Computing 4, 107—124 (1969)

Zerlegungen von Semi-Thue-Systemen[1]

Von

V. Claus und H. Walter, Saarbrücken

(Eingegangen am 22. Juli 1968)

Zusammenfassung — Summary

Zerlegungen von Semi-Thue-Systemen. Es werden fünf Zerlegungsbegriffe für Semi-Thue-Systeme diskutiert, die sowohl für die allgemeine Theorie, als auch für praktische Zwecke (Vereinfachung des Analyseproblems) Bedeutung haben. Die Zerlegungsbegriffe bilden eine einfache Hierarchie. Wir geben für jeden Zerlegungsbegriff ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an. Drei der Zerlegungsbegriffe erweisen sich als generell entscheidbar, zwei dagegen sind es nur im kontextfreien Fall.

Decompositions of Semi-Thue-Systems. We consider five notions of decompositions of Semi-Thue-Systems. These are interesting in view of the theory of Semi-Thue-Systems as well as in regard to practical applications (simplification of the analysis-problem). The decompositions form a simple hierarchy. We proof a necessary and sufficient condition for each of the decompositions. Three of the notions are shown to be determinable in general, the other two notions are determinable only for contextfree Semi-Thue-Systems.

1. Einleitung

Zerlegungen von Grammatiken wurden bereits in einzelnen Arbeiten ([5], [9], [10], [11]) diskutiert. In unserer Arbeit werden diese Überlegungen verallgemeinert. Dabei beschränken wir uns auf Semi-Thue-Systeme; die Anwendungen unserer Zerlegungen auf Grammatiken soll in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Wir gehen aus von dem Begriff der freien X-Kategorie. Jedem Semi-Thue-System ist eindeutig eine freie X-Kategorie zugeordnet ([4]). Auf diese wenden wir einfache algebraische Operationen (direkte Summe und Pushout, siehe [1]) an, aus denen wir die Begriffe „A-unzerlegbar“ und „unzerlegbar“ (Def. 8) gewinnen. Die dualen Operationen, das direkte Produkt und das Pullback, wurden bereits in [11] behandelt. Ein Semi-Thue-System läßt sich in eindeutiger Weise als Pushout A-unzerlegbarer Semi-Thue-Systeme darstellen (Satz 3.3.). Als Verallgemeinerung erhält man die Begriffe „zusammenhängend“ und „schwach zusammenhängend“ (Def. 9). Ein Semi-Thue-System heißt zusammenhängend, wenn es Morphismen f in der zugehörigen freien X-Kategorie gibt, die sich nicht nach „$\times$“ zerlegen, d. h. nicht in der Form $f = f_1 \times f_2$ darstellen lassen. Jedes

[1] Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Forschungsvorhaben Ho 251/2 und Ho 251/4 unterstützt.

Semi-Thue-System läßt sich eindeutig in seine Zusammenhangskomponenten und schwachen Zusammenhangskomponenten zerlegen (Sätze 4.1. und 4.2.). Ein Semi-Thue-System heißt auflösbar, wenn sich jeder Morphismus in gewisser Weise nach „$\circ$" zerlegen läßt; als Spezialfall ergibt sich der Begriff „schwach auflösbar" (Def. 12). Ein Semi-Thue-System bestimmt zwar seine nicht auflösbaren Komponenten eindeutig, jedoch läßt es sich im allgemeinen nicht eindeutig nach diesen zerlegen (Satz 5.1.). Zwischen den fünf Zerlegungsbegriffen werden in Kapitel 5 Beziehungen gezeigt, und es wird die Hierarchie der Zerlegungsbegriffe für den allgemeinen und für den kontextfreien Fall angegeben. Im 6. Kapitel zeigen wir, daß die Eigenschaften „unzerlegbar", „schwach zusammenhängend" und „schwach auflösbar" generell, die Eigenschaften „zusammenhängend" und „auflösbar" dagegen nur im kontextfreien Fall entscheidbar sind (Sätze 6.1. und 6.2.; der Satz 6.2. hat Ähnlichkeit mit einem in [8] bewiesenen Satz). In den Lemmata dieser Arbeit, mit denen fast alle Sätze bewiesen werden, geben wir für jeden Zerlegungsbegriff ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an.

Die Zerlegungen sind für die Theorie in Hinblick auf Vereinfachungen und Strukturuntersuchungen von Semi-Thue-Systemen interessant. Aber auch für die Praxis können sie von Wichtigkeit sein: zerlegt man Grammatiken, die man speziell als Semi-Thue-Systeme auffassen kann, in die Komponenten bzgl. eines Zerlegungsbegriffes, so wird sich im allgemeinen das Analyseproblem vereinfachen und der Aufwand des „Analysierens" verringern. Hierbei ist wesentlich, daß die Zerlegung in unzerlegbare, schwach zusammenhängende und nicht schwach auflösbare Komponenten sehr rasch durchgeführt werden kann. Für die weitere Zerlegung in zusammenhängende und nicht auflösbare Komponenten geben Lemma 4.1. und Lemma 5.1. hinreichende Kriterien an. Weiterhin werden wir in der angekündigten späteren Arbeit, in der diese Zerlegungsbegriffe auf Grammatiken anggewandt werden, zeigen, daß sich wichtige Sätze aus der Theorie der CHOMSKY-Sprachen ([2], [3]) mit Hilfe von Konstruktionen gewinnen lassen, die man aus den algebraischen Operationen „direkte Summe" und „Pushout" leicht ableiten kann.

Die grundlegende Idee in Hinblick auf eine algebraische Theorie der Semi-Thue-Systeme ist der schon erwähnte Begriff der über einem Semi-Thue-System freien X-Kategorie. In Kapitel 2 stellen wir die wichtigsten Definitionen zusammen; diese sind alle der Arbeit [4] entnommen.

Wir danken Herrn Priv.-Doz. Dr. G. HOTZ für wertvolle Diskussionen und Anregungen zu dieser Arbeit.

2. Grundbegriffe

Wir definieren Semi-Thue-Systeme und deren algebraische Darstellung, die freien X-Kategorien.

Def. 1: $S = (A\,(S),\, P\,(S),\, Q_S,\, Z_S)$ *heißt* Semi-Thue-System *genau dann, wenn*

$$A\,(S) \textit{ und } P\,(S) \textit{ endliche Mengen und} \tag{1}$$

$$Q_S \textit{ und } Z_S \textit{ Abbildungen von } P(S) \textit{ in } A(S)^* \tag{2}$$

sind[2].

$A(S)$ heißt das *Alphabet*, $P(S)$ das *Regelsystem*, und die Elemente von $P(S)$ heißen die *Regeln* von S.

Seien S und S' Semi-Thue-Systeme. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} S' \subseteq S \Leftrightarrow A(S') &\subseteq A(S) \\ P(S') &\subseteq P(S) \\ Q_{S'} &= Q_S \,/\, P(S') \\ Z_{S'} &= Z_S \,/\, P(S') \end{aligned}$$

(„$/$" bedeutet die Einschränkung auf die dahinter stehende Menge).

Sei S ein Semi-Thue-System, und es seien S_1, $S_2 \subseteq S$.
Dann setzen wir:

$$S_1 \cup S_2 =$$

$$= (A(S), P(S_1) \cup P(S_2), Q_S \,/\, P(S_1) \cup P(S_2), Z_S \,/\, P(S_1) \cup P(S_2))$$

$$S_1 \cap S_2 =$$

$$= (A(S), P(S_1) \cap P(S_2), Q_S \,/\, P(S_1) \cap P(S_2), Z_S \,/\, P(S_1) \cap P(S_2))$$

Nach G. Hotz kann man jedem Semi-Thue-System eine freie X-Kategorie zuordnen.

