgleichungen

$$C(x_1,\ldots,x_k) = x_1 C(x_2,\ldots,x_k) - C(x_3,\ldots,x_k)$$

oder

$$C(x_1,\ldots,x_k) = x_k C(x_1,\ldots,x_{k-1}) - C(x_1,\ldots,x_{k-2}),$$

wenn man von den Anfangsbedingungen

$$C(x_r,\ldots,x_s) = \begin{cases} 1, & \text{falls } s = r-1 \\ 0, & \text{falls } s < r-1 \end{cases}$$

ausgeht.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß jede Kontinuante $C(x_1,\ldots,x_k)$, deren Elemente natürliche Zahlen größer gleich 3 sind, durch die Kontinuante majorisiert wird, die man erhält, wenn man die $x_1,\ldots,x_k$ jeweils durch ihren Mittelwert ersetzt. Daß die $x_1,\ldots,x_k$ natürliche Zahlen sind, ist dabei eine wesentliche Voraussetzung, da dieser Majorantensatz für rationale Zahlen im allgemeinen nicht gilt.

Den anschließenden Untersuchungen liegen folgende Bezeichnungen zugrunde. Um die Exponentiation reeller Zahlen von der Exponentiation endlicher Folgen reeller Zahlen unterscheiden zu können, werden letztere von nun an immer in spitze Klammern $<,>$ eingeschlossen. Für zwei Folgen $\mu =< x_1,\ldots,x_n >\in \mathbf{R}^n$ und $\sigma =< y_1,\ldots,y_m >\in \mathbf{R}^m$ $(n,m \geq 0)$ sei dann

- $\mu \circ \sigma =< x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m >$ (Konkatenation von μ_1 und μ_2)
- $\mu^0 =<>$ (leere Folge) und $\mu^{i+1} = \mu^i \circ \mu$ für $i \geq 0$ (Exponentiation von μ)
- $|\mu| = n$ (Länge von μ)
- $||\mu|| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (Elementsumme von μ)
- $M(\mu) = \frac{||\mu||}{|\mu|}$ (Mittelwert von μ)

- $sp(\mu) = < x_n, \ldots, x_1 >$ (Spiegelbild von μ)

Schließlich ist für $M \subseteq \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{R}$

- $M^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} M^i$ und $M^+ = M^* \backslash \{<>\}$
- $M_{\geq n} = \{j \in M / j \geq n\}$

Mit $\#(M)$ wird die Mächtigkeit der Menge M bezeichnet.

Im Folgenden soll also für $\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 3}$

$$C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|})$$

gezeigt werden, wobei der Beweis auf einem von Mrose [3] erzielten Ergebnis aufbaut, in dem "extremale" Kontinuanten charakterisiert werden.

Definition: (Mrose)

Eine Kontinuante $C(\mu)(\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 2})$ heißt **extremal**

$:\Leftrightarrow C(\mu) = Max\{C(\sigma)/\sigma \in \mathbf{N}^+_{\geq 2}, |\sigma| = |\mu| \text{ und } ||\sigma|| = ||\mu||\}$.

Definition: (Mrose)

$\mu = < x_1, \ldots, x_k >$ heißt **homogen**: $\Leftrightarrow$

(i) $\exists b \in \mathbf{N} : \mu \in \{b, b+1\}^k$.

(ii) Wenn $x_i = b$ und $x_{i+1} = b+1$ und es existiert $t \in \mathbf{N}$ mit $x_{i-t} \neq x_{i+1+t}$, dann gilt für das kleinste t mit dieser Eigenschaft:
$x_{i-t} = b+1$ und $x_{i+1+t} = b$. Existiert kein solches t, so gilt $i \leq \frac{k}{2}$.

(iii) Wenn $x_i = b+1$ und $x_{i+1} = b$ und es existiert $t \in \mathbf{N}$ mit $x_{i-t} \neq x_{i+1+t}$, so gilt für das kleinste t mit dieser Eigenschaft:
$x_{i-t} = b$ und $x_{i+1+t} = b+1$. Existiert kein solches t, so gilt $i \geq \frac{k}{2}$.

Satz 1: (Mrose, s. Satz 3.6 in [3])

Ist $\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 2}$, so ist $C(\mu)$ genau dann extremal, wenn μ homogen ist.

Ausgehend von diesem Ergebnis ist es ausreichend, den angekündigten Majorantensatz für Kontinuanten aus homogenen Zahlenfolgen zu beweisen. Deshalb sollen homogene Folgen kurz genauer untersucht werden.

Definition: (Mrose)

Eine homogene Folge μ heißt **elementar** $:\Leftrightarrow \exists b \in \mathbf{N} : \mu \in \{b, b+1\}^+$ und b kommt in μ höchstens einmal vor.

Beobachtung: (Mrose, s. Satz 26 in [3])

Für eine homogene Zahlenfolge μ existiert $b \in \mathbf{N}$, so daß

$$\mu \in \{b+1\}^+ \cup \{b\} \times \{b+1\}^+ \cup \{b+1\}^+ \times \{b\},$$

sofern μ elementar ist, und

$$\mu \in \{b\} \times \{b, b+1\}^* \times \{b+1\} \times \{b, b+1\}^* \times \{b\}$$

andernfalls.

Mrose zeigt anschließend, daß die Differenzenfolge der Indizes, für die in einer nichtelementaren homogenen Zahlenfolge der Kleinere der beiden möglichen Werte auftritt, selbst wieder homogen ist (s. Satz 3.3 in [3]):

Definition: (Mrose)

$< d_1, \ldots, d_n >$ heißt D-**Folge** einer nichtelementaren homogenen Zahlenfolge
$\mu =< x_1, \ldots, x_k > \in \{b, b+1\}^+$
$:\Leftrightarrow \exists i_1, \ldots, i_{n+1} : d_j = i_{j+1} - i_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad$ und $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\} = \{j/1 \leq j \leq k$ und $x_j = b\}$

Satz 2: (Mrose, s. Satz 3.3 in [3])

Die D-Folge einer nichtelementaren homogenen Zahlenfolge ist homogen.

Ausgehend von diesen Ergebnissen, kann man leicht zeigen

Lemma 3:

Für jede homogene nichtelementare Zahlenfolge $\mu \in \{b, b+1\}^+$ existieren $\mu_1, \ldots, \mu_r (r \geq 1)$, so daß
(i) $\mu =< b > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r$,
$\mu_i \in \{b+1\}^+ \times \{b\}$ und $||\mu_i| - |\mu_j|| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq r$
oder
(ii) $\mu =< b >^n \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r \quad (n \geq 1)$
und $\mu_i \in \{b+1\} \times \{b\}^+$ für alle $1 \leq i \leq r$

Bemerkung: Die Eigenschaft $||\mu_i| - |\mu_j|| \leq 1$ kann auch im Fall (ii) gezeigt werden, wird aber im Weiteren nicht gebraucht.

Beweis: Sei μ nach Voraussetzung gegeben. Da μ nichtelementar und damit von der Form $\mu =< b > \circ \mu' \circ < b+1 > \circ \mu'' \circ < b >$ ist, muß es eine Zerlegung

$$\mu =< b >^n \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r \quad (n, r \geq 1)$$

geben mit $\mu_i \in \{b+1\}^+ \times \{b\}^+ \quad (1 \leq i \leq r)$.

Außerdem stellt man fest, daß sich für homogenes und nichtelementares μ die Fälle

$$\mu = \mu_1' \circ < b, b > \circ \mu_2' \text{ und } \mu = \mu_3' \circ < b+1, b+1 > \circ \mu_4'$$

gegenseitig ausschließen. Andernfalls käme nämlich in der zugehörigen D-Folge eine 1 und ein $y \geq 3$ vor, was im Widerspruch zu ihrer Homogenität stünde.

Folglich ist entweder $n = 1$ und $\mu_i \in \{b+1\}^+ \times \{b\}$ für alle $1 \leq i \leq r$ oder $\mu_i \in \{b+1\} \times \{b\}^+$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Geht man von ersterem aus und nimmt an, es gäbe $1 \leq i, j \leq r$ mit $||\mu_i|| - |\mu_j|| \geq 2$ so wäre

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1' \circ < b > \circ < b+1 >^{k_1} \circ < b > \circ \mu_2' \\ &= \mu_3' \circ < b > \circ < b+1 >^{k_2} \circ < b > \circ \mu_4'\end{aligned}$$

mit $|k_1 - k_2| \geq 2$. Damit erhielte man aber erneut einen Widerspruch zur Homogenität der D-Folge von μ, in der sowohl $k_1 + 1$ als auch $k_2 + 1$ vorkämen. ∎

Der Beweis, daß $C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|})$ für homogene Zahlenfolgen $\mu \in \{b, b+1\}^+$ mit $b \geq 3$ gilt, gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil, wird die Behauptung für elementare μ gezeigt und für solche, die Eigenschaft (i) aus Lemma 3 erfüllen. Für Letztere kann gezeigt werden, daß man eine monoton wachsende Folge von Kontinuanten erhält, wenn man zu $< b > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r$

$$C(< M(< b > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_p) >^{1+|\mu_1|+\cdots+|\mu_p|} \circ \mu_{p+1} \circ \ldots \circ \mu_r)$$

für $1 \leq p \leq r$ bildet. Bei "elementweisem" Vorgehen erhält man nicht immer eine monoton wachsende Folge von Kontinuanten, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen, die gleichzeitig demonstrieren sollen, daß der Mojarantensatz im allgemeinen nicht für rationale Zahlen gilt:

- $C(< M(< 3,4 >^3 \circ < 4 > \circ < 3,4 >^2) >^{11} \circ < 3 >) >$
  $C(< M(< 3,4 >^3 \circ < 4 > \circ < 3,4 >^2 > \circ < 3 >) >^{12})$

- $C(< M(< 3 > \circ < 4 >^{44}) >^{45} \circ < 4,3 >) >$
  $C(< M(< 3 > \circ < 4 >^{45}) >^{46} \circ < 3 >) >$
  $C(< M(< 3 > \circ < 4 >^{45} \circ < 3 >) >^{47})$

Die im ersten Teil behandelten Zahlenfolgen sind dadurch charakterisiert, daß in ihnen das Element $b+1$ höchstens einmal weniger als das Element b auftritt. Im zweiten Teil wird die Behauptung auf völlig andere Weise für homogene μ gezeigt, in denen b öfter als $b+1$ vorkommt – die also Eigenschaft (ii) aus Lemma 3 erfüllen –, wobei man noch eine weitere Abschätzung für Kontinuanten erhält.

Es besteht die Vermutung, daß $C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|})$ auch für homogene Zahlenfolgen μ gezeigt werden kann, deren Elemente aus $\{2, 3\}$ sind; allerdings sind die hier verwendeten Methoden für einen entsprechenden Beweis nicht ausreichend.