Def. 2: *Eine* X-Kategorie $\mathfrak{X}$ *ist ein Paar* $\mathfrak{X} = (\mathfrak{C}, \times)$, *wobei* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie ist (mit der Verknüpfung „$\circ$") und „$\times$" eine Monoidverknüpfung auf der Objektmenge* $|\mathfrak{C}|$ *und der Morphismenmenge* Mor $(\mathfrak{C})$ *von* $\mathfrak{C}$ *ist, so daß die zu* $\mathfrak{C}$ *gehörigen Abbildungen* Q *und* Z *Monoidhomomorphismen bezüglich „$\times$" sind. Weiterhin gelte für alle* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in$ Mor $(\mathfrak{C})$ *mit* $Z(g_i) = Q(f_i)$ $(i = 1, 2)$ *das Distributivgesetz:*

$$(f_1 \circ g_1) \times (f_2 \circ g_2) = (f_1 \times f_2) \circ (g_1 \times g_2).$$

(„$\circ$", „$\times$", Q und Z bezeichnen wir für alle Kategorien gleich. Die Bezeichnungen von $\mathfrak{C}$ übertragen wir auf $\mathfrak{X}$, d. h. $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{C}|$, Mor $(\mathfrak{X}) =$ $=$ Mor $(\mathfrak{C})$ usw. $\mathfrak{C}$ heißt die $\mathfrak{X}$ unterliegende Kategorie. Vgl. hierzu [1] und [4].)

Ein *X-Funktor* φ zwischen zwei X-Kategorien $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ ist ein kovarianter Funktor zwischen den unterliegenden Kategorien $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, der objekt- und morphismenseitig ein Monoidhomomorphismus bezüglich „$\times$" ist.

Def. 3: *Eine X-Kategorie* $\mathfrak{X}$ *heißt* frei *über einem Semi-Thue-System* S *genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

---

[2] Wenn M eine Menge ist, dann verstehen wir unter M^* das freie Monoid über M, d. h. die Menge aller endlichen Folgen (Wörter), gebildet aus den Elementen von M. Die Einheit eines freien Monoids bezeichnen wir stets mit e. Wenn $w = a_1 \ldots a_\mu$ ein Wort aus M^* mit $a_\lambda \in M$ für $\lambda = 1, \ldots, \mu$ ist, so heißt die nichtnegative Zahl $\mu = L(w)$ die Länge von w in M^*.

(1) $|\mathfrak{X}| = A(S)^*$.

(2) $P(S) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathfrak{X})$, *und für alle* $r \in P(S)$ *gilt:*
$Q(r) = Q_S(r)$ *und* $Z(r) = Z_S(r)$.

(3) *Sei* $\mathfrak{X}'$ *eine beliebige* X*-Kategorie und es seien* $\varphi_1 : A(S)^* \to |\mathfrak{X}'|$ *und* $\varphi_2 : P(S) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{X}')$ *Abbildungen, die den Forderungen*

(α) φ_1 *ist ein Monoidhomomorphismus,*

(β) *für alle* $r \in P(S)$ *gilt:*

$$\varphi_1(Q_S(r)) = Q(\varphi_2(r)) \text{ und}$$
$$\varphi_1(Z_S(r)) = Z(\varphi_2(r))$$

genügen, dann läßt sich das Paar (φ_1, φ_2) *zu genau einem Funktor* $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ *fortsetzen.*

Wenn $\mathfrak{X}$ frei über S ist, schreiben wir $\mathfrak{X} = F(S)$[3]. G. HOTZ hat gezeigt, daß es über jedem Semi-Thue-System bis auf Isomorphie genau eine freie X-Kategorie gibt.

Es sei S ein Semi-Thue-System. Dann kann man sich alle Morphismen von $F(S)$ aufbauen, indem man endliche Ausdrücke aus den Elementen 1_w,[4] $r \in P(S)$ und „$\circ$" und „$\times$" bildet, und zwei solche Ausdrücke miteinander identifiziert, wenn sie sich mit Hilfe des Distributivgesetzes (siehe Def. 2) ineinander überführen lassen[5].

Man kann zeigen, daß sich jeder Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ in der Form

$$f = (1_{w_s} \times r_s \times 1_{v_s}) \circ \ldots \circ (1_{w_1} \times r_1 \times 1_{v_1})$$
$$(\text{mit } s \geqslant 0,\ w_i, v_i \in A(S)^*,\ r_i \in P(S) \text{ für } i = 1, \ldots, s)$$

darstellen läßt; diese Form heißt *eine sequentielle Darstellung* von f. Es gibt im allgemeinen zu jedem f mehrere sequentielle Darstellungen.

Wir definieren nun eine Funktion $a : P(S) \times \mathrm{Mor}(F(S)) \to Z^+$,[6] deren Werte sich für jedes $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ aus einer sequentiellen Darstellung von f sofort ablesen lassen:

Def. 4: $a : P(S) \times \mathrm{Mor}(F(S)) \to Z^+$ *sei definiert durch:*

(1) $a(r, 1_w) = 0$ *für alle* $r \in P(S)$ *und* $w \in A(S)^*$.

(2) $a(r, r') = \begin{cases} 0 & r \neq r' \\ 1 & r = r', \text{ für alle } r, r' \in P(S). \end{cases}$

(3) *Für alle* $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(F(S))$ *und für alle* $r \in P(S)$ *gelten die Formeln:*

$$a(r, f_1 \times f_2) = a(r, f_1) + a(r, f_2) \text{ und}$$
$$a(r, f_1 \circ f_2) = a(r, f_1) + a(r, f_2).$$

$a(r, f)$ gibt an, wie oft r in einer sequentiellen Darstellung von f auftritt.

[3] Man kann F als kovarianten, monischen Funktor auffassen.

[4] 1_w ist die zu $w \in A(S)^*$ gehörende Einheit.

[5] Jeder solchen Klasse entspricht in der kombinatorischen Sprechweise genau ein Ableitungsbaum und umgekehrt.

[6] Z^+ ist die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

Def. 4a: *Die Funktion* $l : \mathrm{Mor}\,(F\,(S)) \to Z^+$, *die durch* $l\,(f) = \sum_{r \in P(S)} a\,(r, f)$ *für alle* $f \in \mathrm{Mor}\,(F\,(S))$ *definiert ist, heißt die* Länge *von* f.

$a\,(r, f)$ und $l\,(f)$ sind unabhängig von der speziellen sequentiellen Darstellung von f. (Zur Definition der Länge von Objekten siehe Fußnote [2].)
Nach CHOMSKY führt man spezielle, nach kombinatorischen Gesichtspunkten geordnete Klassen von Semi-Thue-Systemen ein.

Def. 5: *Ein Semi-Thue-System* S *heißt* kontextsensitiv *genau dann, wenn für alle* $r \in P\,(S)$ *gilt:* $Q_S\,(r) = u\,\xi\,v$, $Z_S\,(r) = u\,w\,v$ *mit* $\xi \in A\,(S)$, $w \in A\,(S)^* \setminus \{e\}$ *und* $u, v \in A\,(S)^*$. S *heißt* kontextfrei, *wenn für alle* $r \in P\,(S)$ *gilt:* $Q_S\,(r) \in A\,(S)$.

Zeichnet man in einem Semi-Thue-System S eine Teilmenge T von $A\,(S)$ als *Endalphabet* und eine Teilmenge σ von $A\,(S) \setminus T$ als Menge der *Startsymbole* aus, so spricht man von einer Grammatik.

Def. 6: $G = (F\,(S), T, \sigma)$ *heißt* Grammatik *genau dann, wenn gilt:*

(1) $F\,(S)$ *ist die über dem Semi-Thue-System* S *freie X-Kategorie.*

(2) $T \subset A\,(S)$ *und* $\sigma \subseteq A\,(S) \setminus T$, $T \neq \emptyset$.

(3) *Für alle* $r \in P\,(S)$ *gilt* $Q_S\,(r) \in (A\,(S) \setminus T)^* \setminus \{e\}$.

Bekanntlich ist (3) eine unwesentliche Einschränkung.

Def. 6a: *Sei* $G = (F\,(S), T, \sigma)$ *eine Grammatik. Dann heißt* $\mathfrak{L}\,(G) = \{w \in T^* \mid H_{F(S)}\,(\xi, w) \neq \emptyset$ *für wenigstens ein* $\xi \in \sigma\}$[7] *die von* G erzeugte Sprache. *Umgekehrt nennen wir jede Teilmenge* $L \subseteq T^*$ *eine* Sprache, *wenn es eine Grammatik* G *gibt mit* $L = \mathfrak{L}\,(G)$.

Eine Grammatik heißt *kontextsensitiv*, bzw. *kontextfrei*, wenn das zugehörige Semi-Thue-System kontextsensitiv, bzw. kontextfrei ist. Entsprechend seien *kontextsensitive* und *kontextfreie Sprachen* definiert[8]. Die kontextsensitiven Grammatiken entsprechen den nichtdeterministischen linear beschränkten Automaten ([6]). Wir werden eine Grammatik *determiniert kontextsensitiv* nennen, wenn ihr ein determinierter linear beschränkter Automat entspricht ([7]), und entsprechend das zugehörige Semi-Thue-System und die zugehörige Sprache. Es ist bis heute unbekannt, ob die determinierten kontextsensitiven Sprachen eine echte Teilmenge der kontextsensitiven Sprachen bilden. Wir werden in Kapitel 6 einen Satz für determinierte kontextsensitive Semi-Thue-Systeme beweisen; wir werden aber diesen Begriff nicht definieren, da wir ihn in dem Beweis kaum verwenden.

---

[7] Wenn S ein Semi-Thue-System ist, dann verstehen wir unter $H_{F(S)}\,(u, v)$ die Menge $H_{F(S)}\,(u, v) = \{f \in \mathrm{Mor}\,(F\,(S)) \mid Q\,(f) = u, Z\,(f) = v\}$ für $u, v \in A\,(S)^*$. Mit $\emptyset$ sei stets die leere Menge bezeichnet.

[8] Vergleiche [3]; die dort gegebenen Definitionen sind unwesentlich abgeändert.

3. Summen und Pushouts bei Semi-Thue-Systemen

In diesem Kapitel zeigen wir die Existenz von Pushouts und direkten Summen bei Semi-Thue-Systemen. Weiterhin geben wir eine Konstruktion an, um ein beliebiges Semi-Thue-System nach Pushouts über einem festen Alphabet zu zerlegen.

Def. 7: *Es seien* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie,* $c_0, c_1, c_2, c \in |\mathfrak{C}|$ *und* $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \in \mathrm{Mor}\,(\mathfrak{C})$, *und es gelte* $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$. *Das Quadrat*

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
c_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & c \\
 & c_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

heißt Pushout-Diagramm *in* $\mathfrak{C}$ *genau dann, wenn es zu je zwei Morphismen* k_1 *und* k_2 *mit* $Q\,(k_1) = c_1$, $Q\,(k_2) = c_2$, $Z\,(k_1) = Z\,(k_2)$ *und* $k_1 \circ i_1 = k_2 \circ i_2$ *genau ein* $k \in \mathrm{Mor}\,(\mathfrak{C})$ *gibt mit* $Q\,(k) = c$, $Z\,(k) = Z\,(k_1) = Z\,(k_2)$ *und* $k \circ j_\lambda = k_\lambda$ *(für* $\lambda = 1, 2$*).*

Wenn das Pushout-Diagramm existiert, dann ist c bis auf Isomorphie eindeutig durch c_0, c_1 und c_2 bestimmt. c heißt der *Pushout* von c_1 und c_2 über c_0. Wir schreiben hierfür $c = c_1 \underset{c_0}{\oplus} c_2$. Die Operation $\underset{c_0}{\oplus}$ ist kommutativ und assoziativ. Für den Pushout c von $c_1, \ldots, c_n$ über c_0 schreiben wir: $c = \bigoplus\limits_{\substack{c_0\\ \lambda=1}}^{n} c_\lambda$.

Satz 3.1: *Seien* S_0, S_1 *und* S_2 *Semi-Thue-Systeme mit* $S_0 \subseteq S_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$. *Dann gibt es ein Semi-Thue-System* S, *so daß das folgende Quadrat*

$$\begin{tikzcd}
 & F(S_1) \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
F(S_0) \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & & F(S) \\
 & F(S_2) \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

ein Pushout-Diagramm in der Kategorie aller X*-Kategorien und* X*-Funktoren ist* ($\subseteq$ bezeichne in dem Quadrat den durch die Inklusion induzierten X-Funktor).

Beweis:

Durch Umbenennung der Alphabetzeichen und der Regeln von S_1 und S_2 kann man o. B. d. A. erreichen, daß $A\,(S_0) = A\,(S_1) \cap A\,(S_2)$ und $P\,(S_0) = P\,(S_1) \cap P\,(S_2)$ gilt.

Dann setze man: $S = (A\,(S_1) \cup A\,(S_2),\ P\,(S_1) \cup P\,(S_2),\ Q_S,\ Z_S)$ mit

$$Q_S\,(r) = \begin{cases} Q_{S1}\,(r), & \text{falls } r \in P\,(S_1) \\ Q_{S2}\,(r), & \text{falls } r \in P\,(S_2) \end{cases} \quad \text{und analog für } Z_S.$$

Dieses S erfüllt die Behauptung. *q. e. d.*

Wir schreiben $S = S_1 \underset{S_0}{\oplus} S_2$, bzw. $S = \overset{n}{\underset{\substack{S_0 \\ \lambda=1}}{\oplus}} S_\lambda$.

Wir betrachten nun spezielle S_0. Es sei A eine Menge, dann setze man: $\hat{S}(A) = (A, \emptyset, Q_\emptyset, Z_\emptyset)$. Hat S_0 diese Gestalt, so schreiben wir $S_1 \underset{A}{\oplus} S_2 :=$ $:= S_1 \underset{\hat{S}(A)}{\oplus} S_2$. Ist speziell $A = \emptyset$, dann schreiben wir $S_1 \oplus S_2 := S_1 \underset{\emptyset}{\oplus} S_2$.[9] $S_1 \oplus S_2$ heißt die *direkte Summe* von S_1 und S_2. Aus Satz 3.1 folgt:

Satz 3.2: *Zu je zwei Semi-Thue-Systemen S_1 und S_2 existiert bis auf Isomorphie genau ein Semi-Thue-System S mit $S = S_1 \oplus S_2$.*

Wir betrachten nun Zerlegungen von Semi-Thue-Systemen nach Pushouts. Wenn S ein Semi-Thue-System ist, dann setze man für $r \in P(S): S_r := (A(S), \{r\}, Q_S / \{r\}, Z_S / \{r\})$. Dann gilt: $S = \underset{\substack{A(S) \\ r \in P(S)}}{\oplus} S_r$ d. h. es treten triviale Zerlegungen nach Pushouts auf. Nicht so trivial sind die Zerlegungen über beliebigen Mengen.

Def. 8: *Sei A eine beliebige Menge. Ein Semi-Thue-System S heißt* A-unzerlegbar *genau dann, wenn aus $S = S_1 \underset{A}{\oplus} S_2$ stets $S_1 = \hat{S}(A)$ oder $S_2 = \hat{S}(A)$ folgt. Ist $A = \emptyset$, dann heißt S* unzerlegbar.

Wir geben nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für A-Unzerlegbarkeit an. Wenn S ein Semi-Thue-System und $r \in P(S)$ ist, so sei $A(r)$ die kleinste Teilmenge von $A(S)$ mit der Eigenschaft: $Q_S(r), Z_S(r) \in A(r)^*$.

Lemma 3.1: *Ein Semi-Thue-System S ist genau dann A-unzerlegbar, wenn zu je zwei Regeln $r, r' \in P(S)$ eine Kette von Regeln $r = r_0, r_1, \ldots, r_n = r'$ $(n \geqq 0)$ existiert mit:*

(1) $(A(r_{\lambda-1}) \cap A(r_\lambda)) \setminus A \neq \emptyset$ *für* $\lambda = 1, \ldots, n$,

(2) $\bigcup_{r \in P(S)} A(r) \setminus A = A(S) \setminus A$.

Beweis:

Man betrachte folgende Äquivalenzrelation auf $P(S)$:

$r \wedge r' \Leftrightarrow$ es gibt eine Kette $r = r_0, r_1, \ldots, r_n = r'$ mit $n \geqq 0$ und $(A(r_{\lambda-1}) \cap A(r_\lambda)) \setminus A \neq \emptyset$ für $\lambda = 1, \ldots, n$.