1. Der für den 1 Teil angekündigte Beweis erfordert eine Reihe von Vorbereitungen (Lemma 4-18).

Definition:

Für $j \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{Z}$, $\sigma =< x_1, \ldots, x_r >\in \mathbf{N}^*$ und eine Folge $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$ reeller Zahlen sei

$$M_j^m = \{\sigma \in \mathbf{N}^j / \|\sigma\| = m\}$$
$$\gamma_\sigma = \begin{cases} \prod_{i=1}^r \gamma_{x_i}, & \text{falls } r \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$S_j(m,\gamma) = \sum_{\sigma \in M_j^m} \gamma_\sigma$$

Beobachtung:

Für $j \geq 1$ ist $S_{j+1}(m,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i S_j(m-i,\gamma)$.

Wir schreiben zur Abkürzung "$\sum_i$" anstelle von "$\sum_{i=1}^{\infty}$".

Definition:

Für $j, k \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{Z}$ und eine Folge $\gamma = (\gamma_1)_{i=1}^{\infty}$ reeller Zahlen sei

$$S_j(m,k,\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j = 0 \\ S_1(k+m,\gamma), & \text{falls } j = 1 \\ \sum_i \gamma_{k+i} S_j(m-i,\gamma), & \text{falls } j > 1. \end{cases}$$

Beobachtung:

Für $j \in \mathbf{N}_0$ ist $S_j(m,0,\gamma) = S_j(m,\gamma)$.

Lemma 4:

Ist $(\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, so gilt $\sum_i i\gamma_i S_j(m-i,\gamma) = \frac{m}{j+1} S_{j+1}(m,\gamma)$ für $j \geq 1$.

Beweis:

Für den Beweis sollen zwei Folgen σ, $\sigma' \in \mathbf{N}^j$ äquivalent heißen, wenn sie durch Permutation ihrer Elemente ineinander übergehen. Mit $[\sigma]$ werden die zugehörigen Äquivalenzklassen bezeichnet. Schließlich sei

$$\mathcal{M}_j^m = \{[\sigma] / \sigma \in M_j^m\}.$$

Dann ist

$$S_j(m,\gamma) = \sum_{\sigma \in M_j^m} \gamma_\sigma = \sum_{[\sigma] \in \mathcal{M}_j^m} \#([\sigma])\gamma_\sigma.$$

Bekanntermaßen ist

$$\#([\sigma]) = |\sigma|! \cdot (\prod_{i=1}^{\infty} anz(i,\sigma)!)^{-1},$$

wenn mit $anz(i,\sigma)$ die Anzahl des Auftretens von i in σ bezeichnet wird. Insbesondere gilt dann für $\sigma \in \mathbf{N}^j$ und $i \in \mathbf{N}$

$$\#([\sigma]) = \#([\sigma \circ < i >]) \cdot \frac{anz(i, \sigma \circ < i >)}{j+1}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_i i\gamma_i S_j(m-i,\gamma) \\
=&\sum_i i\gamma_i \sum_{[\sigma]\in\mathcal{M}_j^{m-i}} \#([\sigma])\gamma_\sigma \\
=&\sum_i i \sum_{[\sigma\circ<i>]\in\mathcal{M}_j^m} \frac{anz(i,\sigma)}{j+1} \cdot \#([\sigma\circ < i >])\gamma_{\sigma\circ<i>} \\
=&\sum_i i \sum_{[\sigma]\in\mathcal{M}_j^m} \frac{anz(i,\sigma)}{j+1} \cdot \#([\sigma])\gamma_\sigma \\
=&\sum_{[\sigma]\in\mathcal{M}_j^m} \frac{m}{j+1} \cdot \#([\sigma])\gamma_\sigma \\
=&\frac{m}{j+1} S_j(m,\gamma).
\end{aligned}$$

∎

Von nun an werden die Summen $S_j(m,k,\gamma)$ nur noch für spezielle Folgen γ betrachtet.

Definition:

Sei $b \in \mathbf{R}$. Eine Folge reeller Zahlen $\beta = (\beta_i)_{i=0}^\infty$ heißt **b-Folge**
$:\Leftrightarrow \beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}$ und $\beta_{i+1} = b\beta_i - \beta_{i-1}$ für $i \geq 1$.

β heißt **normiert** $:\Leftrightarrow \beta_0 = 0$ und $\beta_1 = 1$. Mit $F(b)$ wird die Menge aller b-Folgen bezeichnet. Ist $\beta \in F(b)$ und normiert, so schreiben wir $\beta = NF(b)$.

Beobachtung:

Für $\beta = NF(b)$ und $j \geq 1$ ist $S_j(j,k,\beta) = \beta_{k+1}$.

Lemma 5:

Für $\beta = NF(b)$ und $j \geq 1$ gilt
(i) $S_{j+1}(m+1,k,\beta) = bS_{j+1}(m,k,\beta) - S_{j+1}(m-1,k,\beta) + S_j(m,k,\beta)$,
(ii) $S_j(m,k,\beta) = \beta_{k+1}S_j(m,\beta) - \beta_k S_j(m-1,\beta)$.

Beweis:

Zunächst gilt für $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
&S_{j+1}(m+1,k,\beta) \\
=&\sum_i \beta_{k+i} S_j(m+1-i,k,\beta) \\
=&\sum_{i\geq 2}(b\beta_{k+i-1}-\beta_{k+i-2})S_j(m+1-i,k,\beta)+\beta_{k+1}S_j(m,k,\beta) \\
=&b\sum_i \beta_{k+i}S_j(m-i,k,\beta)-\sum_i \beta_{k+i}S_j(m-1-i,k,\beta) \\
&\qquad +\beta_{k+1}S_j(m,k,\beta)-\beta_k S_j(m-1,k,\beta) \\
=&bS_{j+1}(m,k,\beta)-S_{j+1}(m-1,k,\beta) \\
&\qquad +\beta_{k+1}S_j(m,k,\beta)-\beta_k S_j(m-1,k,\beta). \qquad (*)
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ folgt

$$S_{j+1}(m+1,\beta) = bS_{j+1}(m,\beta) - S_{j+1}(m-1,\beta) + S_j(m,\beta)$$

und man erhält für $j \geq 2$

$$\begin{aligned}
S_{j+1}(m+1,k,\beta) &= \sum_i \beta_{k+i} S_j(m+1-i,\beta) \\
&= \sum_i \beta_{k+i}(bS_j(m-i,\beta) - S_j(m-1-i,\beta) + S_{j-1}(m-i,\beta)) \\
&= bS_{j+1}(m,k,\beta) - S_{j+1}(m-1,k,\beta) + S_j(m,k,\beta).
\end{aligned}$$

Für $j = 1$ ist

$$\begin{aligned}
S_2(m+1,k,\beta) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{k+i}\beta_{m+1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \beta_{k+1}(b\beta_{m-i} - \beta_{m-1-i}) + \beta_{m+k} \\
&= bS_2(m,k,\beta) - S_2(m-1,k,\beta) + S_1(m,k,\beta).
\end{aligned}$$

Damit ist (i) gezeigt.

Durch Subtraktion der Gleichung aus (i) und der Gleichung (*) erhält man (ii). ∎

Lemma 6:

Für $\beta = NF(b)$ und $j \geq 1$ gilt

$$S_{j+1}(m+1,k,\beta) = \frac{m}{j} S_j(m,k,\beta) + \frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta) + S_{j+1}(m-1,k,\beta).$$

Beweis:

Die Aussage wird zunächst für den Fall $k = 0$ durch vollständige Induktion über j bewiesen.

$j = 1$:
Setzt man in Lemma 5 (ii) $j = 1$, so erhält man

$$\beta_{k+1}\beta_m = \beta_{k+m} + \beta_k\beta_{m-1} \quad \text{für } k \geq 0, m \geq 1.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} S_2(m+1,\beta) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i\beta_{m+1-i} = m\beta_m + \sum_{i=2}^{m-1} \beta_{i-1}\beta_{m-i} \\ &= m\beta_m + \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i\beta_{m-1-i} \\ &= mS_1(m,\beta) + S_2(m-1,\beta). \end{aligned}$$

$j \to j+1$:

$$\begin{aligned} &S_{j+2}(m+1,\beta) \\ =&\sum_i \beta_i S_{j+1}(m+1-i,\beta) \\ =&\sum_i \beta_i(\frac{m-i}{j}S_j(m-i,\beta) + S_{j+1}(m-1-i,\beta)) \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ =&\frac{m}{j}S_{j+1}(m,\beta) - \frac{1}{j}\cdot\frac{m}{j+1}S_{j+1}(m,\beta) + S_{j+2}(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 4} \\ =&\frac{m}{j+1}S_{j+1}(m,\beta) + S_{j+2}(m-1,\beta). \end{aligned}$$

Um den Fall $k \geq 1$ zu behandeln, wird Lemma 5 (ii) herangezogen. Man erhält dann zusammen mit der soeben für $k = 0$ bewiesenen Aussage

$$\begin{aligned} S_{j+1}(m+1,k,\beta) &= \beta_{k+1}S_{j+1}(m+1,\beta) - \beta_k S_{j+1}(m,\beta) \\ &= \beta_{k+1}(\frac{m}{j}S_j(m,\beta) + S_{j+1}(m-1,\beta)) \\ &\quad - \beta_k(\frac{m-1}{j}S_j(m-1,\beta) + S_{j+1}(m-2,\beta)) \\ &= \frac{m}{j}(\beta_{k+1}S_j(m,\beta) - \beta_k S_j(m-1,\beta)) + \frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta) \\ &\quad + \beta_{k+1}S_{j+1}(m-1,\beta) - \beta_k S_{j+1}(m-2,\beta) \\ &= \frac{m}{j}S_j(m,k,\beta) + \frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta) + S_{j+1}(m-1,k,\beta). \end{aligned}$$

∎

Aufbauend auf der folgenden Beobachtung werden als nächstes einige Abschätzungen für die Produktsummen $S_j(m,k,\beta)$ bewiesen.

Beobachtung:

Ist $\beta = NF(b)$ und $b \geq 2$ sind alle $\beta_i \geq 0$. Außerdem gilt dann $S_j(m,k,\beta) \geq 0$ sowie $S_j(m,k,\beta) \geq S_j(m-1,k,\beta)$ nach Definition.

Lemma 7:

Ist $\beta = NF(b)$ und $b \geq 2$, so gilt

$$S_j(m,k,\beta) \geq (b - \frac{1}{b-1})S_j(m-1,k,\beta) + S_{j-1}(m-1,k,\beta)$$

und damit auch

$$S_j(m,k,\beta) \geq (b - \frac{1}{b-1})S_j(m-1,k,\beta) \quad \text{für } j \geq 1.$$

Beweis:

Für $j = 1$ folgt nach Definition der normierten b-Folgen und für $j \geq 2$ mit Hilfe von Lemma 5 (i)

$$\begin{aligned} S_j(m,k,\beta) &\geq bS_j(m-1,k,\beta) - S_j(m-2,k,\beta) + S_{j-1}(m-1,k,\beta) \\ &\geq (b - \frac{1}{b-1})S_j(m-1,k,\beta) + S_{j-1}(m-1,k,\beta) \\ &+ \frac{1}{b-1}(bS_j(m-2,k,\beta) - S_j(m-3,k,\beta)) - S_j(m-2,k,\beta). \end{aligned}$$

Da $S_j(m-3,k,\beta) \leq S_j(m-2,k,\beta)$, folgt die Behauptung. ∎

Lemma 8:

Ist $\beta = NF(b)$ und $b \geq 3$, so gilt $S_j(m,k,\beta) \geq (b-1)\beta_k S_j(m,\beta)$ für $j \geq 1$.