Sei $[r]$ die Äquivalenzklasse von r. Ordne $[r]$ die Menge $A([r]) = \bigcup_{r' \in [r]} A(r')$ zu. Sind $[r] \neq [r']$ zwei Äquivalenzklassen, so gilt: $(A([r]) \cap A([r'])) \setminus A = \emptyset$. Ordne jeder Äquivalenzklasse $[r]$ das Semi-Thue-System $S_{[r]} = (A([r]), [r], Q_{[r]}, Z_{[r]})$ zu, wobei $Q_{[r]}$ und $Z_{[r]}$ die Einschränkungen von Q_S und Z_S auf $[r]$ sind.

---

[9] $F(\hat{S}(\emptyset))$ ist Anfang in der Kategorie der X-Kategorien und X-Funktoren.

Es möge k Äquivalenzklassen bzgl. $\wedge$ geben; $S_1, \ldots, S_k$ seien die k verschiedenen $S_{[r]}$. Dann gilt:

$$S = (\bigoplus_{\substack{A \\ \lambda=1}}^{k} S_\lambda) \oplus \hat{S}(A(S) \setminus (A \cup \bigcup_{r \in P(S)} A(r))).$$

Man zeigt leicht, daß S, wenn es zerlegbar ist, auch stets in dieser Form zerlegbar ist. Hieraus folgt das Lemma. *q. e. d.*

Aus dem Beweis zu Lemma 3.1. folgt für beliebige Mengen A:

Satz 3.3: (A-Zerlegbarkeit von Semi-Thue-Systemen).

Jedes Semi-Thue-System S läßt sich darstellen in der Form

$$S = \bigoplus_{\substack{A \\ \lambda=1}}^{k} S_\lambda \text{ und es gilt:}$$

(1) *jedes S_λ ist A-unzerlegbar,*

(2) *falls $S \neq \hat{S}(A)$ ist, dann gilt auch $S_\lambda \neq \hat{S}(A)$ für $\lambda = 1, \ldots, k$,*

(3) *die Darstellung ist bis auf Umordnung der S_λ eindeutig.*

Abschließend betrachten wir den Fall $A = \emptyset$. Wenn $S = S_1 \oplus S_2$ zerlegbar ist, so sind in dem Summendiagramm $F(S_1) \subseteq F(S) \supseteqq F(S_2)$ die Inklusionen offenbar volle Einbettungen[10]. Dann folgt, daß sich jeder Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ in der Form $f = f_1 \times g_1 \times f_2 \times g_2 \times \ldots \times f_m \times g_m$ mit $f_\lambda \in \mathrm{Mor}(F(S_1))$ und $g_\lambda \in \mathrm{Mor}(F(S_2))$ für $\lambda = 1, \ldots, m$ darstellen läßt. Diese Bedingung ist jedoch nur notwendig. Wir werden sie nun zur Definition eines Zusammenhangbegriffes verwenden.

4. Zusammenhängende Semi-Thue-Systeme

Def. 9: *Sei S ein Semi-Thue-System. S heißt* nicht zusammenhängend *genau dann, wenn es zwei Semi-Thue-Systeme S_1 und S_2 mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(1) $S_1, S_2 \subseteq S$, $A(S_1) = A(S_2) = A(S)$.

(2) $P(S_1) \cap P(S_2) \neq P(S_\lambda)$ *für* $\lambda = 1, 2$.

(3) *Ist* $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$, *dann existieren* $g, h \in \mathrm{Mor}(F(S))$ *mit* $f = g \times h$, *und es gilt:*

(a) $g \in \mathrm{Mor}(F(S_1))$ *oder* $g \in \mathrm{Mor}(F(S_2))$,

(b) *ist f keine Einheit, dann ist $l(g) \geqq 1$.*

Gilt zusätzlich

(4) $P(S_1) \cap P(S_2) = \emptyset$,

dann heißt S nicht schwach zusammenhängend *bzgl. S_1 und S_2.*

---

[10] Die Einbettung $F(S_\lambda) \subseteq F(S)$ heißt voll, wenn für alle $v, w \in |F(S_\lambda)|$ gilt: $H_{F(S_\lambda)}(v, w) = H_{F(S)}(v, w)$. (Siehe Fußnote 6.)

Im anderen Fall heißt S *zusammenhängend* bzw. *schwach zusammenhängend*. Ist S zusammenhängend, so ist S insbesondere schwach zusammenhängend.

Die Bedingung (2) in Def. 9 besagt, daß $P(S_1)$ nicht Teilmenge von $P(S_2)$ ist und umgekehrt; insbesondere gilt: $P(S_\lambda) \neq P(S)$ und $P(S_\lambda) \neq \emptyset$ für $\lambda = 1, 2$. Bedingung (3) bewirkt, daß jeder Morphismus f gerade in der in Kapitel 3 angegebenen Form dargestellt werden kann. Dies sieht man ein, indem man auf h (siehe Def. 9, (3)) wiederum die Bedingung (3) anwendet; man beachte, daß h auch eine Einheit sein kann.

Wir geben drei einfache Beispiele an:

Beispiel 1: S sei definiert durch: $A(S) = \{x_0, x_1, x_2\}$, $P(S) = \{1, 2\}$, $Q_S(1) = Q_S(2) = x_0$, $Z_S(1) = x_1$, $Z_S(2) = x_2$.

S ist weder zusammenhängend, noch schwach zusammenhängend.

Beispiel 2: $A(S) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $P(S) = \{1, 2, 3\}$, $Q_S(1) = x_0$, $Q_S(2) = Q_S(3) = x_1$, $Z_S(\lambda) = x_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$.

S ist schwach zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend; man betrachte $P(S_1) = \{1, 2\}$ und $P(S_2) = \{1, 3\}$.

Beispiel 3: Jedes Semi-Thue-System, das nur aus einer Regel besteht, ist zusammenhängend.

Def. 10: S_1 *heißt* Zusammenhangskomponente *von* S *genau dann, wenn* $A(S_1) = A(S)$ *gilt und wenn aus* $S_1 \subseteq S' \subseteq S$ *und* S' *zusammenhängend stets* $S_1 = S'$ *folgt.*

Entsprechend definiere man für den schwachen Zusammenhang die *Schw.-Zusammenhangskomponenten.*

Es ist klar, daß jede Regel in mindestens einer Zusammenhangskomponente liegen muß. Weiterhin zeigt man leicht, daß S seine Zusammenhangskomponenten eindeutig bestimmt, d. h. es gilt

Satz 4.1: *(Zerlegung in Zusammenhangskomponenten). Sei* S *ein Semi-Thue-System; dann existiert bis auf Umordnung genau eine Darstellung* $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$ $(m \geqq 1)$ *mit*

(1) $S_\lambda \neq S_\mu$ *für* $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, m)$,

(2) S_λ *ist Zusammenhangskomponente von* S *für* $\lambda = 1, \ldots, m$,

(3) m *ist maximal bzgl. der Eigenschaften* (1) *und* (2).

Insbesondere besitzt jedes $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ *eine Darstellung* $f = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_k$ $(k \geqq 1)$ *mit* $f_\lambda = h_\lambda^1 \times h_\lambda^2 \times \ldots \times h_\lambda^m$ *und* $h_\lambda^\mu \in \mathrm{Mor}(F(S_\mu))$ *für* $\mu = 1, \ldots, m$ *und* $\lambda = 1, \ldots, k$.

Ein entsprechender Satz gilt für den schwachen Zusammenhang:

Satz 4.2: *Es sei* S *ein Semi-Thue-System. Dann existiert bis auf Umordnung genau eine Darstellung* $S = S'_1 \cup S'_2 \cup \ldots \cup S'_j$ $(j \geqq 1)$ *mit*

(1) $S'_\lambda \neq S'_\mu$ *für* $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, j)$,

(2) S'_λ *ist* Schw.-Zusammenhangskomponente *von* S *für* $\lambda = 1, \ldots, j$.

Die Bedingung (3) in Satz 4.1., daß die Anzahl maximal ist, kann in Satz 4.2. wegen $P(S_\lambda) \cap P(S_\mu) = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$ fallen gelassen werden; sie ist stets erfüllt. Die Schw.-Zusammenhangskomponenten $S_1', \ldots, S_j'$ erhält man aus den Zusammenhangskomponenten $S_1, \ldots, S_m$, indem man auf letzteren die Relation $S_\lambda \wedge S_\mu \Leftrightarrow P(S_\lambda) \cap P(S_\mu) \neq \emptyset$ definiert; der transitive Abschluß von $\wedge$ liefert eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen genau den Schw.-Zusammenhangskomponenten zugeordnet sind.