Beweis:

Mit Lemma 5 (ii) und Lemma 7 erhält man

$$\begin{aligned} S_j(m,k,\beta) &= \beta_{k+1}S_j(m,\beta) - \beta_k S_j(m-1,\beta) \\ &\geq \beta_k((b - \frac{1}{b-1})S_j(m,\beta) - S_j(m-1,\beta)) \\ &\geq \beta_k((b - \frac{1}{b-1}) - (b - \frac{1}{b-1})^{-1})S_j(m,\beta) \\ &\geq (b-1)\beta_k S_j(m,\beta) \quad \text{für } b \geq 3. \end{aligned}$$

∎

Lemma 9:

Ist $\beta = NF(b)$, so gilt für $j \geq 1$ und $c = (1 - (b - \frac{1}{b-1})^{-2})^{-1}$

(i) $S_{j+1}(m+1,\beta) \leq c\frac{m}{j}S_j(m,\beta)$, falls $b \geq 2$

(ii) $S_{j+1}(m+1,k,\beta) \leq c\frac{m+0.5}{j}S_j(m,k,\beta)$, falls $b \geq 3$.

Beweis:

$$\begin{aligned} S_{j+1}(m+1,k,\beta) &= \frac{m}{j}S_j(m,k,\beta)+\frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta)+S_{j+1}(m-1,k,\beta) \quad \text{nach Lemma 6} \\ &\le \frac{m}{j}S_j(m,k,\beta)+\frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta)+(b-\frac{1}{b-1})^{-2}S_{j+1}(m+1,k,\beta) \text{ nach Lemma 7} \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{1}{c}S_{j+1}(m+1,k,\beta) \le \frac{m}{j}S_j(m,k,\beta)+\frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta), \qquad (*)$$

und Teil (i) der Behauptung folgt sofort, da $\beta_k = 0$ für $k = 0$ gilt.

Für $k \ge 1$ und $b \ge 3$ stellt man fest

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}S_j(m,k,\beta)-\beta_k S_j(m-1,\beta) \\ &= \frac{1}{2}(\beta_{k+1}S_j(m,\beta)-\beta_k S_j(m-1,\beta))-\beta_k S_j(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 5 (ii)} \\ &\ge (\frac{1}{2}(b-\frac{1}{b-1})^2-\frac{3}{2})\beta_k S_j(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 7} \\ &\ge 0, \quad \text{da } (b-\frac{1}{b-1})^2 \ge 3 \text{ für } b \ge 3. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist also

$$\frac{m}{j}S_j(m,k,\beta)+\frac{1}{j}\beta_k S_j(m-1,\beta) \le \frac{m+0.5}{j}S_j(m,k,\beta)$$

und aus (*) folgt Teil (ii) der Behauptung. ∎

Lemma 10:

Ist $\beta = NF(b)$ und $b \ge 3$, so gilt $S_{j+1}(m+1,k,\beta) \le \frac{m}{2}S_j(m,k,\beta)$ für $j \ge 3$.

Beweis:

Für $m < j$ haben beide Seiten der Ungleichung den Wert Null und es ist nichts zu zeigen. Sei also $m \ge j$. Wegen $b \ge 3$ gilt

$$S_{j+1}(m+1,k,\beta) \le (1-(b-\frac{1}{b-1})^{-2})^{-1}\frac{m+0.5}{j}S_j(m,k,\beta)$$

nach Lemma 9 (ii). Da für $m \ge j \ge 3$

$$(1-(b-\frac{1}{b-1})^{-2})^{-1}\frac{m+0.5}{j} \le \frac{25}{21}\cdot\frac{m+0.5}{3} \le \frac{m}{2},$$

folgt die Behauptung. ∎

Lemma 11:

Für $\beta = NF(b)$ mit $b \ge 2$ und $k \ge m \ge 1$ gilt

$$\frac{1}{k+m}S_2(k+m,\beta) \ge \frac{1}{m}S_2(m,k,\beta)$$

und

$$\frac{1}{k+m}S_2(k+m-1,\beta) \ge \frac{1}{m}(S_2(m-1,k,\beta)+\beta_k\beta_{m-1}).$$

Beweis:

Setzt man in Lemma 5 (ii) $j = 1$ und $k - 1$ für k, erhält man $\beta_k \beta_l = \beta_{k+l-1} + \beta_{k-1}\beta_{l-1}$.

Durch vollständige Induktion über l kann dann
(1) $\beta_k \beta_l = \sum_{i=1}^{l} \beta_{k+l+1-2i}$ für $k \geq l$ gezeigt werden.

Durch vollständige Induktion über m wird als nächstes
(2) $S_2(m,k,\beta) = \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\beta_{k+m+1-2i}$ für $k \geq m-1$ bewiesen.

$m \leq 1$: beide Seiten von (2) haben den Wert Null
$m = 2$: $\beta_{k+1} = 1 \cdot \beta_{k+1}$

$m \to m+1$: Nach Lemma 9 gilt

$$S_2(m+1,k,\beta) = m\beta_{k+m} + \beta_k \beta_{m-1} + S_2(m-1,k,\beta).$$

Daraus folgt aus (1) und nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} S_2(m+1,k,\beta) &= m\beta_{k+m} + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_{k+m-2i} + \sum_{i=1}^{m-2} (m-1-i)\beta_{k+m-2i} \\ &= \sum_{i=o}^{m-1} (m-i)\beta_{k+m-2i} = \sum_{i=1}^{m} (m+1-i)\beta_{k+m+2-2i}. \end{aligned}$$

Damit ist (2) bewiesen.

Aus (1) und (2) folgt sofort für $k \geq m-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} (3) \qquad S_2(m-1,k,\beta) + \beta_k\beta_{m-1} &= \sum_{i=1}^{m-2} (m-1-i)\beta_{k+m-2i} + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_{k+m-2i} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\beta_{k+m-2i}. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$S_2(k+m,\beta) = (k+m-1)\beta_{k+m-1} + S_2(k+m-2,\beta)$$

nach Lemma 9, woraus

(4) $S_2(k+m,\beta) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k+m}{2} \rfloor} (k+m+1-2i)\beta_{k+m+1-2i}$

und damit auch

(4') $S_2(k+m-1,\beta) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k+m-1}{2} \rfloor} (k+m-2i)\beta_{k+m-2i}$

gefolgert werden kann (Beweis ebenfalls durch vollständige Induktion über m).

Ein Vergleich der rechten Seiten von (2) und (4) bzw. von (3) und (4') liefert dann sofort die Behauptung. ∎

Definition:

Für eine unendliche Folge reeller Zahlen $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$ und $q \in \mathbf{R}$, $r, t, k \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{Z}$ sei

$$S_r^t(q, m, k, \gamma) = \sum_{j=r}^{t} q^{j-1} S_j(m, k, \gamma).$$

Anstelle von $S_r^t(q, m, 0, \gamma)$ wird auch $S_r^t(q, m, \gamma)$ geschrieben.

Lemma 12:

Für $\beta \doteq NF(b)$ und $r \geq 2$ gilt

$$S_r^{m+1}(q, m+1, k, \beta) = bS_r^m(q, m, k, \beta) - S_r^{m-1}(q, m-1, k, \beta) + qS_{r-1}^m(q, m, k, \beta).$$

Ist $m + k \geq 1$, so gilt die Gleichung auch für $r = 1$.

Beweis:

Für $r \geq 2$ erhält man mit Hilfe vom Lemma 5(i)

$$\begin{aligned}
&S_r^{m+1}(q, m+1, k, \beta) \\
&= \sum_{j=r}^{m+1} q^{j-1} S_j(m+1, k, \beta) \\
&= \sum_{j=r}^{m+1} q^{j-1}(bS_j(m, k, \beta) - S_j(m-1, k, \beta) + S_{j-1}(m, k, \beta)) \\
&= b\sum_{j=r}^{m} q^{j-1} S_j(m, k, \beta) - \sum_{j=r}^{m-1} q^{j-1} S_j(m-1, k, \beta) + q \sum_{j=r-1}^{m} q^{j-1} S_j(m, k, \beta) \\
&= bS_r^m(q, m, k, \beta) - S_r^{m-1}(q, m-1, k, \beta) + qS_{r-1}^m(q, m, k, \beta).
\end{aligned}$$

Ist $m + k \geq 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
S_1(m+1, k, \beta) = \beta_{k+m+1} &= b\beta_{k+m} - \beta_{k+m-1} \\
&= bS_1(m, k, \beta) - S_1(m-1, k, \beta) + S_0(m, k, \beta)
\end{aligned}$$

und die Ersetzung von $S_j(m+1, k, \beta)$ im zweiten Schritt ist auch für $j = 1$ korrekt. ∎

Lemma 13:

Ist $\beta = NF(b)$ und $b \geq 3$, so gilt für $q \geq -1$ und $r \geq 1$

$$S_r^{m+1}(q, m+1, k, \beta) \begin{cases} \geq S_r^m(q, m, k, \beta) \geq 0, & \text{falls } q \geq 0 \text{ oder } (q < 0 \text{ und } r \text{ ungerade}) \\ \leq S_r^m(q, m, k, \beta) \leq 0, & \text{falls } q < 0 \text{ und } r \text{ gerade} \end{cases}$$

Beweis:

Für normierte b-Folgen β mit $b \geq 3$ gilt $S_j(m+1,k,\beta) \geq S_j(m,k,\beta) \geq 0$ und die Aussage folgt sofort für $q \geq 0$.

Sei also $-1 \leq q \leq 0$. Für $m < r-1$ ist nichts zu zeigen. Für $m \geq r-1$ wird der Beweis durch vollständige Induktion über m geführt.

$m = r-1$:
Dann ist $S_r^r(q,r,k,\beta) = q^{r-1}\beta_{k+1}$ und

$$q^{r-1}\beta_{k+1} \begin{cases} \geq S_r^{r-1}(q,r-1,k,\beta) = 0, & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ \leq S_r^{r-1}q,r-1,k,\beta) = 0, & \text{falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

$m \rightarrow m+1$:
Mit Lemma 12 erhält man für $r \geq 1$

$$\begin{aligned} &S_r^{m+2}(q,m+2,k,\beta) \\ &\quad = bS_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) - S_r^m(q,m,k,\beta) + qS_{r-1}^m(q,m+1,k,\beta) \\ &\quad = (b-1+q)S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) \\ &\qquad + S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) - S_r^m(q,m,k,\beta) + q^{r-1}, S_{r-1}(m+1,k,\beta). \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme und weil $q \leq 0$, ist

$$S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) - S_r^m(q,m,k,\beta) + q^{r-1}S_{r-1}(m+1,k,\beta) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ \leq 0, & \text{falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt, da $b-1+q \geq 1$, wieder nach Induktionsannahme

$$S_r^{m+2}(q,m+2,k,\beta) \begin{cases} \geq (b-1+q)S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) \geq S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) \geq 0, & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ \leq (b-1+q)S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) \leq S_r^{m+1}(q,m+1,k,\beta) \leq 0, & \text{falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

∎

Lemma 14:

Für $\beta = NF(b)$ mit $b \geq 3$ gilt

$$S_3^{m+1}(q,m+1,\beta) \leq mq^2 S_2(m,\beta),$$

sofern $0 \leq q \leq \frac{1}{m}$.

Beweis:

Für $m < 2$ ist nichts zu zeigen. Sei also $m \geq 2$. Die Behauptung wird durch vollständige Induktion über m bewiesen.

$m = 2$: $\quad S_3^3(q,3,\beta) = q^2\beta_1 \leq 2q^2 S_2(2,\beta)$

$m \to m+1$:

$$\begin{aligned} S_3^{m+2}(q,m+2,\beta) &= \sum_{j=3}^{m+2} q^{j-1} S_j(m+2,\beta) \\ &\leq \sum_{j=3}^{m+2} q^{j-1} c \frac{m+1}{j-1} S_{j-1}(m+1,\beta) \qquad \text{nach Lemma 9(i).} \end{aligned}$$

Dabei ist $c = (1-(b-\frac{1}{b-1})^{-2})^{-1} \leq \frac{25}{21}$ für $b \geq 3$ und man erhält

$$\begin{aligned} S_3^{m+2}(q,m+2,\beta) &\leq \frac{25}{21}\frac{m+1}{2} q \sum_{j=3}^{m+2} q^{j-2} S_{j-1}(m+1,\beta) \\ &= \frac{25}{21}\frac{m+1}{2} q(qS_2(m+1,\beta) + S_3^{m+1}(q,m+1,\beta)) \\ &\leq \frac{25}{21}\frac{m+1}{2} q(qS_2(m+1,\beta) + mq^2 S_2(m,\beta)) \qquad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= \frac{25}{21}\frac{1}{2}(m+1)q^2(S_2(m+1,\beta) + mqS_2(m,\beta)). \end{aligned}$$

Da $mq \leq 1$ und

$$\begin{aligned} S_2(m,\beta) &\leq (b-\frac{1}{b-1})^{-1} S_2(m+1,\beta) \qquad \text{nach Lemma 7} \\ &\leq \frac{2}{5} S_2(m+1,\beta) \text{ für } b \geq 3, \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} S_3^{m+2}(q,m+2,\beta) &\leq \frac{25}{21}\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+1)(m+1)q^2 S_2(m+1,\beta) \\ &\leq (m+1)q^2 S_2(m+1,\beta). \end{aligned}$$

∎

Lemma 15:

Ist $\gamma \in F(c)$ und $\beta = NF(b)$ mit

$$\beta_k = \gamma_0 \text{ und } \beta_{k+1} = \gamma_1 \text{ für } k \in \mathbf{N}_0,$$

so gilt

$$\gamma_{m+1} = S_1^{m+1}(c-b, m+1, k, \beta) \text{ für } m \geq 0.$$

Beweis: durch vollständige Induktion über m.

$m = 0$: $\gamma_1 = \beta_{k+1} = S_1^1(c-b, 1, k, \beta)$

$m = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= c\gamma_1 - \gamma_0 = b\beta_{k+1} - \beta_k + (c-b)\beta_{k+1} \\ &= \beta_{k+2} + (c-b)\beta_{k+1} = S_1(2,k,\beta) + (c-b)S_2(2,k,\beta) \\ &= S_1^2(c-b,2,k,\beta).\end{aligned}$$

$m \to m+1$:

$$\begin{aligned}\gamma_{m+2} &= c\gamma_{m+1} - \gamma_m = b\gamma_{m+1} - \gamma_{m-1} + (c-b)\gamma_{m+1} \\ &= bS_1^{m+1}(c-b,m+1,k,\beta) - S_1^m(c-b,m,k,\beta) \\ &\quad + (c-b)S_1^{m+1}(c-b,m+1,k,\beta) \quad \text{nach Induktionsannahme.}\end{aligned}$$

Mit Lemma 12 folgt $\gamma_{m+2} = S_1^{m+2}(c-b, m+2, k, \beta)$. ∎

Lemma 16:

Sei $b \geq 4$ und $m \geq 2$. Dann gilt für $\beta = NF(b)$, $\gamma = NF(b - \frac{1}{m})$ und $\gamma' = NF(b - \frac{2}{m})$
(i) $\gamma_{m+1} \geq \beta_{m+1} - \beta_m$,
(ii) $\gamma'_{m+1} \geq \beta_{m+1} - 2\beta_m + \beta_{m-1}$,
(iii) $\gamma'_m \leq \beta_m - \beta_{m-1}$, falls $m \geq 3$.

Beweis:

Da β, γ und γ' normiert sind, ist $\beta_0 = \gamma_0 = \gamma' = 0$ und $\beta_1 = \gamma_1 = \gamma'_1 = 1$. Man erhält dann mit Lemma 15

$$\begin{aligned}\gamma_{m+1} &= S_1^{m+1}(-\frac{1}{m}, m+1, \beta), \\ \gamma'_{m+1} &= S_1^{m+1}(-\frac{2}{m}, m+1, \beta) \text{ und} \\ \gamma'_m &= S_1^m(-\frac{2}{m}, m, \beta).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $b \geq 4$:

$$b - \frac{1}{b-1} \geq \frac{11}{3} \text{ und } (1 - (b - \frac{1}{b-1})^{-2})^{-1} \leq \frac{11}{10}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\begin{aligned}(*) \quad S_4(m+1,\beta) &= \frac{m}{3}S_3(m,\beta) + S_4(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 6} \\ &= \frac{m(m-1)}{6}S_2(m-1,\beta) + \frac{m}{3}S_3(m-2,\beta) + S_4(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 6} \\ &\leq \frac{m(m-1)}{6}S_2(m-1,\beta) + (\frac{m}{3} + \frac{m-2}{3}\frac{11}{10})S_3(m-2,\beta) \quad \text{nach Lemma 9} \\ &\leq \frac{m(m-1)}{6}S_2(m-1,\beta) + \frac{m}{3}\frac{43}{30}\frac{3}{11}S_3(m-1,\beta) \quad \text{nach Lemma 7} \\ &\leq \frac{m^2}{6}S_2(m-1,\beta) + \frac{m}{2}S_3(m-1,\beta).\end{aligned}$$

Um (i) zu zeigen, stellt man fest

$$\begin{aligned}
\gamma_{m+1} &= S_1^{m+1}(-\frac{1}{m}, m+1, \beta) \\
&\geq S_1^4(-\frac{1}{m}, m+1, \beta) \quad \text{nach Lemma 14} \\
&\geq \beta_{m+1} - \frac{1}{m}(m\beta_m + S_2(m-1, \beta)) \\
&\quad + \frac{1}{m^2}(\frac{m}{2}S_2(m, \beta) + S_3(m-1, \beta)) \\
&\quad - \frac{1}{m^3}(\frac{m^2}{6}S_2(m-1, \beta) + \frac{m}{2}S_3(m-1, \beta)) \quad \text{nach (*) und Lemma 6} \\
&\geq \beta_{m+1} - \beta_m + \frac{1}{m}(\frac{1}{2}S_2(m, \beta) - \frac{7}{6}S_2(m-1, \beta)) \\
&\geq \beta_{m+1} - \beta_m,
\end{aligned}$$

denn $S_2(m, \beta) \geq \frac{11}{3}S_2(m-1, \beta)$ nach Lemma 7.

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\gamma'_{m+1} &\geq \beta_{m+1} - \frac{2}{m}(m\beta_m + S_2(m-1, \beta)) \\
&\quad + \frac{4}{m^2}(\frac{m}{2}S_2(m, \beta) + S_3(m-1, \beta)) \\
&\quad + \frac{8}{m^3}(\frac{m^2}{6}S_2(m-1, \beta) + \frac{m}{2}S_3(m-1, \beta)) \\
&= \beta_{m+1} - 2\beta_m + \frac{2}{m}(S_2(m, \beta) - \frac{5}{3}S_2(m-1, \beta)).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 6 und 9 ist

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{m}(S_2(m, \beta) - \frac{5}{3}S_2(m-1, \beta)) \\
&\quad = \frac{2}{m}((m-1)\beta_{m-1} + S_2(m-2, \beta) - \frac{5}{3}(m-2)\beta_{m-2} - \frac{5}{3}S_2(m-3, \beta)) \\
&\quad \geq \frac{2}{m}((m-1)\beta_{m-1} - \frac{5}{3}\frac{3}{11}(m-2)\beta_{m-1}) \\
&\quad \geq \beta_{m-1} \quad \text{für } m \geq 2.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\gamma'_{m+1} \geq \beta_{m+1} - 2\beta_m + \beta_{m-1}$ und auch (ii) ist bewiesen.

Es verbleibt (iii) zu zeigen. Sei $m \geq 3$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\gamma'_m &= S_1^m(-\frac{2}{m}, m, \beta) \\
&\leq S_1^3(-\frac{2}{m}, m, \beta) \quad \text{nach Lemma 14} \\
&\leq \beta_m - \frac{2}{m}S_2(m, \beta) + \frac{4}{m^2}\frac{m-1}{2}\frac{11}{10}S_2(m-1, \beta) \quad \text{nach Lemma 9} \\
&\leq \beta_m - \frac{2}{m}(1 - \frac{m-1}{m}\frac{11}{10}\frac{3}{11})S_2(m, \beta) \quad \text{nach Lemma 7} \\
&\leq \beta_m - \frac{2}{m}(1 - \frac{m-1}{m}\frac{3}{10})(m-1)\beta_{m-1} \quad \text{nach Lemma 6} \\
&\leq \beta_m - \beta_{m-1}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 17:

Seien $b \in \mathbf{R}, b \geq 4$, $m, p, k \in \mathbf{N}$ mit $k \geq m \geq 2$ und $\frac{1}{m+1} \leq \frac{p}{k} \leq \frac{2}{m}$, falls $m \geq 3$, bzw. $\frac{1}{3} \leq \frac{p}{k} \leq \frac{2}{3}$, falls $m = 2$.