In den folgenden Lemmata geben wir notwendige und hinreichende Kriterien dafür an, daß ein Semi-Thue-System zusammenhängend bzw. schwach zusammenhängend ist. Hierzu definieren wir:

Def. 11: *Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ heißt* unzerlegbar *genau dann, wenn aus $f = f_1 \times f_2$ folgt: $f = f_1$ oder $f = f_2$.*

Lemma 4.1: *Ein Semi-Thue-System S ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn es einen unzerlegbaren Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ gibt mit $a(r,f) \geqq 1$ für alle $r \in P(S)$.*

Beweis:

Es sei S zusammenhängend. Ist $P(S) = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Sei $P(S) \neq \emptyset$. Bilde die Menge der unzerlegbaren Morphismen $M = \{f \in \mathrm{Mor}(F(S)) \mid f$ ist unzerlegbar$\}$. Es ist $M \neq \emptyset$, da für alle $r \in P(S)$ gilt: $r \in M$. Zu jedem $f \in M$ bilde man $R(f) = \{r \in P(S) \mid a(r,f) \neq 0\}$. Es sei $R = \{R(f) \mid f \in M\}$; R ist eine Teilmenge der Potenzmenge von $P(S)$. R sei bezüglich der Mengeninklusion geordnet. Es sei $\{R_1, \ldots, R_k\}$ die Menge der maximalen Elemente von R. Bilde für $\lambda = 1, \ldots, k$: $S_\lambda = (A(S), R_\lambda, Q_S / R_\lambda, Z_S / R_\lambda)$. Jedes S_λ ist eine Zusammenhangskomponente von S; denn wenn $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ beliebig gewählt ist, dann kann man f stets in der Form $f = g \times h$ schreiben, wobei g ein unzerlegbarer Morphismus ist; nach Konstruktion gilt: $g \in \mathrm{Mor}(F(S_\lambda))$ für eine geeignetes λ. Daß es kein zusammenhängendes S' mit $S_\lambda \subseteq S' \subseteq S$ gibt (außer $S_\lambda = S'$), ist nach Konstruktion ebenfalls klar. Also ist jedes S_λ eine Zusammenhangskomponente von S. Da S zusammenhängend ist, kann S nur eine Zusammenhangskomponente, nämlich sich selbst, besitzen. Also ist $k = 1$, $S = S_1$ $R_1 = P(S)$. Also gibt es ein $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$, das unzerlegbar ist und für das gilt $R(f) = R_1 = P(S)$, d. h. $a(r,f) \geqq 1$ für alle $r \in P(S)$. Die Umkehrung ist nach Def. 9 trivial. *q. e. d.*

Sei S ein Semi-Thue-System. Auf $P(S)$ sei folgende Relation definiert: $r \gamma r' \Leftrightarrow$ es existieren $u_1, u_2, v_1, v_2 \in A(S)^*$, so daß in $F(S)$ gilt:

(1) $Q(1_{u_2} \times r' \times 1_{v_2}) = Z(1_{u_1} \times r \times 1_{v_1})$,

(2) der Morphismus $(1_{u_2} \times r' \times 1_{v_2}) \circ (1_{u_1} \times r \times 1_{v_1})$ ist unzerlegbar.

$\bar{\gamma}$ sei der reflexive, symmetrische und transitive Abschluß von γ.

Lemma 4.2: *Ein Semi-Thue-System S ist genau dann schwach zusammenhängend, wenn für alle $r, r' \in P(S)$ gilt: $r \bar{\gamma} r'$.*

Beweis:

Wir skizzieren den Beweis. Man sieht sofort, daß aus $r \gamma r'$ folgt: r und r' liegen in derselben Schw.-Zusammenhangskomponente. Hiermit beweist man leicht: wenn $r \bar{\gamma} r'$ gilt, dann liegen r und r' in derselben Schw.-Zusammenhangskomponente. Wenn durch $\bar{\gamma}$ nur eine Äquivalenzklasse definiert wird, dann ist S also schwach zusammenhängend, womit die eine Richtung des Lemmas bewiesen ist. Besitzt dagegen $\bar{\gamma}$ zwei oder mehr Äquivalenzklassen, dann betrachte man zwei solche Äquivalenzklassen $[r]$ und $[r']$. Kein $r_1 \in [r]$ kann mit einem $r_2 \in [r']$ in der sequentiellen Darstellung eines unzerlegbaren Morphismus zugleich vorkommen, da sonst $r_1 \bar{\gamma} r_2$ gelten würde. Daraus folgt sofort, daß S nicht schwach zusammenhängend ist. Damit ist auch die andere Richtung des Lemmas bewiesen. *q. e. d.*

Aus dem Beweis zu Lemma 4.2. folgt:

Satz 4.3: *Die Schw.-Zusammenhangskomponenten eines Semi-Thue-Systems S werden genau durch die Äquivalenzklassen der Relation $\bar{\gamma}$ definiert.*

5. Auflösbare Semi-Thue-Systeme

Die Begriffe „nicht zusammenhängend" und „nicht schwach zusammenhängend" (Def. 9) haben wir als Verallgemeinerung des Begriffs „zerlegbar" (Def. 8) gewonnen. Als weitere Verallgemeinerung werden wir den Begriff „auflösbar" definieren. Wenn ein Semi-Thue-System S nicht zusammenhängend ist, dann kann man jeden Morphismus f in der Form $f = g \times h$ schreiben (siehe Def. 9). Dies ist aber gleichbedeutend mit $f = (1_{Z(g)} \times h) \circ (g \times 1_{Q(h)})$ und $f = (g \times 1_{Z(h)}) \circ (1_{Q(g)} \times h)$, d. h. man kann f in der Form $f = f_1 \circ f_2$ und $f = f_3 \circ f_4$ darstellen, wobei f_2 und f_3 Morphismen aus derselben freien X-Kategorie wie g sind (analog f_1, f_4). Wir betrachten nur eine dieser Darstellungen für f und definieren:

Def. 12: *Ein Semi-Thue-System S heißt* auflösbar *nach S_1 und S_2 genau dann, wenn es Semi-Thue-Systeme S_1 und S_2 gibt mit:*

(1) $S_1, S_2 \subseteq S$, $A(S_1) = A(S_2) = A(S)$,

(2) $P(S_1) \cap P(S_2) \neq P(S_\lambda)$ *für* $\lambda = 1, 2$,

(3) *ist* $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$, *dann existieren* f_1 *und* f_2 *mit* $f_1 \in \mathrm{Mor}(F(S_1))$, $f_2 \in \mathrm{Mor}(F(S_2))$ *und* $f = f_2 \circ f_1$.

Gilt zusätzlich

(4) $P(S_1) \cap P(S_2) = \emptyset$,

dann heißt S schwach auflösbar *nach S_1 und S_2.*

Wenn S nach S_1 und S_2 auflösbar ist, dann schreiben wir $S = (S_2 \longleftarrow S_1)$; ist S nach S_1 und S_2 schwach auflösbar, dann schreiben wir $S = (S_2 \xleftarrow{\text{sch}} S_1)$.

Bemerkung 1: Ist S nicht auflösbar, so ist S auch nicht schwach auflösbar.

Bemerkung 2: Wenn S nicht zusammenhängend bzgl. S_1 und S_2 (siehe Def. 9) ist, dann gilt $S = (S_2 \leftarrow S_1)$ und $S = (S_1 \leftarrow S_2)$.

Bemerkung 3: Ist S nicht auflösbar, dann ist S zusammenhängend.

Die Umkehrungen dieser Bemerkungen gelten nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 4: S sei definiert durch: $A(S) = \{x, y, x_1, x_2\}$, $P(S) = \{1, 2, 3\}$, $Q_S(1) = x_1 x_1$, $Q_S(2) = x_2 x_2$, $Q_S(3) = x$, $Z_S(1) = Z_S(2) = y\,x\,y$, $Z_S(3) = x_1 x_2$. S_1 und S_2 seien durch $P(S_1) = \{1, 3\}$ und $P(S_2) = \{2, 3\}$ definiert. Dann gilt: S ist zusammenhängend, S ist nicht schwach auflösbar, $S = (S_2 \leftarrow S_1)$ und $S = (S_1 \leftarrow S_2)$.