Dann gilt für $\beta = NF(b - \frac{p}{k})$, $\alpha = NF(b - \frac{p+1}{k+m})$ und $\gamma \in F(b)$ mit $\gamma_0 = \beta_k$ und $\gamma_1 = \beta_{k+1}$

(i) $\alpha_{k+m+1} \geq \gamma_{m+1} - \gamma_m$

(ii) $\alpha_{k+m} \leq \gamma_m$

Beweis:

Aus Lemma 15 folgt

(1) $\gamma_{m+1} = S_1^{m+1}(\frac{p}{k}, m+1, k, \beta)$

(2) $\gamma_m = S_1^m(\frac{p}{k}, m, k, \beta)$

(3) $\alpha_{k+m+1} = S_1^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta)$

(4) $\alpha_{k+m} = S_1^{k+m}(q, k+m, \beta)$,

wobei $q = (m\frac{p}{k} - 1)\frac{1}{k+m}$.

Wir zeigen zunächst (i), nämlich $A = \alpha_{k+m+1} - \gamma_{m+1} + \gamma_m \geq 0$.

Aus (1) und (2) folgt mit Lemma 10, da $\frac{k}{p} \geq \frac{m}{2}$

$$\begin{aligned}
\gamma_{m+1} - \gamma_m &= S_1^3(\frac{p}{k}, m+1, k, \beta) - S_1^2(\frac{p}{k}, m, k, \beta) + \sum_{j=4}^{m+1} (\frac{p}{k})^{j-1}(S_j(m+1, k, \beta) - \frac{k}{p} S_{j-1}(m, k, \beta)) \\
&\leq S_1^3(\frac{p}{k}, m+1, k, \beta) - S_1^2(\frac{p}{k}, m, k, \beta).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
A &\geq S_1^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta) - S_1^3(\frac{p}{k}, m+1, k, \beta) + S_1^2(\frac{p}{k}, m, k, \beta) \\
&= S_2^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta) - S_2^3(\frac{p}{k}, m+1, k, \beta) + S_1^2(\frac{p}{k}, m, k, \beta)
\end{aligned}$$

und Lemma 6 liefert

$$\begin{aligned}
A \geq\ & (m\frac{p}{k} - 1)\beta_{k+m} + qS_2(k+m-1, \beta) + S_3^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta) \\
& - \frac{p}{k}(m\beta_{k+m} + \beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1, k, \beta)) \\
& - (\frac{p}{k})^2(\frac{m}{2}S_2(m, k, \beta) + \frac{1}{2}\beta_k S_2(m-1, \beta) + S_3(m-1, k, \beta)) \\
& + \beta_{k+m} + \frac{p}{k}S_2(m, k, \beta) \\
=\ & qS_2(k+m-1, \beta) + S_3^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta) \\
& - \frac{p}{k}(\beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1, k, \beta)) \\
& - (\frac{p}{k})^2(\frac{1}{2}\beta_k S_2(m-1, \beta) + S_3(m-1, k, \beta)) \\
& + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})S_2(m, k, \beta).
\end{aligned}$$

Im folgenden sei $b' = b - \frac{p}{k} - (b - 1 - \frac{p}{k})^{-1}$ und $c = (1 - b'^{-2})^{-1}$.

Dann erhält man mit Lemma 9

$$
\begin{aligned}
A \geq\ & qS_2(k+m-1,\beta) + S_3^{k+m+1}(q,k+m+1,\beta) \\
& - \frac{p}{k}(\beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1,k,\beta)) \\
& - (\frac{p}{k})^2\frac{c}{2}((m-2)\beta_k\beta_{m-2} + (m-1.5)S_2(m-2,k,\beta)) \\
& + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})S_2(m,k,\beta).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Um $A \geq 0$ zu beweisen, werden nun die Fälle $m\frac{p}{k} \geq 1$ und $m\frac{p}{k} < 1$ unterschieden.

1. Fall:
$m\frac{p}{k} \geq 1$, d.h. $q > 0$. Dann gilt zunächst

$$S_3^{k+m+1}(q,k+m+1,\beta) \geq qS_3(k+m+1,\beta) \geq (m\frac{p}{k} - 1)^2\frac{1}{k+m}\frac{1}{2}S_2(k+m,\beta)$$

nach Lemma 9 und mit Lemma 11 folgt

$$S_3^{k+m+1}(q,k+m+1,\beta) \geq (m\frac{p}{k} - 1)^2\frac{1}{2m}S_2(m,k,\beta)$$

sowie

$$qS_2(k+m-1,\beta) \geq (\frac{p}{k} - \frac{1}{m})(S_2(m-1,k,\beta) + \beta_k\beta_{m-1}).$$

Wendet man die beiden letzten Ungleichungen auf (5) an und berücksichtigt $\frac{p}{k} \leq \frac{2}{m}$, erhält man

$$
\begin{aligned}
A \geq\ & -\frac{1}{m}(\beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1,k,\beta)) \\
& - \frac{2}{m^2}c((m-2)\beta_k\beta_{m-2} + (m-1.5)S_2(m-2,k,\beta)) \\
& + \frac{1}{2m}S_2(m,k,\beta).
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 5(i) und $b - \frac{p}{k} \geq 4 - \frac{2}{m}$ folgt

$$
\begin{aligned}
A \geq\ & -\frac{1}{m}(\beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1,k,\beta)) \\
& - \frac{2}{m^2}c((m-2)\beta_k\beta_{m-2} + (m-1.5)S_2(m-2,k,\beta)) \\
& + \frac{1}{2m}((4 - \frac{2}{m})S_2(m-1,k,\beta) - S_2(m-2,k,\beta) + \beta_{k+m-1}).
\end{aligned}
$$

Da $b - \frac{p}{k} \geq 3$, ist $\frac{1}{2}\beta_{k+m-1} \geq \frac{b-1-\frac{p}{k}}{2}\beta_k\beta_{m-1} \geq \beta_k\beta_{m-1}$ nach Lemma 8 und man erhält

$$
\begin{aligned}
A \geq\ & -\frac{2}{m^2}((m-2)\beta_k\beta_{m-2} + (m-1.5)S_2(m-2,k,\beta)) \\
& + \frac{1}{m}(1 - \frac{1}{m})S_2(m-1,k,\beta) - \frac{1}{2m}S_2(m-2,k,\beta).
\end{aligned}
$$

Für $m = 2$ folgt dann sofort $A \geq 0$, denn alle Ausdrücke auf der rechten Seite der Ungleichung haben den Wert Null.

Sei also $m \geq 3$. Dann folgt aus Lemma 7

$$A \geq -\frac{2}{m^2}c((m-2)\beta_k\beta_{m-2} + (m-1.5)S_2(m-2,k,\beta)) \\ + \frac{1}{m}((1-\frac{1}{m})b' - \frac{1}{2})S_2(m-2,k,\beta) + \frac{1}{m}(1-\frac{1}{m})\beta_{k+m-2}.$$

Für $m \geq 3$ stellt man fest, daß

$b - 1 - \frac{p}{k} \geq \frac{7}{3}$,
$b' = b - \frac{p}{k} - (b - 1 - \frac{p}{k})^{-1} \geq \frac{20}{7}$ und
$c = (1 - b'^{-2})^{-1} \leq \frac{8}{7}$;

folglich ist nach Lemma 8

$$\beta_{k+m-2} \geq (b - 1 - \frac{p}{k})\beta_k\beta_{m-2} \geq 2c\beta_k\beta_{m-2}$$

und man erhält

$$A \geq \frac{1}{m}(\frac{m-1}{m}b' - \frac{1}{2} - \frac{m-1.5}{m}2c)S_2(m-2,k,\beta).$$

Für $m = 3$ ist $S_2(m-2,k,\beta) = 0$ und damit $A \geq 0$, so daß man von $m \geq 4$ ausgehen kann.

In diesem Fall ist $b' \geq 3$ und $c \leq \frac{9}{8}$, woraus ebenfalls $A \geq 0$ folgt.

2. Fall: $m\frac{p}{k} < 1$, d.h. $q < 0$.

Dann folgt zunächst aus Lemma 13 und 9

$$S_3^{k+m+1}(q, k+m+1, \beta) \geq 0 \text{ und } qS_2(k+m-1,\beta) \geq (m\frac{p}{k} - 1)c\beta_{k+m-2}.$$

Geht man dann wieder von (5) aus und berücksichtigt die beiden letzten Ungleichungen sowie $\frac{p}{k} < \frac{1}{m}$, erhält man

$$A \geq (m\frac{p}{k} - 1)c\beta_{k+m-2} + \frac{p}{k}[-\beta_k\beta_{m-1} - S_2(m-1,k,\beta) \\ - \frac{c}{2}(\frac{m-2}{m}\beta_k\beta_{m-2} + \frac{m-1.5}{m}S_2(m-2,k,\beta)) + (1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})S_2(m,k,\beta)]. \tag{6}$$

Sei zuerst $m = 2$. Dann ist $b' \geq 3$ und $c \leq \frac{9}{8}$, d.h.

$$A \geq (2\frac{p}{k} - 1)\frac{9}{8}\beta_k - \frac{p}{k}\beta_k + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k})\beta_{k+1} \\ = ((2\frac{p}{k} - 1)\frac{9}{8} + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k})(4 - \frac{p}{k}))\beta_k - \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k})\beta_{k-1}.$$

Eine Rechnung zeigt, daß der Ausdruck vor β_k für $\frac{1}{3} \leq \frac{p}{k} < \frac{1}{2}$ positiv ist, folglich ist nach Lemma 7

$$A \geq (3((2\frac{p}{k} - 1)\frac{9}{8} + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k})(4 - \frac{p}{k})) - \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k}))\beta_{k-1}$$

und eine weitere Rechnung zeigt $A \geq 0$ für $\frac{1}{3} \leq \frac{p}{k} < \frac{1}{2}$.

Sei daher $m \geq 3$. Dann folgt aus (6) mit Lemma 7

$$\begin{aligned}A \geq (m\frac{p}{k} - 1)c\beta_{k+m-2} + \frac{p}{k}[-(1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m})(\beta_k\beta_{m-1} + S_2(m-1,k,\beta)) \\ + (1 - \frac{p}{m}\frac{m}{2})S_2(m,k,\beta)].\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit Lemma 6 und weil $\beta_k\beta_{m-1} = \beta_{k+m-2} + \beta_{k-1}\beta_{m-2}$ nach Lemma 5(ii)

$$\begin{aligned}A \geq\ & [(m\frac{p}{k} - 1)c - \frac{p}{k}(1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m})(m-1)]\beta_{k+m-2} \\ & + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})(m-1)\beta_{k+m-1} \\ & + \frac{p}{k}[-(1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m})(\beta_{k-1}\beta_{m-2} + \beta_k\beta_{m-3} + S_2(m-3,k,\beta)) \\ & \quad + (1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})(\beta_k\beta_{m-2} + S_2(m-2,k,\beta))].\end{aligned}$$

Da $b' = b - \frac{p}{k} - (b - \frac{p}{k} - 1)^{-1} \geq \frac{13}{4}$ und $c = (1 - b'^{-2})^{-1} \leq \frac{10}{9}$ für $m \geq 3$, folgt mit Lemma 7 und 8

$$\begin{aligned}& (1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})(\beta_k\beta_{m-2} + S_2(m-2,k,\beta)) \\ & \geq \frac{1}{2}(b'\beta_{k-1}\beta_{m-2} + b'S_2(m-3,k,\beta) + \beta_{k+m-3}) \\ & \geq \frac{1}{2}(b'\beta_{k-1}\beta_{m-2} + b'S_2(m-3,k,\beta) + (b - \frac{p}{k} - 1)\beta_k\beta_{m-3}) \\ & \geq (1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m})(\beta_{k-1}\beta_{m-2} + \beta_k\beta_{m-3} + S_2(m-3,k,\beta)),\end{aligned}$$

denn $\frac{b'}{2} \geq \frac{1}{2}(b - \frac{p}{k} - 1) \geq \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{c}{2b'}$.

Also ist

$$A \geq [(m\frac{p}{k} - 1)c - \frac{p}{k}(1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m})(m-1)]\beta_{k+m-2} + \frac{p}{k}(1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})(m-1)\beta_{k+m-1}$$

und damit

$$A \geq [(m\frac{p}{k} - 1)c + \frac{p}{k}((1 - \frac{p}{k}\frac{m}{2})b' - (1 + \frac{c}{2b'}\frac{m-1.5}{m}))(m-1)]\beta_{k+m-2} \qquad \text{nach Lemma 7.}$$

Mit $b' \geq \frac{13}{4}$, $c \leq \frac{10}{9}$ und $\frac{1}{m+1} \leq \frac{p}{k} < \frac{1}{m}$ zeigt man dann leicht $A \geq 0$ für $m \geq 3$.

Es verbleibt (ii), nämlich $B = \gamma_m - \alpha_{k+m} \geq 0$ zu zeigen.

Mit (2) und (4) folgt zunächst

$$B = S_2^m(\frac{p}{k}, m, k, \beta) - S_2^{k+m}(q, k+m, \beta).$$

Ist dann $q \leq 0$, so ist $S_2^{k+m}(q, k+m, \beta) \leq 0$ und es folgt sofort $B \geq 0$.

Sei daher $q = (m\frac{p}{k} - 1)\frac{1}{k+m} > 0$.

Weil $\frac{p}{k} \le \frac{2}{m}$, folgt $q \le \frac{1}{k+m}$ und man erhält mit Lemma 14

$$S_3^{k+m}(q, k+m, \beta) \le (k+m-1)q^2 S_2(k+m-1, \beta) \le q S_2(k+m-1, \beta)$$

und folglich

$$B \ge S_2^m(\frac{p}{k}, m, k, \beta) - q(S_2(k+m, \beta) + S_2(k+m-1, \beta)).$$

Schließlich folgt aus Lemma 6 und 9

(7)

$$B \ge S_2^m(\frac{p}{k}, m, k, \beta) - (m\frac{p}{k} - 1)(\beta_{k+m-1} + c\beta_{k+m-3} + c\beta_{k+m-2}.$$

Sei zunächst $m \ge 4$, dann ist $b' = b - \frac{p}{k} - (b - \frac{p}{k} - 1)^{-1} \ge 3$ und $c = (1 - b'^{-2})^{-1} \ge \frac{9}{8}$.

Weiterhin ist

$$S_2^m(\frac{p}{k}, m, k, \beta) \ge \frac{p}{k} S_2(m, k, \beta) \ge \frac{p}{k}(m-1)\beta_{k+m-1} \quad \text{nach Lemma 6}$$

und aus (7) folgt

$$B \ge \frac{p}{k}[(\frac{k}{p} - 1)\beta_{k+m-1} - (m - \frac{k}{p})c(\beta_{k+m-3} + \beta_{k+m-2})].$$

Da $\frac{k}{p} \ge \frac{m}{2}$ und $\beta_{k+m-3} + \beta_{k+m-2} \le (1 + \frac{1}{b'})\frac{1}{b'}\beta_{k+m-1}$ nach Lemma 7, erhält man

$$B \ge \frac{p}{k}((\frac{m}{2} - 1) - \frac{m}{2}c(1 + \frac{1}{b'})\frac{1}{b'})\beta_{k+m-1}.$$

Für $m \ge 4$, $b' \ge 3$ und $c \le \frac{9}{8}$ folgt dann sofort $B \ge 0$.

Es verbleibt $B \ge 0$ für $m \in \{2, 3\}$ zu zeigen. In diesen Fällen ist $b' \ge \frac{20}{7}$ und $c \le \frac{8}{7}$. Sei zuerst $m = 3$, dann folgt aus (7)

$$B \ge \frac{p}{k}(\beta_{k+1}\beta_2 + \beta_{k+2}) + (\frac{p}{k})^2\beta_{k+1} - (3\frac{p}{k} - 1)(\beta_{k+2} + c\beta_k + c\beta_{k+1}).$$

Da $\beta_{k+1}\beta_2 = \beta_{k+2} + \beta_k$, erhält man

$$B \ge \frac{p}{k}[(\frac{k}{p} - 1)\beta_{k+2} - ((3 - \frac{k}{p})c - \frac{p}{k})\beta_{k+1} - ((3 - \frac{k}{p})c - 1)\beta_k]$$

und mit $\frac{k}{p} \ge \frac{3}{2}$ und Lemma 7 folgt

$$\begin{aligned} B &\ge \frac{p}{k}[\frac{1}{2}\beta_{k+2} - (\frac{3}{2}c - \frac{2}{3})\beta_{k+1} - (\frac{3}{2}c - 1)\beta_k] \\ &\ge \frac{p}{k}[(\frac{b'}{2} - (\frac{3}{2}c - \frac{2}{3}))b' - (\frac{3}{2}c - 1)]\beta_k. \end{aligned}$$

Da $b' \ge \frac{20}{7}$ und $c \le \frac{8}{7}$ folgt dann $B \ge 0$ für $m = 3$.

In entsprechender Weise folgt aus (7) für $m = 2$

$$\begin{aligned} B &\ge \frac{p}{k}\beta_{k+1} - (2\frac{p}{k} - 1)(\beta_{k+1} + c\beta_{k-1} + c\beta_k) \\ &\ge \frac{p}{k}[(\frac{k}{p} - 1)\beta_{k+1} - (2 - \frac{k}{p})c(\beta_{k-1} + \beta_k)]. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist ebenfalls $\frac{k}{p} \geq \frac{3}{2}$, d.h.

$$B \geq \frac{p}{k}[\frac{1}{2}\beta_{k+1} - \frac{1}{2}c(\beta_{k-1} + \beta_k)]$$

und mit Lemma 7 und weil $b' \geq \frac{20}{7}$ und $c \leq \frac{8}{7}$ folgt

$$B \geq \frac{p}{k}[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c(1 + \frac{1}{b'})\frac{1}{b'}]\beta_k \geq 0.$$

∎

Lemma 18:

Seien $\mu, \mu' \in \mathbf{R}^*$ und $x, y \in \mathbf{R}$. Ist dann $C(\mu) \leq C(\mu')$ und $C(\mu\circ < x >) \geq C(\mu'\circ < y >)$, so gilt $C(\mu\circ < x > \circ\sigma) \geq C(\mu'\circ < y > \circ\sigma)$ für alle $\sigma \in \mathbf{R}^+_{\geq 2}$.

Beweis:

Sei $\sigma =< x_1, \ldots, x_k >\in \mathbf{R}^+_{\geq 2}$. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(\mu\circ < x, x_1, \ldots, x_{i-1} >) - C(\mu'\circ < y, x_1, \ldots, x_{i-1} >) \\ &\leq C(\mu\circ < x, x_1, \ldots, x_i >) - C(\mu'\circ < y, x_1, \ldots, x_i >) \end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq k$. ∎

Satz 19:

Für jede homogene Zahlenfolge $\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 3}$ mit $||\mu||mod|\mu| \geq \lfloor\frac{|\mu|}{2}\rfloor$ gilt

$$C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|}).$$

Beweis:

1. Fall: μ ist elementar.

Dann existiert $b \in \mathbf{N}_{\geq 4}$, $m \geq 2$, so daß

a) $\mu =< b >^{m-1}$
oder b) $\mu =< b-1 > \circ < b >^{m-1}$
oder c) $\mu =< b >^{m-1} \circ < b-1 >$.

Im Fall a) ist nichts zu beweisen. Im Fall b) und c) ist zu berücksichtigen, daß $C(\mu) = C(sp(\mu))$ für beliebige $\mu \in \mathbf{R}^*$ gilt, da die Umkehrung der Reihenfolge der Elemente von μ lediglich eine Spiegelung der Determinanten an der Nebendiagonalen bedeutet. Folglich ist es ausreichend Fall c) zu betrachten.

Sei $\beta = NF(b)$ und $\gamma = NF(b - \frac{1}{m})$. Dann folgt nach Definition der Kontinuanten und mit Lemma 16(i)

$$\begin{aligned} C(\mu) &= C(< b >^{m-1} \circ < b-1 >) = C(< b >^m) - C(< b >^{m-1}) \\ &= \beta_{m+1} - \beta_m \leq \gamma_{m+1} = C(< b - \frac{1}{m} >^m) = C(< M(\mu) >^{|\mu|}). \end{aligned}$$

2. Fall: μ ist nicht elementar

Da $||\mu|| mod |\mu| \geq \lfloor \frac{|\mu|}{2} \rfloor$, existieren $b \in \mathbf{N}_{\geq 4}$ und $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \{b\}^+ \times \{b-1\}$ nach Lemma 3(i) mit $||\mu_i| - |\mu_j|| \leq 1$ $(1 \leq i, j \leq r)$, so daß $\mu =< b-1 > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r$.

Wir zeigen für $1 \leq p \leq r$

$$\begin{aligned} & C(< M(< b-1 > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_{p-1}) >^{1+|\mu_1|+\ldots+|\mu_{p-1}|} \circ \mu_p \circ \ldots \circ \mu_r) \\ & \quad \leq C(< M(< b-1 > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_p) >^{1+|\mu_1|+\ldots+|\mu_p|} \circ \mu_{p+1} \circ \ldots \circ \mu_r). \end{aligned}$$

Daraus folgt dann sofort $C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|})$.

Fall a): $p = 1$.