Jedes Semi-Thue-System läßt sich in nicht auflösbare Komponenten zerlegen; nur ist diese Zerlegung im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Die nicht auflösbaren Komponenten kann man mit Lemma 5.1. charakterisieren; sie selbst sind eindeutig bestimmt. Fordert man für die Darstellung des Semi-Thue-Systems durch nicht auflösbare Komponenten Eindeutigkeit, so kann man nur beweisen:

Satz 5.1: *Sei S ein Semi-Thue-System. Dann existieren Semi-Thue-Systeme $S_1, \ldots, S_k$ $(k \geqq 1)$ mit $S = S_k \leftarrow \ldots \leftarrow S_2 \leftarrow S_1$, und es gilt:*

(1) *Für jede Auflösung $S = S_m' \leftarrow \ldots \leftarrow S_1'$ $(m \geqq 1)$ gilt: Aus $S_j' = S_\lambda$ und $S_i' = S_{\lambda - r}$ folgt $i < j$ (für alle $1 \leqq i, j \leqq m$, $2 \leqq \lambda \leqq k$, $1 \leqq r \leqq \lambda - 1$),*

(2) *k ist maximal bezüglich der Eigenschaft* (1).

Weiterhin ist die Darstellung von S durch (1) bis (3) eindeutig bestimmt.
Der analoge Satz gilt für „schwach auflösbar".
Beispiel 4 ist ein Beispiel für auflösbare Semi-Thue-Systeme, die nach Satz 5.1. nicht zerlegt werden können. Die Forderung nach Eindeutigkeit der Darstellung schränkt die Anzahl der möglichen Zerlegungen ein.

Wir geben nun zwei Lemmata zur Charakterisierung auflösbarer bzw. schwach auflösbarer Semi-Thue-Systeme an. Es sei S ein Semi-Thue-System; dann definiere man auf $P(S)$ die Relation β:

$$r \,\beta\, r' \Leftrightarrow \text{es existiert ein unzerlegbarer Morphismus } h \in \operatorname{Mor}(F(S)),$$
$$h = (1_{u_2} \times r' \times 1_{v_2}) \circ g \circ (1_{u_1} \times r \times 1_{v_1})$$
$$\text{mit } a(r, g) = a(r', g) = 0.$$

$r\,\beta\,r'$ ist gleichbedeutend damit, daß es einen Morphismus gibt, in dessen sequentiellen Darstellungen r immer vor r' steht.

Lemma 5.1: *Ein Semi-Thue-System S ist dann und nur dann nicht auflösbar, wenn für alle $r, r' \in P(S)$ mit $r \neq r'$ gilt: $r\,\beta\,r'$.*

Beweis:

Es sei S nicht auflösbar. Wir nehmen an, es existieren $r_1, r_2 \in P(S)$ mit $r_1 \neq r_2$, so daß nicht $r_1 \beta r_2$ gilt. Dann bilde man die Semi-Thue Systeme S_1 und S_2, die definiert sind durch $P(S_2) = P(S) \setminus \{r_2\}$ und

$P(S_1) = P(S) \setminus \{r_1\}$. Sei $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ mit $a(r_1, f) \geqq 1$ und $a(r_2, f) \geqq 1$ beliebig gewählt. Dann kann es keinen unzerlegbaren Morphismus $h = (1_{u_2} \times r_2 \times 1_{v_2}) \circ g \circ (1_{u_1} \times r_1 \times 1_{v_1})$ geben, so daß f sich in der Form $f = f_2 \circ (1_u \times h \times 1_v) \circ f_1$ mit $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(F(S))$ darstellen läßt, da sonst $r_1 \,\beta\, r_2$ gelten würde. Daraus folgt: Es existiert eine sequentielle Darstellung von f, in der jedes r_1 vor jedem r_2 steht, d. h. es existiert eine Darstellung $f = g_2 \circ g_1$ mit $g_\lambda \in \mathrm{Mor}(F(S_\lambda))$ für $\lambda = 1, 2$. Da f beliebig gewählt wurde, gilt $S = (S_2 \leftarrow S_1)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch, d. h. für alle $r, r' \in P(S)$ mit $r \neq r'$ gilt $r \,\beta\, r'$.

Sei nun umgekehrt $r \,\beta\, r'$ für alle $r, r' \in P(S)$ mit $r \neq r'$ erfüllt. Wir nehmen an, es gelte $S = (S_2 \leftarrow S_1)$. Dann existieren $r_1 \in P(S_1) \setminus P(S_2)$ und $r_2 \in P(S_2) \setminus P(S_1)$. Nach Voraussetzung gilt: $r_1 \,\beta\, r_2$ und $r_2 \,\beta\, r_1$. Nach Definition von β existieren dann Morphismen h und h', die eine Darstellung $h = h_2 \circ h_1$ und $h' = h_1' \circ h_2'$, aber keine Darstellung $h = g_1 \circ g_2$ und $h' = g_2' \circ g_1'$ für g_λ, g_λ', h_λ, $h_\lambda' \in \mathrm{Mor}(F(S_\lambda))$, $\lambda = 1, 2$, besitzen. Daraus folgt: S ist nicht auflösbar nach S_1 und S_2, im Widerspruch zur Annahme. *q. e. d.*

Aus Bemerkung 3, Lemma 4.1. und Lemma 5.1. folgt:

Korollar: *Sei S ein Semi-Thue-System. Es gelte für alle $r, r' \in P(S)$ mit $r \neq r'$ die Relation $r \,\beta\, r'$. Dann existiert ein unzerlegbarer Morphismus f mit $a(r, f) \geqq 1$ für alle $r \in P(S)$.*

Dieses Korollar ist auf direktem Wege nur schwer zu beweisen.

γ sei wie in Kapitel 4 definiert. $\hat{\gamma}$ sei der reflexive und transitive Abschluß von γ.

Lemma 5.2: *Ein Semi-Thue-System S ist genau dann nicht schwach auflösbar, wenn für alle $r, r' \in P(S)$ gilt: $r \,\hat{\gamma}\, r'$.*

Beweis:

S sei nicht schwach auflösbar. Es möge ein Paar r_1, $r_2 \in P(S)$ geben, so daß nicht $r_2 \,\hat{\gamma}\, r_1$ gilt. Notwendig muß $r_1 \neq r_2$ sein. Bilde die Menge $P_2 = \{r \mid r \in P(S),\ r_2 \,\hat{\gamma}\, r\}$. Wegen $r_2 \in P_2$ ist $P_2 \neq \emptyset$. Seien die Semi-Thue-Systeme S_1 und S_2 definiert durch $P(S_1) = P(S) \setminus P_2$ und $P(S_2) = P_2$. Man betrachte ein beliebiges $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$. Dann kann man f in der Form $f = f_2 \circ f_1$ mit $f_\lambda \in \mathrm{Mor}(F(S_\lambda))$, $\lambda = 1, 2$, darstellen, da sonst $r_2 \,\hat{\gamma}\, r_1$ gelten würde. Also ist S schwach auflösbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es gelte umgekehrt für alle $r, r' \in P(S)$ die Relation $r \,\hat{\gamma}\, r'$. Wir nehmen an, S sei schwach auflösbar nach S_1 und S_2. Seien $r \in P(S_1)$ und $r' \in P(S_2)$. Wegen $r \,\hat{\gamma}\, r'$ und $r' \,\hat{\gamma}\, r$ existieren dann Folgen $r = r_0, r_1, \ldots, r_k = r'$ und $r' = q_0, q_1, \ldots, q_m = r$ mit $r_{\lambda-1} \,\gamma\, r_\lambda$ und $q_{\mu-1} \,\gamma\, q_\mu$ für $\lambda = 1, \ldots, k$ und $\mu = 1, \ldots, m$ $(k, m \geqq 1)$. Da $r \in P(S_1)$ und $r' \in P(S_2)$ sind, existieren r_λ und q_μ mit $r_{\lambda-1}$, $q_\mu \in P(S_1)$, r_λ, $q_{\mu-1} \in P(S_2)$ und $1 \leqq \lambda \leqq k$, $1 \leqq \mu \leqq m$. Aus $r_{\lambda-1} \,\gamma\, r_\lambda$ und $q_{\mu-1} \,\gamma\, q_\mu$ ergibt sich nach Definition von γ ein Widerspruch dazu, daß S nach S_1 und S_2 schwach auflösbar ist. Also ist die Annahme falsch, d. h. S ist nicht schwach auflösbar. *q. e.* d.