Dann existiert $m \geq 3$, so daß $\mu_1 =< b >^{m-2} \circ < b-1 >$. Sei $\beta = NF(b)$ und $\gamma = NF(b - \frac{2}{m})$. Dann folgt nach Definition der Kontinuanten und mit Lemma 16(ii) und (iii)

(1)
$$\begin{aligned} C(< b-1 > \circ \mu_1) &= C(< b-1 > \circ < b >^{m-2} \circ < b-1 >) \\ &= C(< b-1 > \circ < b >^{m-1}) - C(< b-1 > \circ < b >^{m-2}) \\ &= C(< b >^m) - C(< b >^{m-1}) - [C(< b >^{m-1}) - C(< b >^{m-2})] \\ &= \beta_{m+1} - 2\beta_m + \beta_{m-1} \\ &\leq \gamma_{m+1} = C(< b - \frac{2}{m} >^m) = C(< M(< b > \circ \mu_1) >^{1+|\mu_1|}) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} C(< b-1 > \circ < b >^{m-2}) &= C(< b >^{m-1}) - C(< b >^{m-2}) \\ &= \beta_m - \beta_{m-1} \geq \gamma_m = C(< b - \frac{2}{m} >^{m-1}). \end{aligned}$$

Da $\mu_2 \circ \ldots \circ \mu_r \in \mathbf{N}^*_{\geq 3}$, folgt aus (1) und (2) mit Lemma 18

$$C(< b-1 > \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r) \leq C(< M(< b-1 > \circ \mu_1) >^{1+|\mu_1|} \circ \mu_2 \ldots \circ \mu_r).$$

Fall b): $p \geq 2$.

Sei $\mu_p =< b >^{m-1} \circ < b-1 >$ $(m \geq 2)$ und $k = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} |\mu_j|$. Dann gilt für $\mu' = \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_{p-1}$

$$M(< \mu' >) = b - \frac{p}{k} \quad \text{und} \quad M(< \mu' \circ \mu_p >) = b - \frac{p+1}{k+m}.$$

Da $|\mu_j| \geq 2$ und $||\mu_j| - |\mu_p|| \leq 1$ für $1 \leq j \leq p$, folgt

$$k \leq (m+1)(p-1) + 1 \leq (m+1)p$$

sowie

$$k \geq \begin{cases} (m-1)(p-1) + 1 \geq \frac{m}{2}p, & \text{falls } m \geq 3 \\ 2(p-1) + 1, & \text{falls } m = 2. \end{cases}$$

Daher ist $\frac{1}{m+1} \leq \frac{p}{k} \leq \frac{2}{m}$ für $m \geq 3$ bzw. $\frac{1}{3} \leq \frac{p}{k} \leq \frac{2}{3}$ für $m = 2$.

Weiterhin gilt $k \geq m \geq 2$, denn $p \geq 2$.

Ist dann $\beta = NF(b - \frac{p}{k})$, $\alpha = NF(b - \frac{p+1}{k+m})$ und $\gamma \in F(b)$ mit $\gamma_0 = \beta_k$ und $\gamma_1 = \beta_{k+1}$, so folgt mit Lemma 17 und nach Definition der Kontinuanten

(3)
$$\begin{aligned} & C(< M(\mu') >^{|\mu'|} \circ \mu_p) \\ & = C(< M(\mu') >^{k} \circ < b >^{m-1} \circ < b-1 >) \\ & = C(< b - \frac{p}{k} >^{k} \circ < b >^{m}) - C(< b - \frac{p}{k} >^{k} \circ < b >^{m-1}) \\ & = \gamma_{m+1} - \gamma_m \\ & \leq \alpha_{k+m+1} = C(< b - \frac{p+1}{k+m} >^{k+m}) = C(< M(\mu' \circ \mu_p) >^{|\mu'|+|\mu_p|}) \end{aligned}$$

(4)
$$C(< M(\mu') >^{|\mu'|} \circ < b >^{m-1} = \gamma_m \geq \alpha_{k+m} = C(< b - \frac{p+1}{k+m} >^{k+m-1}).$$

Da $\mu_{p+1} \circ \ldots \circ \mu_r \in \mathbf{N}^*_{\geq 3}$, folgt aus (3) und (4) mit Lemma 18

$$C(< M(\mu') >^{|\mu'|} \circ \mu_p \circ \ldots \circ \mu_r) \leq C(< M(\mu' \circ \mu_p) >^{|\mu'|+|\mu_p|} \circ \mu_{p+1} \circ \ldots \circ \mu_r). \quad \blacksquare$$

2. Im Folgenden wird die Abschätzung aus Satz 19 auf völlig andere Weise für homogene Zahlenfolgen μ aus $\mathbf{N}^+_{\geq 3}$ mit $||\mu|| mod |\mu| < \lfloor \frac{|\mu|}{2} \rfloor$ gezeigt. Dazu beweisen wir zuerst

Lemma 20:

Für jede homogene Zahlenfolge $\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 2}$ mit $||\mu|| mod |\mu| < \lfloor \frac{|\mu|}{2} \rfloor$ gilt

$$C(\mu) \leq \alpha (1+2)^{||\mu|| mod |\mu|} \lambda^{|\mu|+1},$$

wobei

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{b^2-4}}, \quad \lambda = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2-4}) \text{ und } \quad b = \lfloor \frac{||\mu||}{|\mu|} \rfloor.$$

Beweis:

Sei $\mu \in \mathbf{N}^+_{\geq 2}$ eine homogene Zahlenfolge und $b = \lfloor \frac{||\mu||}{|\mu|} \rfloor$. Dann besitzt μ nach Lemma 3 eine Zerlegung

$$\mu = \mu_0 \circ \mu_1 \circ \ldots \circ \mu_r,$$

wobei $\mu_0 \in \{b\}^+$, $\mu_i \in \{b+1\} \times \{b\}^+$ $(1 \leq i \leq r)$ und $r = ||\mu|| mod |\mu|$.

Sei

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} &= 0 \\ a_1^{(0)} &= 1 \\ a_{i+1}^{(0)} &= b a_i^{(0)} - a_{i-1} \quad (i \geq 1). \end{aligned}$$

Sei weiterhin für $j \geq 0$

$$\begin{aligned} a_0^{(j+1)} &= C(\mu_0 \circ \ldots \circ \mu_j) \\ a_1^{(j+1)} &= C(\mu_0 \circ \ldots \circ \mu_j \circ < b+1 >) \\ a_{i+1}^{(j+1)} &= b a_i^{(j+1)} - a_{i-1}^{(j+1)} \quad (i \geq 1). \end{aligned}$$

Dann gilt
(1) $C(\mu) = a_0^{(r+1)}$.

Nach dem bekannten Ansatz zur Lösung linearer Differenzengleichungen ist

(2) $a_i^{(j)} = \alpha_j \lambda_1^i + \beta_j \lambda_2^i$ für $0 \leq j \leq r+1$ und $i \geq 0$, wobei man λ_1 und λ_2 als Wurzeln des charakteristischen Polynoms erhält und α_j und β_j als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_0^{(j)} &= \alpha_j + \beta_j \\ a_1^{(j)} &= \alpha_j \lambda_1 + \beta_j \lambda_2. \end{aligned}$$

D.h.:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2-4}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2-4}),$$
$$\alpha_j = \frac{a_1^{(j)} - a_0^{(j)}\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta_j = \frac{a_0^{(j)} - a_1^{(j)}\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Für $0 \le j \le r$ stellt man zunächst leicht fest

(3) $$a_0^{(j+1)} = a_k^{(k)} \text{ und } a_1^{(j+1)} = (b+1)a_k^{(j)} - a_{k-1}^{(j)} = a_{k+1}^{(j)} + a_k^{(j)},$$
$$\text{wobei } k = \begin{cases} |\mu_j|+1, & \text{falls } j=0 \\ |\mu_j|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) $a_i^{(j+1)} \ge q_i^{(j)} \ge 0\,(i \ge 0)$,
denn für $t \ge 1$ und $x_i \ge 2$ für $1 \le i \le t+1$ gilt immer

$C(< x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}) \ge C(< x_1, \ldots, x_t >)$ (s. Satz 1.7 in [3]).

Daraus folgt dann

(5) $0 \le \lambda_2 \le \lambda_1 \le b \le \dfrac{a_1^{(j+1)}}{a_0^{(j+1)}}$

und man erhält

(6) $\alpha_j \ge 0$ und $\beta_j \le 0 \quad (0 \le j \le r+1)$

und damit

(7) $$\begin{aligned} \alpha_{j+1} &= \alpha_0(a_1^{(j+1)} - a_0^{(j+1)}\lambda_2) \\ &= \alpha_0(a_{k+1}^{(j)} + a_k^{(j)} - a_k^{(j)}\lambda_2) \quad \text{nach (3)} \\ &= \alpha_0[\alpha_j\lambda_1^k(\lambda_1 + 1 - \lambda_2) + \beta_j\lambda_2^k] \\ &= \alpha_j\lambda_1^k(1 + \frac{1}{\alpha_0}) + \alpha_0\beta_j\lambda_2^k \\ &\le \alpha_j\lambda_1^k(1 + \frac{1}{\alpha_0}) \quad \text{nach (5), (6).} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $r = 0$

$$\begin{aligned} C(\mu) &= a_0^{(1)} \quad \text{nach (1)} \\ &= a_{|\mu_0|+1}^{(0)} \quad \text{nach (3)} \\ &\le \alpha_0\lambda_1^{|\mu_0|+1} \quad \text{nach (2), (6)} \\ &= \alpha_0\lambda_1^{|\mu|+1} \end{aligned}$$

und für $r \ge 1$ erhält man

$$\begin{aligned} C(\mu) &= a_0^{(r+1)} \quad \text{nach (1)} \\ &= a_{|\mu_r|}^{(r)} \quad \text{nach (3)} \\ &\le \alpha_r\lambda_1^{|\mu_r|} \quad \text{nach (2), (6)} \\ &\le \alpha_0(1 + \frac{1}{\alpha_0})^r\lambda_1^{|\mu|+1} \text{ nach (7).} \end{aligned}$$

Mit $\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4}}$ und $\lambda = \lambda_1$ folgt die Behauptung. ∎

Das folgende Lemma zeigt, daß die rechte Seite der Ungleichung aus Lemma 20 durch $C(< M_{(\mu)} >^{|\mu|})$ weiter nach oben abgeschätzt werden kann.

Lemma 21:

Für $s, k \in \mathbf{N}$, $\alpha = \sqrt{\lfloor \frac{s}{k} \rfloor^2 - 4}^{-1}$ und $\lambda = \frac{1}{2}(\lfloor \frac{s}{k} \rfloor + \sqrt{\lfloor \frac{s}{k} \rfloor^2 - 4})$ ist

$$\alpha(1+\alpha)^{s \bmod k} \lambda^{k+1} \leq C(< \frac{s}{k} >^k),$$

$$\text{sofern } s \geq 3k, 1 \leq s \bmod k < \frac{k}{2} \text{ und } k \geq \begin{cases} 4, & \text{falls } \lfloor \frac{s}{k} \rfloor = 3 \\ 3, & \text{falls } \lfloor \frac{s}{k} \rfloor \geq 4 \end{cases}$$

Beweis:

Zuerst werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$x = \tfrac{s}{k},\ y = \lfloor x \rfloor,\ w_z = \sqrt{z^2 - 4}\ (z \in \mathbf{R}_{\geq 2}),\ \alpha = w_y^{-1},\ \lambda = \tfrac{1}{2}(y + w_y),$$

$$\alpha_1 = w_x^{-1},\ \lambda_1 = \tfrac{1}{2}(x + w_x),\ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(x, w - x).$$

Da $C(< x >^k) = \alpha_1(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}) = \alpha_1 \lambda_1^{k+1}(1 - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})$, muß

(1)

$$[\frac{\alpha}{\alpha_1}(1 - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})^{-1} \frac{\lambda}{\lambda_1}]^{k^{-1}} (1+\alpha)^{\frac{s \bmod k}{k}} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

für $x = y + \frac{s \bmod k}{k}$ gezeigt werden, wobei $1 \leq s \bmod k < \frac{k}{2}$ und $k \geq 4$, falls $y = 3$, bzw. $k \geq 3$ für $y \in \mathbf{N}_{\geq 4}$.

Sei $3 \leq y \leq x \leq y + \frac{1}{2}$ und $k \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha_1}(1 - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})^{-1} \frac{\lambda}{\lambda_1} &\leq \frac{\alpha}{\alpha_1}(1 - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2)^{-1} \frac{\lambda}{\lambda_1} \\ &= \frac{y + w_y}{w_y} \frac{x + w_x}{4x} \\ &= 1 + \frac{xy + yw_x + w_x w_y - 3xw_y}{4xw_y}. \end{aligned}$$

Sei $AZ(x,y) = xy + yw_x + w_x w_y - 3xw_y$ und $A(x,y) = AZ(x,y) \cdot (4xw_y)^{-1}$.

Eine Kurvendiskussion zeigt, daß $A(x,y)$ für $3 \leq y \leq x \leq y + \frac{1}{2}$ in x monoton wachsend ist, während $A(y + \frac{1}{2}, y)$ für $y \geq 3$ monoton fallend ist. Daher erhält man

$$0 < A(3,3) \leq A(y,y) \leq A(x,y) \leq A(y + \frac{1}{2}, y) \leq A(3 + \frac{1}{2}, 3) < 1,$$

und mit der Binomischen Formel folgt für $3 \leq y \leq x \leq y + \frac{1}{2}$ und $k \geq 1$

(2) $$[\frac{\alpha}{\alpha_1}(1-(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})^{-1}\frac{\lambda}{\lambda_1}]^{k^{-1}} \leq (1+A(x,y))^{k^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k^{-1}}{n}(A(x,y))^n \leq 1+\frac{1}{k}A(x,y)$$

sowie

(3) $$(1+\alpha)^{\frac{s \bmod k}{k}} = (1+\alpha)^{x-y} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{x-y}{n}\alpha^n \leq 1+\frac{1}{w_y}(x-y)+\frac{1}{w_y^2}\frac{(x-y)(x-y-1)}{2!}+\frac{1}{w_y^3}\frac{(x-y)(x-y-1)(x-y-2)}{3!}.$$

Sei

$$\begin{aligned} G(k,x,y) &= (1+\frac{1}{k}A(x,y))[1+\frac{1}{w_y}(x-y)+\frac{1}{w_y^2}\frac{(x-y)(x-y-1)}{2!} \\ &+\frac{1}{w_y^3}\frac{(x-y)(x-y-1)(x-y-2)}{3!}]-\frac{x+w_x}{y+w_y} \\ &= (1+\frac{1}{k}A(x,y))[1-\frac{x+w_x}{y+w_y}+\frac{1}{w_y}(x-y)+\frac{1}{w_y^2}\frac{(x-y)(x-y-1)}{2!} \\ &+\frac{1}{w_y^3}\frac{(x-y)(x-y-1)(x-y-2)}{3!}]+\frac{1}{k}A(x,y)\frac{x+w_x}{y+w_y} \end{aligned}$$

und

(4) $$\begin{aligned} F(k,x,y) &= \frac{w_y(y+w_y)}{x-y}G(k,x,y) \\ &= (1+\frac{1}{k}A(x,y))B(x,y)+\frac{1}{k(x-y)}AZ(x,y)\frac{x+w_x}{4x}, \end{aligned}$$

wobei $B(x,y)=\frac{xy-w_xw_y-4}{x-y}+\frac{y+w_y}{2w_y}(x-y-1)+\frac{y+w_y}{6w_y^2}(x-y-1)(x-y-2)$.

Für $3 \leq y < x \leq y+\frac{1}{2}$ und $k \geq 1$ folgt dann aus $F(k,x,y) \leq 0$ $G(k,x,y) \leq 0$ und damit nach (2) und (3) die Gültigkeit von (1). Wir zeigen zuerst

(5) $$F(k,x,y) \leq 0 \quad \text{für } 3 \leq y < x \leq y+\frac{1}{2}$$
$$\text{und } k(x-y) \geq \begin{cases} 1, & \text{falls } y \geq 6 \\ 2, & \text{falls } y \in \{4,5\} \\ 4, & \text{falls } y = 3 \end{cases}.$$

Zunächst zeigen zwei Kurvendiskussionen, daß $B(x,y)$ und $AZ(x,y)$ für $3 \leq y < x$ in x monoton wachsend und daß $B(y+\frac{1}{2})$ und $AZ(y+\frac{1}{2},y)$ für $y \geq 3$ monoton fallend sind. Daher ist

$B(x,y) \leq B(y+\frac{1}{2},y) \leq B(3+\frac{1}{2},3) \leq 0$ und $AZ(x,y) \geq AZ(y,y) \geq 0$
und aus (4) folgt für $3 \leq y < x \leq y + \frac{1}{2}$

$$F(k,x,y) \leq B(y+\frac{1}{2},y) + \frac{1}{2k(x-y)} AZ(y+\frac{1}{2},y).$$

Man rechnet dann nach, daß

- $B(6+\frac{1}{2},6) + \frac{1}{2} AZ(6+\frac{1}{2},6) \leq 0,$
- $B(4+\frac{1}{4},4) + \frac{1}{2} AZ(4+\frac{1}{2},4) \leq 0,$
- $B(3+\frac{1}{8},3) + \frac{1}{2} AZ(3+\frac{1}{2},3) \leq 0,$

woraus wegen der Monotonieeigenschaften von B und AZ $F(k,x,y) \leq 0$ unter den in (5) genannten Bedingungen folgt.

Um (1) für $x = y + \frac{s \ mod \ k}{k}$ mit $1 \leq s \ mod \ k < \frac{k}{2}$ und mit $k \geq \begin{cases} 4, & \text{falls } y = 3 \\ 3, & \text{falls } y \in \mathbf{N}_{\geq 4} \end{cases}$ zu beweisen, verbleibt $F(k,x,y) \leq 0$ in folgenden Fällen zu zeigen:

1. $y \in \{4,5\}$, $s \ mod \ k = 1$, $k \geq 3$.
2. $y = 3$, $1 \leq s \ mod \ k \leq 3$, $k \geq \max(4, 2(s \ mod \ k) + 1)$.

zu 1.: Sei $y \in \{4,5\}$.
In diesem Fall ist $x \leq y + \frac{1}{3}$. Aufgrund der Monotonieeigenschaften von B und AZ erhält man $F(k,x,y) \leq B(4+\frac{1}{3},4) + \frac{1}{2} AZ(4+\frac{1}{3},4) \leq 0$.

zu 2.: Sei $y = 3$.
a) Sei $s \ mod \ k = 3$. Dann ist $k \geq 7$ und damit $x \leq y + \frac{3}{7}$. Es folgt
$F(k,x,y) \leq B(3+\frac{3}{7},3) + \frac{1}{6} AZ(3+\frac{3}{7},3) \leq 0$.

b) Sei $s \ mod \ k = 2$. Dann ist $k \geq 5$ und damit $x \leq y + \frac{2}{5}$. Für $x = y + \frac{2}{5}$ überprüft man (1) durch nachrechnen und aus $B(3+\frac{1}{3},3) + \frac{1}{4} AZ(3+\frac{1}{3},3) \leq 0$ folgt $F(k,x,y) \leq 0$ für $x \leq y + \frac{2}{6}$.

c) Sei schließlich $s \ mod \ k = 1$. Dann ist $k \geq 4$, d.h. $x \leq y + \frac{1}{4}$. für $x = y + \frac{1}{4}$ kann (1) nachgerechnet werden und aus $B(3+\frac{1}{5},3) + \frac{1}{2} AZ(3+\frac{1}{5},3) \leq 0$ folgt $F(k,x,y) \leq 0$ für $x \leq y + \frac{1}{5}$.

∎

Satz 22:

Für jede homogene Zahlenfolge $\mu \in \mathbf{N}^{+}_{\geq 3}$ mit $||\mu|| mod |\mu| < \lfloor \frac{|\mu|}{2} \rfloor$ gilt

$$C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|}).$$

Beweis:

Sei μ nach Voraussetzung gegeben.

Sei weiterhin

$$b = \lfloor \frac{\|\mu\|}{|\mu|} \rfloor, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{b^2-4}} \text{ und } \quad \lambda = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2-4}).$$

Ist dann $|\mu| \geq \begin{cases} 4, & \text{falls } b = 3 \\ 3, & \text{falls } b \geq 4, \end{cases}$ so folgt sofort mit Lemma 20 und 21

$$C(\mu) \leq \alpha(1+\alpha)^{\|\mu\| mod |\mu|} \lambda^{|\mu|+1} \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|}).$$

Ist $\|\mu\| mod |\mu| = 0$ und damit $\mu \in \{b\}^+$, ergibt sich die Aussage trivialerweise. Daher muß nur noch der Fall $b = 3$, $|\mu| = 4$ und $\|\mu\| mod |\mu| = 1$ betrachtet werden.

Die einzigen homogenen Zahlenfolgen mit dieser Eigenschaft sind $< 3, 3, 4, 3 >$ und $< 3, 4, 3, 3 >$.

Man zeigt durch Nachrechnen $C(< 3, 3, 4, 3 >) = C(< 3, 4, 3, 3 >) \leq C(< \frac{13}{4}, \frac{13}{4}, \frac{13}{4}, \frac{13}{4} >)$. ∎

Aus Satz 19 und Satz 22 folgt insgesamt

Satz 23:

$C(\mu) \leq C(< M(\mu) >^{|\mu|})$ für jede homogene Zahlenfolge $\mu \in \mathbb{N}^+_{\geq 3}$.

Literaturverzeichnis:

[1] U. Brandt:
Über den Einfluß der Zahldarstellung auf registerorientierte Rechner,
Habilitationsschrift, TH Darmstadt, 1988.

[2] G. Hofmeister:
Über eine Menge von Abschnittsbasen.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 213 (1963), S. 43–57.

[3] A. Mrose:
Die Bestimmung der extremalen regulären Abschnittsbasen mit Hilfe einer Klasse von Kettenbruchdeterminanten.
Dissertation an der Freien Universität Berlin, 1969.