Abschließend stellen wir Beziehungen zwischen den Zerlegungsbegriffen her. Die folgenden Sätze beweist man leicht mit Hilfe der Lemmata. Man beachte, daß bei kontextfreien freien X-Kategorien ein Morphismus f genau dann nicht zerlegbar ist, wenn $L(Q(f)) = 1$ gilt.

Satz 5.2: *Ein Semi-Thue-System S ist genau dann nicht schwach zusammenhängend bzgl. S_1 und S_2, wenn gilt:*

$$S = (S_2 \xleftarrow{\text{schw}} S_1) \text{ und } S = (S_1 \xleftarrow{\text{schw}} S_2).$$

Der analoge Satz für „nicht zusammenhängend“ und „auflösbar“ gilt allgemein nicht (Beispiel 4); er gilt auch nicht im kontextfreien Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 5: Sei S definiert durch $A(S) = \{x, x_1, x_2, y_1, y_2\}$, $P(S) = \{1, 2, 3\}$, $Q_S(1) = x$, $Q_S(2) = x_1$, $Q_S(3) = x_2$, $Z_S(1) = x_1 x_2$, $Z_S(2) = y_1$, $Z_S(3) = y_2$. S_1 und S_2 seien definiert durch $P(S_1) = \{1, 2\}$ und $P(S_2) = \{1, 3\}$; dann gilt: $S = (S_1 \to S_2)$, $S = (S_2 \to S_1)$, und S ist zusammenhängend.

Die Begriffe „zusammenhängend“ und „nicht schwach auflösbar“ liegen im allgemeinen fremd zueinander. Wir geben hierfür zwei Beispiele an:

Beispiel 6: S sei gegeben durch $A(S) = \{x, x_1, x_2\}$, $P(S) = \{1, 2\}$ $Q_S(1) = x_1$, $Z_S(1) = Q_S(2) = x$, $Z_S(2) = x_2$. S ist zusammenhängend und schwach auflösbar.

Beispiel 7: Sei S definiert durch $A(S) = \{x, x', y, y', x_1, x_2\}$, $P(S) = \{1, 2, 3\}$, $Q_S(1) = x_1 x_1$, $Z_S(1) = x_2 x_2$, $Q_S(2) = x_2 x$, $Z_S(2) = y x_1 x_1 y$, $Q_S(3) = x_2 x'$, $Z_S(3) = y' x_1 x_1 y'$. S_1 und S_2 seien durch $P(S_1) = \{1, 2\}$ und $P(S_2) = \{1, 3\}$ definiert. S ist nicht zusammenhängend bezüglich S_1 und S_2, und S ist nicht schwach auflösbar.

Im kontextfreien Fall gilt jedoch:

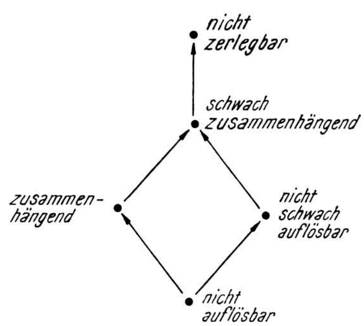
Satz 5.3: *Sei S ein kontextfreies Semi-Thue-System. Wenn S nicht schwach auflösbar ist, dann ist S zusammenhängend.*

Satz 5.4: *Ein kontextfreies Semi-Thue-System S ist genau dann auflösbar, wenn es schwach auflösbar ist.*

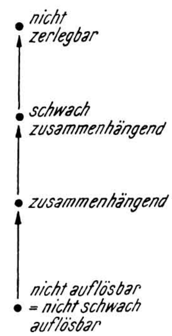
(Der Beweis zu Satz 5.4 ergibt sich aus der Tatsache, daß im kontextfreien Fall aus $r \hat{\gamma} r'$ auch $r \beta r'$ folgt.)

Aus den Sätzen und Beispielen erhalten wir somit folgende Hierarchie der Zerlegungsbegriffe:

Im allgemeinen Fall:



Im kontextfreien Fall:



Der Pfeil $\overset{a}{\cdot} \rightarrow \overset{b}{\cdot}$ besagt in diesen Zeichnungen: „aus der Eigenschaft a folgt die Eigenschaft b, aber im allgemeinen nicht umgekehrt".

6. Entscheidbarkeitsfragen

Wir untersuchen, für welche Klassen von Semi-Thue-Systemen die Zerlegungsbegriffe entscheidbare Eigenschaften sind. Hierzu werden wir die Lemmata der vorigen Kapitel heranziehen. Aus Lemma 3.1 folgt sofort, daß es entscheidbar ist, ob für eine beliebige Menge A ein Semi-Thue-System A-zerlegbar ist. In Kapitel 4 wird die Relation γ zwischen Regeln definiert. Man beweist leicht, daß es für beliebige Regeln entscheidbar ist, ob sie der Relation γ genügen oder nicht. Mit γ sind auch $\hat{\gamma}$ und $\bar{\gamma}$ entscheidbar. Aus Lemma 4.2 und Lemma 5.2 folgt dann:

Satz 6.1: *Sei S ein beliebiges Semi-Thue-System. Dann ist es entscheidbar, ob S*

(1) *A-zerlegbar für eine beliebige Menge A,*

(2) *schwach zusammenhängend,*

(3) *schwach auflösbar*

ist. Insbesondere sind die Schw.-Zusammenhangskomponenten, die Semi-Thue-Systeme, nach denen S A-zerlegbar ist, und die Semi-Thue-Systeme, nach denen S schwach auflösbar ist, effektiv konstruierbar.

Diese Konstruktionen sind in der Praxis sehr rasch durchführbar. Um z. B. die Relation γ zu entscheiden, braucht man nur für je zwei Regeln r und r' $Z(r)$ und $Q(r')$ aneinander „vorbeizuschieben" und auf partielle Deckungsgleichheit zu prüfen.

Satz 6.2: *Es ist für (determinierte) kontextsensitive Semi-Thue-Systeme generell nicht entscheidbar, ob sie*

(1) *zusammenhängend oder*

(2) *auflösbar sind.*

Beweis:

Wenn f ein Morphismus mit $Q(f) = u$ und $Z(f) = v$ ist, dann schreiben wir in diesem Beweis auch (u, v) anstelle von f.

S sei ein (determiniertes) kontextsensitives Semi-Thue-System. Man zeichne eine Menge $T \subset A(S)$ und ein Element $\sigma \in A(S) \setminus T$ aus ($T \neq \emptyset$). $G = (F(S), T, \{\sigma\})$ sei die zugehörige Grammatik. Bekanntlich gilt

Hilfssatz 1: *Es ist generell für eine beliebige (determinierte) kontextsensitive Grammatik G nicht entscheidbar, ob $\mathfrak{L}(G) = \emptyset$ ist.*

Wir werden Satz 6.2. hierauf zurückführen.

Es sei o. B. d. A. $T = \{0, 1\}$ (für card $(T) \geqq 2$ kodiere man geeignet; hierbei bleiben die Eigenschaften „zusammenhängend" und „auflösbar", sowie deren Negationen erhalten; der Fall card $(T) = 1$ ist im folgenden enthalten).[11]

Es sei V folgende Menge von Teilmengen von $P(S)$:

$$V = \{P' \mid P' \subseteq P(S), \text{ und es existiert mindestens ein } r \in P' \text{ mit } Q_S(r) = \sigma\}.$$

V ist eine endliche Menge und effektiv aus $P(S)$ konstruierbar. Es sei $V = \{P_1, \ldots, P_j\}$. Es seien $\sigma_0, R, R_1, R_2, q_0, q_1$ neue Symbole. Man setze:

$$B_1 = (A(S) \cup \{\sigma_0, R, R_1, R_2, q_0\}) \setminus \{1\},$$
$$B_2 = (A(S) \cup \{\sigma_0, R, R_1, R_2, q_1\}) \setminus \{0\},$$
$$B_3 = A(S) \cup \{\sigma_0, R, R_1, R_2, q_0, q_1\}.$$

Für $\lambda = 1, \ldots, j$ setze:

$$H_\lambda^1 = P_\lambda \cup \{(\sigma_0, R_1 \sigma R_2), \ (0 R_2, q_0 R_2), \ (q_0 R_2, q_0 0), \ (q_0 0, R_2 0), \ (R_1 R_2, R_1 R)\},$$

$$H_\lambda^2 = P_\lambda \cup \{(\sigma_0, R_1 \sigma R_2), \ (1 R_2, q_1 R_2), \ (q_1 R_2, q_1 1), \ (q_1 1, R_2 1), \ (R_1 R_2, R_1 R)\},$$

$$H_\lambda^3 = P_\lambda \cup \{(\sigma_0, R_1 \sigma R_2), \ (0 R_2, q_0 R_2), \ (q_0 R_2, q_0 0), \ (q_0 0, R_2 0), \ (1 R_2, q_1 R_2), \ (q_1 R_2, q_1 1), \ (q_1 1, R_2 1), \ (R_1 R_2, R_1 R)\}.$$

Für $\lambda = 1, \ldots, j$ und $\mu = 1, 2, 3$ setze

$$D_\lambda^\mu = (H_\lambda^\mu \setminus \{(R_1 R_2, R_1 R)\}) \cup \{(R_1 R_2, R_1 \sigma_0 R)\}.$$

Man definiere Semi-Thue-Systeme durch

$$S_\lambda^\mu = (B_\mu, H_\lambda^\mu, Q_{\lambda\mu}, Z_{\lambda\mu}) \text{ und } S'^\mu_\lambda = (B_\mu, D_\lambda^\mu, Q'_{\lambda\mu}, Z'_{\lambda\mu})$$

für $\lambda = 1, \ldots, j$ und $\mu = 1, 2, 3$. Es ist nach Konstruktion klar, wie $Q_{\lambda\mu}$, $Z_{\lambda\mu}$, $Q'_{\lambda\mu}$ und $Z'_{\lambda\mu}$ definiert sind (auf P_λ stimmen sie mit Q_S und P_S überein). Offenbar sind die S_μ^λ und S'^μ_λ (determiniert) kontextsensitiv. Man beweist nun folgende Hilfssätze (man verwende hierbei Lemma 4.1

[11] Wenn M eine Menge ist, dann verstehen wir unter card (M) die Anzahl der Elemente von M (Kardinalzahl).

und Lemma 5.1):

Hilfssatz 2: *Genau dann gilt* $\mathfrak{L}(G) \neq \emptyset$, *wenn* λ *und* μ *mit* $1 \leqq \lambda \leqq j$ *und* $1 \leqq \mu \leqq 3$ *existieren, so daß* S_λ^μ *zusammenhängend ist.*

Hilfssatz 3: *Genau dann gilt* $\mathfrak{L}(G) \neq \emptyset$, *wenn* λ *und* μ *mit* $1 \leqq \lambda \leqq j$ *und* $1 \leqq \mu \leqq 3$ *existieren, so daß* S'^μ_λ *nicht auflösbar ist.*

Wir nehmen nun an, es wäre für (determinierte) kontextsensitive Semi-Thue-Systeme generell entscheidbar, ob sie zusammenhängend sind. Dann konstruiere man alle zugehörigen S_λ^μ und entscheide, ob es ein S_λ^μ gibt, das zusammenhängend ist. Nach Hilfssatz 2 hätte man damit generell entschieden, ob $\mathfrak{L}(G) \neq \emptyset$ gilt, im Widerspruch zu Hilfssatz 1. Damit ist die Aussage (1) von Satz 6.2 bewiesen. Analog folgt die Aussage (2). *q. e. d.*

Aus dem Beweis zu Satz 6.2. folgt:

Satz 6.3: *Es ist generell für eine (determinierte) kontextsensitive Grammatik* $G = (F(S), T, \sigma)$ *nicht entscheidbar, ob es einen Morphismus* $f \in \mathrm{Mor}(F(S))$ *mit* $Q(f) \in \sigma$ *und* $Z(f) \in T^*$ *gibt, so daß für alle* $r \in P(S)$ *gilt:* $a(r, f) \geqq 1$.

Beweis:

Man füge zu den im Beweis zu Satz 6.2. definierten H_λ^μ noch die Regeln $(0, 0')$ und $(1, 1')$ hinzu (für $\mu = 1, 2$ nur eine dieser beiden Regeln); $0'$ und $1'$ seien neue Symbole. Man setze als Endalphabet $T' = \{R, R_1, 0', 1'\}$. Mit den Grammatiken $G_\lambda^\mu = (H_\lambda^\mu, T', \sigma)$ beweist man sofort Satz 6.3. *q. e. d.*

Wegen Satz 5.4. und Satz 6.1. ist es im kontextfreien Fall entscheidbar, ob ein Semi-Thue-System auflösbar ist oder nicht. Bei der Charakterisierung zusammenhängender Semi-Thue-Systeme (Lemma 4.1) wurde der Begriff des unzerlegbaren Morphismus benutzt. Im kontextfreien Fall gilt, daß ein Morphismus f genau dann unzerlegbar ist, wenn $L(Q(f)) = 1$ ist. Wenn S ein zusammenhängendes kontextfreies Semi-Thue-System ist, dann existiert nach Lemma 4.1 ein Morphismus f mit $L(Q(f)) = 1$ und $a(r, f) \geqq 1$ für alle $r \in P(S)$. Es sei $n = \mathrm{card}(P(S))$. Wie man sofort sieht, kann man f so wählen, daß $l(f) \leqq n^{n-1}$ gilt. Daraus folgt:

Satz 6.4: *Für kontextfreie Semi-Thue-Systeme ist es entscheidbar, ob sie zusammenhängend sind oder nicht. Insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten effektiv konstruierbar.*

Die oben angegebene Schranke läßt sich noch wesentlich verbessern.

Literatur

[1] Ehresmann, C.: Categories et Structures. Paris: Dunod. 1965.
[2] Chomsky, N.: On Certain Formal Properties of Grammars. Information and Control **2**, 137–167 (1959).
[3] Ginsburg, S.: The Mathematical Theory of Contextfree Languages. New York: McGraw-Hill. 1966.

[4] HOTZ, G.: Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit formaler Sprachen. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik **2**, 235—246 (1966).
[5] HOTZ, G.: Erzeugung formaler Sprachen durch gekoppelte Ersetzungen, in: BAUER, F. L., SAMELSON, K., 4. Colloquium über Automatentheorie, München 1967.
[6] KURODA, S. Y.: Classes of Languages and Linear Bounded Automata. Information and Control **7**, 202—223 (1964).
[7] LANDWEBER, P. S.: Three Theorems on Phrase Structure Grammars of Type 1, Information and Control **6**, 131—136 (1963).
[8] SCHNORR, C.-P.: Vier Entscheidbarkeitsprobleme für kontextsensitive Sprachen. Comp. **3**, 4, 311—317 (1968).
[9] VOLLMERHAUS, W.: Die Zerlegung von kontextfreien Semi-Thue-Systemen mit Anwendung auf das Analyseproblem kontextfreier Sprachen. Beiträge zur Linguistik und Informationsverarbeitung, **12**, (1967).
[10] VOLLMERHAUS, W.: Über die Zerlegung von freien X-Kategorien. In: BAUER, F. L., SAMELSON, K., 4. Colloquium über Automatentheroie. München 1967.
[11] WALTER, H.: Pullback-Konstruktionen bei Semi-Thue-Systemen. In: BAUER, F. L., SAMELSON, K., 4. Colloquium über Automatentheorie. München 1967.

Dipl.-Math. V. Claus und Dr. H. Walter
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes
D-66 Saarbrücken
Bundesrepublik Deutschland

Printed in Austria
Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien